

1.1 تعريف او ډولونه:

تعريف : هغه معادله چې مشتقات ولري دتفاضلي معادلې په نوم ياديږي ، كيداشي چې دغه مشتقات معمولي مشتقات وي او يا قسمي مشتقات وي.

تفاضلي معادلې په دوه ډوله دي

معمولي تفاضلي معادله (Ordinary Differential Equation)

هغه معادله چې د x مستقل متحول ، د y غيرمستقل متحول چې y ته د x تابع هم وايو او د y هر ترتيب مشتق نظر x ته ولري د معمولي تفاضلي په نامه سره ياديږي.

مثالونه:

1. $\frac{dy}{dx} + 3y = 0$
2. $\frac{dy}{dx} + y = e^x$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = 0$
4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = \sin x$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$
6. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 7\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} - 9y = \log x$

قسمي تفاضلي معادله (Partial Differential Equation)

هغه تفاضلي معادله چې دوه يا څو مستقل متحوله ، تابع او ددغه تابع قسمي مشتقات (هر ترتيب چې وي) ولري د قسمي تفاضلي معادلې په نامه سره ياديږي.

مثالونه:

- که چېرته z د x او y تابع وي نو:
7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
 8. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$
 9. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

1.2 دتفاضلي معادلو ترتيب او درجه

دتفاضلي معادلې ترتيب:

په تفاضلي معادله کې لوړ ترين مشتق دتفاضلي معادلې دترتيب څخه عبارت دی.

دتفاضلي معادلې درجه:

په تفاضلي معادله کې دلوړترين ترتيب توان دتفاضلي معادلې ددرجي څخه عبارت دی.

په پورته مثالونو کې:

- (1) لومړی ترتیب او لومړی درجه
- (2) لومړی ترتیب او لومړی درجه
- (3) دوهم ترتیب لومړی درجه
- (4) لومړی ترتیب دوهمه درجه
- (5) دوهم ترتیب لومړی درجه
- (6) دریم ترتیب دوهمه درجه

همدارنگه د $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ تفاضلي معادلې د ترتیب او درجې د پیداکولو لپاره لومړی دمعادلي دواړه خواوې مربع کوو ، په نتیجه کې معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

اوس پورته معادله دوهم ترتیب او دوهمه درجه تفاضلي معادله ده.

باید په یاد ولری چې د تفاضلي معادلو ترتیب او درجه کوم چې مونږ تعریف کړل باید مثبت تام عدد وي.

د تفاضلي معادلو حل

یوه معمولي تفاضلي معادله لاندې عمومي شکل لری

$$F[x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}] = 0 \quad (1)$$

دیوې تفاضلي معادلې حل عبارت دهغه تابع څخه دی ، کوم چې په راکړل شوی معادله کې صدق وکړي ، $\phi(x)$ تابع ته د (1) تفاضلي معادلې حل ویل کیږي ، که چیرته :

$$F[x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^n(x)] = 0$$

پایه بل عبارت $y = \phi(x)$ تابع په (1) معادله کې صدق وکړي.

د n ام ترتیب تفاضلي معادلو حل ، چې n اختیاري ثابت عددونه ولري د عمومي حل (general solution) په نامه سره یادېږي ، که چیرته په عمومي حل کې داخیاری ثابت عدد په ځای خاص قیمت وضعه شي ، د تفاضلي معادلې مشخص حل (particular solution) لاس ته راځي.

1.3 د تفاضلي معادلو ترتیب د پارامتر د حذفولو په واسطه

ددې لپاره چې مونږ ښه پوه شو چې څنګه کولای شو چې تفاضلي معادله د پارامتر د حذفولو په واسطه تشکیل کړو ، نو لاندې مثال په نظر کې نیسو.

مثال: داسي تفاضلي معادله تشکيل کړئ، کوم چې د $y = a \cos(x + b)$ منحنیاتو مجموعه رابښايي، a او b اختياري ثابت عددونه دي.

حل:

$$y = a \cos(x + b) \dots \dots \dots (1)$$

داولي معادلي نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin(x + b) \dots \dots \dots (2)$$

اوس ددوهمي معادلي نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a \cos(x + b) \dots \dots \dots (3)$$

ددریمي معادلي څخه د a قیمت لمنځه وړو، په نتیجه کې لاندې تفاضلي معادله لاسته راځي

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

په نتیجه کې ویلای شو، که وغواړو یوه تفاضلي معادله تشکيل کړو، نو لومړی باید دورکړل شو منحنیاتو مجموعي کوم چې د پارامترونو دلودونکي ده، مشتق ونیسو او بیا پارامترونه حذف کړو.

یادښت: (i) دمنحنیاتو هغه مجموعه کوم چې یو پارامتر ولري، لومړی ترتیب تفاضلي معادله تشکیلوی.

(ii) په عمومي ډول دمنحنیاتو هغه مجموعه کوم چې n پارامترونه ولري، n ام ترتیب تفاضلي معادله تشکیلوي.

1.4 لومړی ترتیب او لومړی درجه تفاضلي معادله

په دې فصل کې مونږ د لومړی ترتیب او لومړی درجی تفاضلي معادلو دحل لپاره مختلفي طریقو باندې بحث کوو، چې په عمومي ډول لومړی ترتیب او لومړی درجه تفاضلي معادلي لاند شکل لري.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

دپورته عمومي شکل، عمومي حل عبارت دی له:

$$F(x, y, c) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

په دوهمه معادله کې c یو اختياري ثابت عدد دی، کوم چې په لومړی معادله کې صدق کوي، که چېرته c ته یومشخص قیمت وکړو، نو په دې صورت کې عمومي حل په مشخص حل باندې بدلیري.

مونږ د لومړۍ معادلې ځينې معياري شکلونه په لاندې طريقو باندې حل کوو.

(1) هغه معادلې چې متحولین یې د تفکیک وړ وي او یا د ساده کولو څخه وروسته تفکیک ته برابريږي

(2) متجانسي تفاضلي معادلې

(3) متجانسو تفاضلي معادلو ته بدليدونکې تفاضلي معادلې

(4) کاملې تفاضلي معادلې

(5) کاملو تفاضلي معادلو ته بدليدونکې تفاضلي معادلې

(6) خطي تفاضلي معادلې

(7) خطي تفاضلي معادلو ته بدليدونکې تفاضلي معادلې (برنولي شکل)

1.5 د تفکیک وړ معادلې (Separation of variables):

ددې لپاره د تفاضلي معادلې لاندې شکل په نظر کې نیسو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \dots \dots \dots (1) \quad (g(y) \neq 0)$$

دمتحوّلینو په جدا کولو سره لومړۍ معادله په لاندې شکل لیکو او بیا یې انتیگرال نیسو

$$g(y)dy = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

دانتيگرال د نیونې څخه وروسته د (1) تفاضلي معادلې حل په لاندې ډول لاسته راځي

$$G(y) = F(x) + c$$

چې $F(x)$ او $G(y)$ په ترتیب سره د x او y توابع او c یو اختیاري ثابت عدد دی.

عملي مثالونه:

$$\text{لومړۍ مثال: } \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \quad \text{تفاضلي معادله حل کړئ}$$

حل: د متحوّلینو د جلا کولو څخه وروسته معادله په لاندې ډول حل کوو

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + A$$

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = A$$

$$\tan^{-1} \frac{y-x}{1+yx} = A$$

$$\tan^{-1} \frac{y-x}{1+yx} = \tan^{-1} c \Rightarrow \frac{y-x}{1+yx} = c \Rightarrow y-x = c(1+yx)$$

کوم چې دغوبنټل شوي معادلې مطلوب حل دی

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^y$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی یې متحولین سره بیلوو اوبیا یې ددواړو خواوو انټیګرال نیسو

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^y + x^2 e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^y (e^x + x^2)$$

$$e^{-y} dy = (e^x + x^2) dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int (e^x + x^2) dx$$

$$-e^{-y} + c = e^x + \frac{x^3}{3} \quad \text{یا} \quad e^x + e^{-y} + \frac{1}{3} x^3 = c$$

دریم مثال: $e^x \tan y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: ددی لپاره چې متحولین یې سره بیل کړو، نومعادله په $(1 - e^x) \tan y$ باندې ویشو

$$\frac{e^x}{1 - e^x} dx + \sec^2 y \, dy = 0$$

$$-\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx + \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = \log c$$

$$-\ln(e^x - 1) + \ln \tan y = \ln c$$

$$\ln \left(\frac{\tan y}{e^x - 1} \right) = \ln c \quad \text{یا} \quad \tan y = c(e^x - 1)$$

خلورم مثال: $\tan y \frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ تفاضلی معادله حل کری

حل: د $\sin C + \sin D$ رابطې څخه په استفادې سره پورته معادله په لاندې شکل لیکو

$$\tan y \frac{dy}{dx} = 2 \sin x \cos y$$

$$\frac{\tan y}{\cos y} dy = 2 \sin x dx$$

$$\sec y \tan y dy = 2 \sin x dx$$

$$\int \sec y \tan y dy = 2 \int \sin x dx$$

$$\sec y = -2 \cos x + c \quad \text{یا} \quad \sec y + 2 \cos x = c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(x+y)}$ تفاضلی معادله حل کری

په راکړل شوي معادله کې متحولین یو دبل څخه نه بیلیري ، خو که $x+y=t$ سره تعویض کړو ، نو بیا کولای شو متحولین یې په اسانۍ سره بیل کړو

$$x+y=t \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dt}{dx} - 1 = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t} + 1 = \frac{1 + \cos t}{\cos t}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو ، چې لاندې شکل لاسته راځي

$$\frac{\cos t dt}{1 + \cos t} = dx$$

$$\left(\frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} \right) dt = dx \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tan^2 \frac{t}{2} \right) dt = dx$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{t}{2} \right) dt = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \left(\sec^2 \frac{t}{2} - 1 \right) \right) dt = dx$$

$$\frac{1}{2} \left(2 - \sec^2 \frac{t}{2} \right) dt = dx \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} \right) dt = dx$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} \right) dt = \int dx \Rightarrow t - \tan \frac{t}{2} = x + c$$

$$x + y - \tan \left(\frac{x+y}{2} \right) = x + c \quad \text{یا} \quad y - \tan \left(\frac{x+y}{2} \right) = c$$

کوم چې ډراکړل شوي معادلې عمومي حل دی

شپږم مثال: $\frac{dy}{dx} + 1 = e^{x+y}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: $x+y=t$ سره نيسو

$$x + y = t \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\frac{dt}{dx} = e^t \Rightarrow e^{-t} dt = dx$$

$$\int e^{-t} dt = \int dx$$

$$-e^{-t} = x + c$$

$$-e^{-(x+y)} = x + c \Rightarrow x + e^{-(x+y)} + c = 0$$

اووم مثال: $(2x - 3y + 1)dx + (6y - 4x + 3)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله کې متحولین سره نه بیلیري ، خوکه په لاندې ډول تعویض اجرا کړو ، نو بیا کولای شو چې په اسانۍ سره معادله کې متحولین سره بیل کړو

$$2x - 3y = t \Rightarrow 2 - \frac{3dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x - 3y) + 1}{2(2x - 3y) - 3}$$

$$\frac{1}{3} \left(2 - \frac{dt}{dx} \right) = \frac{t+1}{2t-3} \quad \text{يا} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{t-9}{2t-3} \Rightarrow \frac{(2t-3)}{t-9} dt = dx$$

$$\int \left(\frac{2t-3}{t-9} \right) dt = \int dx \quad \text{يا} \quad \int \left(\frac{2t}{t-9} - \frac{3}{t-9} \right) dt = \int dx$$

$$2 \int \frac{t-9+9}{t-9} dt - 3 \int \frac{1}{t-9} dt = \int dx$$

$$2 \int \left(1 + \frac{9}{t-9} \right) dt - 3 \int \frac{1}{t-9} dt = \int dx$$

$$2[t + 9 \ln(t-9)] - 3 \ln(t-9) = x + A$$

$$2t + 15 \ln(t-9) = x + A$$

$$(4x - 6y) + 15 \ln(2x - 3y - 9) = x + A$$

$$3x - 6y + 15 \ln(2x - 3y - 9) = A$$

$$\text{يا} \quad x - 2y + 5 \ln(2x - 3y - 9) = c \quad c = \frac{1}{3}A$$

اتم مثال: $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$ تفاضلي معادله حل كړئ

حل:

$$t = x + y \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

دغه قيمتونه په راكړل شوي تفاضلي معادله كې وضعه كوو

$$\frac{dt}{dx} - 1 = \sin t + \cos t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sin t + \cos t + 1$$

$$\frac{dt}{\sin t + \cos t + 1} = dx \Rightarrow \frac{dt}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + 2 \cos^2 \frac{t}{2}} = dx$$

صورت او مخرج په $\cos^2 \frac{t}{2}$ باندې ویشو

$$\frac{\sec^2 \frac{t}{2}}{2 \left[\tan \frac{t}{2} + 1 \right]} dt = dx$$

$$\int \frac{\sec^2 \frac{t}{2}}{2 \left[\tan \frac{t}{2} + 1 \right]} dt = \int dx$$

$$\ln \tan \left[\frac{t}{2} + 1 \right] = x + c \quad \text{یا} \quad \tan \left[\frac{x + y + 2}{2} \right] = e^{x+c}$$

$$\tan \left(\frac{x + y + 2}{2} \right) = A e^x \quad (A = e^c)$$

1.6 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلي حل کړئ

01. $(e^y + 1) \cos x \, dx + e^y \sin x \, dy = 0$

02. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{1 + x^3}$

03. $(x + 1) \frac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$

04. $y - x \frac{dy}{dx} = a \left(y^2 + \frac{dy}{dx} \right)$

05. $(x^2 - yx^2) \frac{dy}{dx} + y^2(1 + x) = 0$

06. $\frac{dy}{dx} + xy = xy^3$

07. $x \sqrt{1 + y^2} dx = y \sqrt{1 + x^2} dy = 0 \quad \frac{dy}{dx} + \frac{\sqrt{1 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = 0, \quad y = 1, \quad x = 0$

09. $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2 \ln x + 1)}{\sin y + y \cos y}$

10. $a \left(x \frac{dy}{dx} + 2y \right) = 2xy \frac{dy}{dx}$

11. $\frac{dy}{dx} (1 + x)(1 + y^2), \quad y = 1, \quad x = 0$

12. $\cos y \ln(\sec x + \tan x) dx = \cos x \ln(\sec y + \tan y) dy$

تفکیک ته بدلیدونکي تفاضلي معادلي

13. $\frac{dy}{dx} = (3x + 2y + 4)^2$ 14. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{3x - y + 4}$
15. $(x + 2y - 1)dx = (x + 2y + 1)dy$ 16. $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$
17. $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$ 18. $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{x-y}$
19. $x^4 \frac{dy}{dx} + x^3 y + \operatorname{cosec}(xy) = 0$ 20. $x dy + y dx + 4\sqrt{1 - x^2 y^2} dx = 0$

جوابونه:

01. $\sin(e^y + 1) = c$ 02. $y^3 = c(1 + x^3)$ 03. $(x + 1) = c(2 - e^y)$
04. $(x + a) = c \cdot \frac{y}{(1 - ay)}$ 05. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = c$ 06. $\frac{y^2 - 1}{y^2} = Ae^{x^2}$
07. $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = c$ $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ 09. $x^2 \ln x - y \sin y = c$
10. $e^{-2y} y^a x^{2a} = A$ 11. $\tan^{-1} y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}$
12. $[\ln(\sec x + \tan x)]^2 - [\ln(\sec y + \tan y)]^2 = c$
13. $\frac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (3x + 2y + 4) \right] = x + c$
14. $2x - y - 15 \ln(3x - y + 19) + c = 0$ 15. $x = y + \frac{2}{3} \ln \left(x + 2y - \frac{1}{3} \right) + c$
16. $\tan^{-1}(x + y) = x + c$ 17. $1 + \tan \left\{ \frac{x + y}{2} \right\} + \frac{2}{x + c} = 0$
18. $x = e^{-(x-y)} + c$ 19. $\cos xy = -\frac{1}{2x^2} - c$ 20. $\sin^{-1}(xy) + 4x = c$

متجانسي تفاضلي معادلي (Homogeneous Differential Equations)

$f(x, y)$ يوه n امه درجه متجانسه تابع ده، که چيرته $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ سره شي،
دمثال په ډول $x^2 + xy$ ، $\sqrt{x^2 + y^2}$ او $\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ په ترتيب سره دوهمه، اوله او صفرمه
درجه متجانسي توابع دي.

$M(x, y) dx + N(x, y) = 0$ يوه لومړۍ ترتيب او لومړۍ درجه متجانسه تفاضلي معادله ده، که
چيرته M او N يو شان درجه لرونکي متجانسي توابع وي، پورته معادله کولای شو د $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

په شکل وليکو، چې $f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ يوه صفرمه درجه متجانسه تابع ده، دغه تابع بيا د
 $\frac{x}{y}$ يا $\frac{y}{x}$ په شکل ليکلای شو، چې ددې څخه لاندې معادلي لاسته راځي

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \dots \dots \dots (1) \quad \text{يا} \quad \frac{dx}{dy} = f\left(\frac{x}{y}\right) \dots \dots \dots (2)$$

په لومړۍ معادله کې $\frac{y}{x} = v$ سره تعويض کوو او په دوهمه معادله کې $\frac{x}{y} = v$ سره تعويض کوو،
ورسته يې بيا متحولين سره بيلوو او حل بيا يې حل کوو، چې د لومړۍ معادلي لپاره په لاندې ډول عمل
اجراوو

$$\frac{y}{x} = v \quad \Rightarrow \quad y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

دغه قيمتونه په لومړۍ معادله کې وضعه کوو

$$v + x \frac{dv}{dx} = f(v)$$

اوس يې متحولين سره بيلوو او انټيگرال يې نيسو

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{f(v) - v} \quad \Rightarrow \quad \ln x + c = \int \frac{dv}{f(v) - v}$$

چې c يو اختياري ثابت عدد دی، همدارنگه د دوهمې معادلي د حل لپاره په لاندې ډول عمل اجراوو

$$\frac{x}{y} = v \quad \Rightarrow \quad x = vy, \quad \frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$$

دغه قيمتونه په دوهمه معادله کې وضعه کوو

$$v + y \frac{dv}{dy} = f(v)$$

پورته معادله هم دمتحولينو په جلا کولو سره حل کوو

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(x - y)dy - (x + y)dx = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله د $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ په شکل لیکو ، دمعادلي بني صرف یوه متجانسه تابع ده ، او په لاندې ډول تعویض اجرا کوو

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + \frac{xdv}{dx} = \frac{x + vx}{x - vx} \Rightarrow v + \frac{xdv}{dx} = \frac{1 + v}{1 - v} \Rightarrow \frac{xdv}{dx} = \frac{1 + v}{1 - v} - v$$

$$\frac{xdv}{dx} = \frac{(1 + v) - v(1 - v)}{1 - v} \quad \text{یا} \quad \frac{1 - v}{1 + v^2} dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{1 + v^2} dv - \frac{1}{2} \int \frac{2v}{1 + v^2} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\tan^{-1} v - \frac{1}{2} \ln(1 + v^2) = \ln x + c \Rightarrow \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = \ln x + c$$

$$\text{یا} \quad \tan^{-1} \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = c$$

دوهم مثال: $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} = \frac{1 - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}}$$

دمعادلي بني طرف یوه متجانسه تابع رابښايي ، او دحل لپاره یې لومړی په لاندې ډول تعویض اجرا کوو

$$\frac{y}{x} = v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v + v^2}{v} \quad \text{یا} \quad x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v - v^2}{v} - v \quad \text{یا} \quad x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v}{v}$$

اوس يي متحولین سره بیلوو او انټیگرل يي نیسو

$$\frac{dx}{dv} = \frac{v}{1 - v} dv \quad \text{یا} \quad \frac{dx}{v} = \left(\frac{v - 1 + 1}{1 - v} \right) dv$$

$$\int \frac{1}{x} dx = - \int \left(1 + \frac{1}{v - 1} \right) dv$$

$$\ln x = -[v + \ln(v - 1)] + c \quad \text{یا} \quad \ln x(v - 1) = c - v$$

$$\ln(y - x) = c - \frac{y}{x}$$

کوم چي دراگرل شوي معادلي عمومي حل دی

دریم مثال: $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راگرل شوی معادله په لاندې شکل لیکو

$$x \frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

کومه چي یوه متجانسه تفاضلي معادله ده او دحل کولو لپاره يي په لاندې ډول تعویض اجراوو

$$y = vx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + \frac{xdv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2 x^2}}{x} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

$$\frac{xdv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

متحولین يي سره بیلوو او انټیگرال يي نیسو

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln [v + \sqrt{1+v^2}] = \ln x + \ln c \quad \Rightarrow \quad v + \sqrt{1+v^2} = xc$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = xc \quad \Rightarrow \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 c$$

خلورم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ تفاضلي معادله حل کری

حل: لیدل کیری چي دمعادلي بنی طرف یوه متجانسه تابع ده ، نودحل لپاره یې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$\frac{y}{x} = v \quad \Rightarrow \quad y = vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + \frac{xdv}{dx} = v + \tan v \quad \Rightarrow \quad \frac{xdv}{dx} = \tan v \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{\tan v} = \frac{dx}{x}$$

$$\cot v dv = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \cot v dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln \sin v + \ln c = \ln x \quad \text{یا} \quad x = c \sin v \quad \text{یا} \quad x = c \sin \left(\frac{y}{x} \right)$$

پنځم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کری

$$x \cos \left(\frac{y}{x} \right) (y dx + x dy) = y \sin \left(\frac{y}{x} \right) (x dy - y dx)$$

حل: تفاضلي معادله په لاندې شکل لیکو

$$\left[x \cos \left(\frac{y}{x} \right) + y \sin \left(\frac{y}{x} \right) \right] y - \left[y \sin \left(\frac{y}{x} \right) - x \cos \left(\frac{y}{x} \right) \right] x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{ x \cos \left(\frac{y}{x} \right) + y \sin \left(\frac{y}{x} \right) \right\} y}{\left\{ y \sin \left(\frac{y}{x} \right) - x \cos \left(\frac{y}{x} \right) \right\} x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{ \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) \right\} \frac{y}{x}}{\left\{ \frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right\}} \dots \dots \dots (1)$$

اوس دمعادلي دحل لپاره په لاندې ډو تعويض اجراوو

$$\frac{y}{x} = v \quad \Rightarrow \quad y = vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

ددغه قيمتونو په وضعه كولو سره لومړۍ معادله لاندې شكل غوره كوي

$$v + \frac{xdv}{dx} = \frac{v(\cos v + v \sin v)}{v \sin v - \cos v}$$

$$\frac{xdv}{dx} = \frac{v(\cos v + v \sin v)}{v \sin v - \cos v} - v = \frac{2v \cos v}{v \sin v - \cos v}$$

$$2 \frac{dx}{x} = \frac{v \sin v - \cos v}{v \cos v} dv$$

$$2 \int \frac{1}{x} dx = \int \left(\frac{\sin v}{\cos v} - \frac{1}{v} \right) dv$$

$$2 \ln x = -\ln \cos v - \ln v + \ln c$$

$$\ln x^2 = \ln \left(\frac{c}{v \cos v} \right)$$

$$x^2 v \cos v = c \quad \text{يا} \quad xy = \cos\left(\frac{y}{x}\right) = c$$

شپږم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل كړئ

$$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

حل: راکړل شوی معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)}{\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)} \dots \dots \dots (1)$$

دمعادلي بنی طرف یوه متجانسه تابع راښايي ، نو دمعادلي دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x = vy \quad \therefore \quad \frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$$

دغه قیمتونه په لومړۍ معادله کې وضعه کوو

$$v + y \frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} \quad y \frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} - v = -\frac{(v+e^v)}{1+v}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او انټیګرال یې پیداوو

$$\frac{1+e^v}{v+e^v} dv = -\frac{dy}{y} \quad \therefore \quad \int \left(\frac{1+e^v}{v+e^v} \right) dv = -\int \frac{1}{y} dy$$

$$\ln(v+e^v) = -\ln y + \ln c$$

$$\ln(v+e^v) y = \ln c \quad \text{یا} \quad y(v+e^v) = c$$

$$y \left(\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}} \right) = c \quad \text{یا} \quad x + ye^{\frac{x}{y}} = c$$

1.7 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلي حل کړئ

$$01. \quad (x-y) \frac{dy}{dx} = x+2y$$

$$02. \quad (x^3 - 3xy^2)dx = (y^3 - 3x^2y)dy$$

$$03. \quad (3xy + y^2)dx - (x^2 + xy)dy = 0$$

$$04. \quad x \frac{dy}{dx} - y + x \sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$05. \quad (x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$$

$$06. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$07. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + 2y^3}{2xy^2}$$

$$08. \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$09. \quad y dx + x \left(\ln\left(\frac{y}{x}\right) \right) - 2x dy = 0$$

$$10. \quad x^2 + (x^2 - xy) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$11. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - \sqrt{xy}}$$

$$12. \quad \left(x \tan \frac{y}{x} - y \sec^2 \frac{y}{x} \right) dx + x \sec^2 \left(\frac{y}{x} \right) dy = 0$$

$$13. \quad (x^2 + y^2)dx = 2xdy \quad y(1) = 0 \quad 14. \quad xe^{\frac{y}{x}} - y + xy' = 0 \quad y(e) = 0$$

جوابونه:

1. $\ln|x^2 + xy + y^2| = 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{x + 2y}{x\sqrt{3}} \right) + c$
2. $(x^2 - y^2) = c(x^2 + y^2)^2$
3. $\ln \left| \frac{y}{x^3} \right| + \frac{y}{x} = c \quad (x \neq 0, y \neq 0)$
4. $x \sin \frac{y}{x} = c \left(1 + \cos \frac{y}{x} \right) \left(x \sin \frac{y}{x} \right) \quad (x \neq 0)$
5. $y^2 = x^2 + cx^4$
6. $\sin \left(\frac{y}{x} \right) = cx$
7. $2y^3 = 3x^3(\ln x + c)$
8. $y = x \tan \ln(cx)$
9. $cy = \ln \frac{y}{x} - 1$
10. $y = (\ln y + c)$
11. $2 \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = 0$
12. $x \tan \frac{y}{x} = c$
13. $x^2 - y^2 = x$
14. $y = -x \ln \ln|x| \quad (x \neq 0)$

1.8 هغه معادلي چي په متجانسو معادلو باندې بدلیری

دایول معادلي عموماً د $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{Ax+By+C}$ په شکل دي، چي a, b, c, A, B, C ثابت عددونه دي، ددایول معادلو دحل لپاره لاندې دوه حالتونه موجود دي.

اول حالت: که چیرته (فرضیه) $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = k$ نو په دې صورت کي معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k(Ax + By) + c}{Ax + By + C}$$

په دایول معادلو کي کولای شو چي د $Ax + By = t$ تعویض څخه وروسته متحولین په اسانۍ سره بیل کړو.

دوهم حال: که چیرته $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$ سره وي، نو په دې صورت کي راکړل شوی تفاضلي معادله د $x = X + h$ او $y = Y + k$ په وضعه کولو سره معادله په متجانسه تفاضلي معادله باندې بدلیری، چي h او k ثابت عددونه دي، او دمعادلاتو دحل څخه لاسته راځي.

$$x = X + h \Rightarrow dx = dX, \quad y = Y + k \Rightarrow dy = dY$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

اوس نو معادله لاندې شکل اختیاري

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(aX + bY) + (ah + bl + c)}{(AX + BY) + (Ah + Bk + C)}$$

که چیرته h او k داسې انتخاب کړو چې $ah + bk + c = 0$, $Ah + Bk + C = 0$ سره شي، نو په دې صورت کې پورته معادله لاندې شکل اختیاري

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{AX + BY}$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، او دلاندې تعویض په اساس یې حل کوو

$$Y = VX, \quad V = V(X) \quad X = VY, \quad V = V(Y)$$

$$\text{عملي مثالونه: } \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3} \quad \text{تفاضلي معادله حل کړئ}$$

حل: راکړل شوي معادله یوه متجانسه معادله نه ده ، خو نوموړی معادله په پورته حالتونو کې لومړي حالت رابښايي ، نوراکړل شوی معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 1}{2(x + 2y) + 3} \dots \dots \dots (1) \quad x + 2y = t \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره لومړی معادله لاندې شکل اختیاري

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{dx} - 1 \right) = \frac{t + 1}{2t + 3}, \quad \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t + 2}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t + 2}{2t + 3} + 1 = \frac{2t + 2 + 2t + 3}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{4t + 5}{2t + 3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2t + 3}{4t + 5} \right) dt = dx$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{2}(4t + 5) + \frac{1}{2}}{4t + 5} \right) dt = \int dx \quad \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{4t + 5} \right) dt = x + c$$

$$\frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{4} \ln(4t + 5) \right] = x + c$$

$$4t + \ln(4t + 5) = 8x + 8c$$

$$4(x + 2y) + \ln(4x + 8y + 5) = 8x + c_1$$

$$4(2y - x) + \ln(4x + 8y + 5) = c_1$$

کوم چې دراکړل شوی معادلې عمومي حل دی

دوهم مثال: $(x + 2y)(dx - dy) = dx + dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$(x + 2y - 1)dx = (x + 2y + 1) \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 1}{x + 2y + 1} \dots \dots \dots (1)$$

$$x + 2y = t \quad \Rightarrow \quad 1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right] = \frac{t - 1}{t + 1} \quad \text{یا} \quad \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t - 2}{t + 1}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t - 2}{t + 1} + 1 = \frac{2t - 2 + t + 1}{t + 1} = \frac{3t - 1}{t + 1}$$

اوس يې متحولین سره بیلوو

$$\left(\frac{t + 1}{3t - 1}\right) dt = dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3}\left[1 + \frac{4}{3t - 1}\right] dt = dx$$

اوس يې انټیگرال پیداوو

$$\frac{1}{3} \int \left(1 + \frac{4}{3t - 1}\right) dt = \int dx$$

$$\frac{1}{3} \left[t + 4 \cdot \frac{1}{3} \ln(3t - 1) \right] = x + c$$

$$\frac{1}{3} \left[x + 2y + \frac{4}{3} \ln(3x + 6y - 1) \right] = x + c$$

کوم چې دراکړل شوي معادلې عمومي حل دی

دریم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$ تفاضلی معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$ په شکل ده، نو دراکړل شوی معادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x = X + h, \quad y = Y + k \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره راکړل شوی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + (h + 2k - 3)}{2X + Y + (2h + k - 3)}$$

د $2h + k - 3 = 0$ او $h + 2k - 3 = 0$ معادلو دحل څخه $k = 1$ او $h = 1$ لاسته راځي

$$\therefore x = X + 1, \quad y = Y + 1 \quad \Rightarrow \quad X = x - 1, \quad Y = y - 1$$

اوس نوموړي معادله لاندې شکل اختیاروي، کومه چې یوه متجانسه معادله ده

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X + Y} \dots \dots \dots (1)$$

$$Y = VX \quad \text{نو} \quad \frac{dY}{dX} = V + X \frac{dV}{dX}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره لومړۍ معادله لاندې شکل اختیاروي

$$V + X \frac{dV}{dX} = \frac{X + 2VX}{2X + VX} \quad \Rightarrow \quad V + X \frac{dV}{dX} = \frac{1 + 2V}{2 + V}$$

$$X \frac{dV}{dX} = \frac{1 + 2V}{2 + V} - V = \frac{1 + 2V - 2V - V^2}{2 + V} = \frac{1 - V^2}{2 + V}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او دقسمي کسرونو دتجزیې په مرسته یې انٹیگرال پیداوو

$$\left(\frac{2 + V}{1 - V^2} \right) dV = \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{1 - V} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + V} \right) \right] dV = \frac{dX}{X}$$

$$\frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{1 - V} \right) dV + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + V} \right) dV = \int \frac{1}{X} dX$$

$$-\frac{3}{2} \ln(1 - V) + \frac{1}{2} \ln(1 + V) = \ln X + \ln c$$

$$-3 \ln(1 - V) + \ln(1 + V) = 2(\ln X + \ln c)$$

$$\ln \frac{1 + V}{(1 - V)^3} = 2 \ln X c$$

$$X^2 c^2 = \frac{1 + V}{(1 - V)^2} \quad c^2(X - Y)^3 = X + Y \quad \left(\because V = \frac{Y}{X} \right)$$

$$(x - y)^3 c^2 = x + y - 2$$

خلورم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$ تفاضلي معادله حل کری

حل: راکړل شوي معادله دوهم حالت ته ورته ده ، او دحل لپاره يې په لاندي ډول تعویض اجراوو

$$x = X + h, \quad y = Y + k \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره راکړل شوي معادله لاندي شکل اختیاري

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3Y - 7X + (3k - 7h + 7)}{3X - 7Y + (3h - 7k - 3)}$$

د $3k - 7h + 7 = 0$ او $3h - 7k - 3 = 0$ معادلو دحل څخه $h=1$ او $k=0$ څخه لاسته راځي، په نتیجه کې معادله لاندي شکل اختیاري، کومه چې یوه متجانسه تفاضلي معادله ده

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3Y - 7X}{3X - 7Y}$$

$$Y = VX \quad \Rightarrow \quad \frac{dY}{dX} = V + X \frac{dV}{dX}$$

$$V + X \frac{dV}{dX} = \frac{3VX - 7X}{3X - 7VX} = \frac{3V - 7}{3 - 7V}$$

$$X \frac{dV}{dX} = \frac{3V - 7}{3 - 7V} - V = \frac{3V - 7 - 3V + 7V^2}{3 - 7V}$$

$$X \frac{dV}{dX} = \frac{7(V^2 - 1)}{3 - 7V}$$

اوس يې متحولین سره بیلوو او دقسمي کسرونو دتجزیې په مرسته يې انتیگرال پیداوو

$$7 \frac{dX}{X} = \frac{3 - 7V}{(V - 1)(V + 1)} dV$$

$$7 \int \frac{1}{X} dX = - \int \left(\frac{2}{V - 1} + \frac{5}{V + 1} \right) dV$$

$$7 \ln X = -[2 \ln(V - 1) + 5 \ln(V + 1)] + \ln c$$

$$X^7 (V - 1)^2 (V + 1)^5 = c \quad \text{يا} \quad X^7 \left(\frac{Y}{X} - 1 \right)^2 \left(\frac{Y}{X} + 1 \right)^5 = c$$

$$(Y - X)^2 (Y + X)^5 = c \quad \text{يا} \quad (y - x + 1)^2 (y + x - 1)^2 = c$$

1.9 تمرينونه:

لاندي تفاضلي معادلي حل كرى

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 3}{2x - 2y + 5}$$

$$2. \quad (6x - 4y + 3)dx = (3x - 2y + 1)dy$$

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - x + 1}{y - x - 5}$$

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$$

$$5. \quad (2x - 4y + 3)dy + (x - 2y + 1)dx = 0 \quad 6. \quad (x - 2y + 5)dx - (2x + y - 1)dy = 0$$

$$7. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - x + 1}{y + x + 5}$$

$$8. \quad (2x + 3y - 5) \frac{dy}{dx} + (3x + 2y - 5) = 0$$

$$9. \quad (2x + y + 6)dx = (y - x - 3)dy$$

$$10. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + 2y - 3}$$

$$11. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}$$

$$12. \quad (2y - x - 1)dy - (2x - y + 1)dx = 0$$

جوابونه:

$$1. \quad (2y - x) = \ln(x - y + 2) + c \quad 2. \quad (2y - x) = \frac{1}{4} \ln(12x - 8y + 1) + c$$

$$3. \quad \frac{(y - x)^2}{2} - 5(y - x) = 6x + c$$

$$4. \quad x - y = \ln(3x - 4y + 1) + c$$

$$5. \quad \ln\{4(x - 2y) + 5\} = 4(x + 2y) + c \quad 6. \quad x^2 - y^2 - 4xy + 10x + 2y = c$$

$$7. \ln\{(x+2)^2 + (y+3)^2\}^{\frac{1}{2}} + \tan^{-1}\left\{\frac{y+3}{x+2}\right\} = c$$

$$8. \quad 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10x - 10y + 10 = c \quad 9. \quad y^2 - 2xy - 2x^2 - 6y - 12x - 18 = c$$

$$10. \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{X + \sqrt{2}Y}{X - \sqrt{2}Y}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2Y^2 - X^2}{X^2}\right) = X + c \quad X = x - \frac{1}{3}, \quad Y = y - \frac{4}{3}$$

$$11. \quad (y-x)^3 = c(x+y-2) \quad 12. \quad (3x-3y+2)(x+y)^3 = c$$

خطي تفاضلي معادلي (Linear Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلي چې (1) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ شکل ولري ، خطي تفاضلي معادلي ورته وايي ، چې P او Q د x تابع دي، يا هم ثابت عددونه دي ، y او y' مشتق بايد يو مثبت تام عدد وي ، چې ديو څخه به لوي هم نه وي ، او نه به yy' د حاصل ضرب په شکل وي.

د لومړۍ معادلي دحل لپاره ، د معادلي دواړه خواوې په $e^{\int P dx}$ فکتور کي ضربوو ، کوم چې لاندې شکل اختياروي

$$\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] e^{\int P dx} = Q(x)e^{\int P dx} \quad \text{يا} \quad \frac{d}{dx}[y e^{\int P dx}] = Q(x)e^{\int P dx}$$

اوس يې نظر x ته انټيگراډ نيسو

$$y e^{\int P dx} = \int Q(x) e^{\int P dx} dx + c$$

کوم چې غوښتل شوي حل دي

يادښت: $e^{\int P dx}$ فکتور ته دانټيگراډ فکتور ته د لومړۍ معادلي دانټيگراډ فکتور وايي ، همدارنگه ځيني وخت خطي تفاضلي معادله لاندې شکل اختياروي

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

چې په دې صورت کي دراگرل شوي معادلي دانټيگراډ فکتور عبارت د $e^{\int P dy}$ څخه دی ، او د معادلي حل په لاندې ډول دی

$$xe^{\int P dy} = \int Q(y)e^{\int P dy} dy + c$$

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^3$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ په شکل ده، چې $Q = x^3$ او $P = \frac{2}{x}$ څخه دي، دانتیګرال فکتور یې په لاندې ډول پیداوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

اوس دمعادلي عمومي حل د لاندې فورمول په اساس لاسته راوړو

$$y \times IF = \int Q \cdot IF dx + c$$

قیمتونه په فورمول کې وضعه کوو

$$y x^2 = \int x^3 \cdot x^2 dx + c \quad \text{یا} \quad y x^2 = \int x^5 dx + c$$

$$y x^2 = \frac{x^6}{6} + c \quad \text{یا} \quad y = \frac{x^4}{6} + \frac{c}{x^2}$$

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} + y \sec x = \tan x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: $P = \sec x$ ، $Q = \tan x$ سره دي، نو لومړی یې دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \sec x dx} = e^{\ln(\sec x + \tan x)} = (\sec x + \tan x)$$

پس دمعادلي عمومي حل په لاندې ډول دی

$$y(\sec x + \tan x) = \int \tan x (\sec x + \tan x) dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \int \sec x \tan x dx + \int (\sec^2 x - 1) dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c \quad \therefore y = 1 + \frac{c - x}{\sec x + \tan x}$$

دریم مثال: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x \ln x$ تفاضلي معادله حل کری

حل:

$$p = \frac{2}{x} \quad \text{او} \quad Q = x \ln x$$

دمعادلي دحل لپاره لومړی باید دانتيگرا ل فکتور پیدا کړو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

اوس دراکړل شوي معادلي دحل لپاره په لاندې ډول عمل اجرا کړو

$$y \cdot x^2 = \int x \ln x \cdot x^2 dx + c$$

پورته انتيگرا ل دانقسام په طريقه پیدا کړو

$$yx^2 = \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{16} + c \quad \text{يا} \quad y = \frac{x^2}{4} \ln x - \frac{x^2}{16} + \frac{c}{x^2}$$

څلورم مثال: $(1+x^2) \frac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1} x}$ تفاضلي معادله حل کری

حل: راکړل شوي معادله لومړی په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{(1+x^2)}y = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}, \quad P = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{او} \quad Q = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}$$

دراکړل شوي معادلي دحل لپاره لومړی دانتيگرا ل فکتور پیدا کړو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{1+x^2} dx} = e^{\tan^{-1} x}$$

اوس معادله په لاندې ډول پیدا کړو

$$ye^{\tan^{-1} x} = \int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} \cdot e^{\tan^{-1} x} dx + c = \int \frac{e^{2 \tan^{-1} x}}{1+x^2} dx + c$$

$$ye^{\tan^{-1} x} = I + c$$

په معادله کې موجود انتيگرا ل لومړی په تعويضي طريقه پیدا کړو ، او بيا يې په معادله کې د I په ځای وضعه کړو

$$I = \int \frac{e^{2 \tan^{-1} x}}{1+x^2} dx, \quad \tan^{-1} x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$$

$$I = \int e^{2t} dt = \frac{e^{2t}}{2} = \frac{e^{2 \tan^{-1} x}}{2}$$

نو دراکرل شوي معادلي حل په لاندې ډول دی

$$ye^{\tan^{-1} x} = \frac{e^{2 \tan^{-1} x}}{2} + c \quad y = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{2} + c e^{-\tan^{-1} x}$$

پنځم مثال: $\sin^2 x \frac{dy}{dx} - y = \cot x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکرل شوي معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sin^2 x} = \frac{\cot x}{\sin^2 x} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} - y \operatorname{cosec}^2 x = \cot x \operatorname{cosec}^2 x$$

$$P = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$Q = \cot x \operatorname{cosec}^2 x$$

اوس یې دانتيگراډ فکتور په لاندې ډول پیداوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{-\int \operatorname{cosec}^2 x dx} = e^{\cot x}$$

پس دمعادلي عمومي حل په لاندې ډول پیداوو

$$ye^{\cot x} = \int (\cot x \operatorname{cosec}^2 x) e^{\cot x} dx + c$$

$$ye^{\cot x} = I + c$$

د I قیمت لومړی په لاندې ډول لومړی دتعويزي طریقي او وروسته دانقسام طریقي څخه په گټه اخیستنې سره پیداوو

$$I = \int (\cot x \operatorname{cosec}^2 x) e^{\cot x} dx$$

$$\cot x = t$$

$$-\operatorname{cosec}^2 x dx = dt$$

$$I = - \int t e^t dt = - \left[t e^t - \int e^t \cdot 1 dt \right]$$

$$I = -[t e^t - e^t] = e^t - t e^t = e^t(1 - t)$$

په نتیجه کې لیکلای شو چې

$$y e^{\cot x} = e^{\cot x}(1 - \cot x) + c \quad \text{یا} \quad y = (1 - \cot x) + c e^{-\cot x}$$

شپږم مثال: $(x + \tan y) dy = \sin 2y dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \tan y}{\sin 2y} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin 2y} x = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

کومه چې د $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$ شکل لري، ددې څخه لیکلای شو چې:

$$P = -\frac{1}{\sin 2y} \quad \text{او} \quad Q = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

لومړی دانتيگراډ فکتور په لاندې ډول پیداوو

$$\begin{aligned} IF = e^{\int P dy} &= e^{-\int \frac{1}{\sin 2y} dy} = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy} = e^{-\frac{1}{2} \ln \tan y} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{\tan y}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tan y}} = \sqrt{\cot y} \end{aligned}$$

اوس دراکړل شوي معادلې عمومي دفورمول په نظر کې نیولوسره په لاندې ډول حل کوو

$$x \sqrt{\cot y} = \int \frac{\tan y}{\sin 2y} \sqrt{\cot y} dy + c = \int \frac{\sec^2 y}{2 \sqrt{\tan y}} dy + c$$

$$x \sqrt{\cot y} = \sqrt{\tan y} + c \quad x = \tan y + c \sqrt{\tan y}$$

اووم مثال: $(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1 + y^2} x = \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2} \quad \text{نو} \quad P = \frac{1}{1 + y^2} \quad \text{او} \quad Q = \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2}$$

اوس دراکړل شوي معادلې دحل لپاره دانتيگراډ فکتور په لاندې ډول پیداوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

پس دراکړل شوي معادلې عمومي حل په لاندې ډول پيدا کوو

$$xe^{\tan^{-1} y} = \int \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2} e^{\tan^{-1} y} dy + c$$

$$xe^{\tan^{-1} y} = \int t e^t dt + c \quad t = \tan^{-1} y$$

$$xe^{\tan^{-1} y} = (t - 1)e^t + c$$

$$xe^{\tan^{-1} y} = (\tan^{-1} y - 1)e^{\tan^{-1} y} + c$$

$$\therefore x = (\tan^{-1} y - 1) + ce^{\tan^{-1} y}$$

اتم مثال: $y \ln y dx + (x - \ln y) dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y \ln y} x = \frac{1}{y} \quad P = \frac{1}{y \ln y}, \quad Q = \frac{1}{y}$$

اوس دراکړل شوي معادلې دحل لپاره دانتيگرا ل فکتور په لاندې ډول پيدا کوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{y \ln y} dy} = e^{\ln \ln y} = \ln y$$

اوس راکړل شوي معادله په لاندې ډول حل کوو

$$x \ln y = \int \frac{1}{y} \cdot \ln y dy + c = \int t dt + c, \quad \ln y = t \Rightarrow \frac{1}{y} dy = dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + c$$

$$x \ln y = \frac{(\ln y)^2}{2} + c \quad \therefore x = \frac{\ln y}{2} + \frac{c}{\ln y}$$

نهم مثال: $\frac{dy}{dx} = x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله یوه معیاري خطي تفاضلي معادله نه ده، ددې لپاره چې معادله په معیاري شکل ولیکو، نومعادله په $\cos^2 y$ باندې ویشو

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3 \dots \dots \dots (1)$$

په لومړۍ معادل کې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$\tan y = t \quad \Rightarrow \quad \sec^2 y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

اوس لومړۍ معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dt}{dx} + 2x t = x^3 \quad \text{نو} \quad P = 2x \quad \text{او} \quad Q = x^3$$

اوس یې دانتيگراډل فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

دپورته قیمتونو په لرلوسره دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$\begin{aligned} te^{x^2} &= \int x^3 e^{x^2} dx + c \\ &= \int x \cdot x^2 e^{x^2} dx + c \quad x^2 = u; 2x dx = du; x dx = \frac{du}{2} \\ &= \int u e^u du + c \\ &= u e^u - \int e^u du + c \\ &= u e^u - e^u + c \end{aligned}$$

$$te^{x^2} = (u - 1)e^u + c \quad \Rightarrow \quad te^{x^2} = (x^2 - 1)e^{x^2} + c$$

$$\therefore t = (x^2 - 1) + ce^{-x^2} \quad t = \tan y$$

$$\tan y = (x^2 - 1) + ce^{-x^2}$$

یادښت: پورته مثال $f'(y) \frac{dy}{dx} + f(y)P(x) = Q(x)$ شکل لري، ددایول معادلو دحل لپاره
وضع کوو $f(y) = t$

لسم مثال: $x \frac{dy}{dx} - y = x^3 \cos x$, $y(\pi) = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 \cos x, \quad P = -\frac{1}{x} \quad \text{او} \quad Q = x^2 \cos x$$

اوس دراکړل شوي معادلې دحل لپاره دانتيگرا ل فکتور په لاندې ډول پیدا کوو

$$IF = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

اوس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیدا کوو

$$y \frac{1}{x} = \int x^2 \cos x \cdot \frac{1}{x} dx + c$$

$$\frac{y}{x} = \int x \cdot \cos x dx + c$$

$$\frac{y}{x} = x \sin x - \int \sin x \cdot 1 dx + c$$

$$\frac{y}{x} = x \sin x + \cos x + c$$

$$y = x^2 \sin x + x \cos x + cx \quad x = \pi, \quad y = 0$$

$$0 = \pi^2 \sin \pi + \pi \cos \pi + c\pi$$

$$0 = -\pi + c\pi, \quad c\pi = \pi \Rightarrow c = 1$$

پس دمعادلې خصوصي حل په لاندې ډول دی

$$y = x^2 \sin x + x \cos x + x$$

تمرینونه:

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $x(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = y(1 - x^2) + x^2 \ln x$
 2. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = \sin x$
 3. $x \cos x \frac{dy}{dx} + y(x \sin x + \cos x) = 1$
 4. $(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = x \sqrt{1 - x^2}$
 5. $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$
 6. $(x + 1) \frac{dy}{dx} - y = e^x(1 + x)^2$
 7. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin 2x$
 8. $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-x} \cos x$
 9. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y \cos x}{1 + \sin x}$
 10. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x$
 11. $\frac{dy}{dx} - 2y \tan x = \sec^4 x$
 12. $(x + y + 1) \frac{dy}{dx} = 1$
 13. $\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{1 + x} = (1 + x) e^x \sec y$
 14. $(x + 2y^2) \frac{dy}{dx} = y$
 15. $y^2 + \left(x - \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = 0$ *(Hint reduce in form $\frac{dx}{dy} + P_1x = Q_1$)*
 16. $(x + 1) \frac{dy}{dx} + (1 + x)y = 2 \sin x$ $y(0) = 2$
 17. $x \frac{dy}{dx} + y = x \cos x + \sin x$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
 18. $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2 + 1}y = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ $y(0) = 0$
-
1. $\frac{[y(x^2 + 1)]}{x} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$
 2. $y \sin x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$
 3. $y x \sec x = \tan x + c$
 4. $\frac{y}{(1 - x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + c$
 5. $y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$
 6. $y = (x + 1)(e^x + c)$
 7. $y \sec x = c - 2 \cos x$
 8. $y = ce^{-3x} + e^{-x} \left(\frac{\sin x + 2 \cos x}{5} \right)$

$$\begin{array}{ll}
 9. \quad y(1 + \sin x) + \frac{x^2}{2} = c & 10. \quad y = (2x^2 + c)\operatorname{cosec} x \\
 11. \quad y \cos^2 x = c + \tan x & 12. \quad x = ce^y - (y + 2) \\
 13. \quad \sin y = (1 + x)(c + e^x) & 14. \quad \frac{x}{y} = y^2 + c \\
 15. \quad x = ce^{\frac{1}{y}} + \frac{1}{y} + 1 & 16. \quad y = \frac{\sin x - \cos x}{1 + x} + \frac{3e^{-x}}{1 + x} \\
 17. \quad y = \sin x & 18. \quad y = \frac{\tan^{-1} x}{x^2 + 1}
 \end{array}$$

1.13 برنولي معادله (Bernoulli's Equation)

خيني لومري ترتيب تفاضلي معادلي دي چي خطي شكل نه لري ، خو دمتحولينو په مناسب تعويض سره کولای شو چي نوموړي معادلي په خطي تفاضلي معادلو باندې تبديلي کړو، يو شکل ددوي څخه دبرنولي معادله هم ده ، کوم چي دسويس رياضي پوه jacob Bernoulli (1654-1705) په واسطه منځ ته راغلي دي، دبرنولي دمعادلي عمومي شکل په لاندې ډول دی

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \dots \dots \dots (1), \quad (n \neq 0, \quad n \neq 1)$$

چي P او Q د x تابع دي او يا هم امکان لري چي ثابت عددونه وي، لومړی معادله کولای شو چي دخطي معادلي په شکل وليکو ، ددي کار لپاره لومړی معادله y^n باندې ويشو، نو لاندې معادله لاسته راگوي

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P y^{1-n} = Q \dots \dots \dots (2)$$

اوس په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$y^{1-n} = v \Rightarrow (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

دپورته قيمتونو په وضعه کولو سره دوهمه معادله لاندې شکل اختياروي

$$\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} + P v = Q \quad \text{يا} \quad \frac{dv}{dx} + P(1-n)v = Q(1-n) \dots \dots \dots (3)$$

دریمه معادله یوه خطي تفاضلي معادله ده ، چې کولای شو نوموړې معادله دانتیگرال دفکتور په پیداکولو سره حل کړو.

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = y^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله برنولي معادله ده ، لومړی راکړل شوي معادله په y^2 باندې ویشو

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} - \frac{y^{-1}}{x} = 1 \quad \text{یا} \quad y^{-2} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y^{-1} = 1$$

اوس دپورته معادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1} = v \quad \Rightarrow \quad -y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره معادله په لاندې خطي تفاضلي معادلې باندې بدلیري

$$-\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = -1$$

اوس یې دانتیگرال فکتورپه لاندې ډول پیداکوو

$$P = \frac{1}{x}, \quad Q = -1 \quad \text{نو} \quad IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

پس دراکړل شوي معادلې عمومي حل په لاندې ډول دي

$$v x = \int -1 x dx + c \quad \text{یا} \quad v x = -\frac{x^2}{2} + c \quad \text{یا} \quad y^{-1} x = -\frac{x^2}{2} + c$$

دوهم مثال: $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{1}{x} \ln x \dots \dots \dots (1)$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1} = v \quad \Rightarrow \quad -y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونوپه وضعه کولوسره معادله په لاندې خطي تفاضلي معادله باندې بدلیري

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = \frac{1}{x} \ln x \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -\frac{1}{x} \ln x$$

اوس یې دانتيگرا ل فکتور پیدا کوو

$$P = -\frac{1}{x}, \quad Q = -\frac{1}{x} \ln x \quad IF = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

پس دمعادلي عمومي حل په لاندې ډول دی

$$v \cdot \frac{1}{x} = \int -\frac{1}{x} \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + c \quad \text{یا} \quad v x^{-1} = -\int x^{-2} \ln x + c$$

$$v x^{-1} = -\left[\ln x \frac{x^{-1}}{-1} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx \right] + c = -\left[-\frac{\ln x}{x} + \frac{x^{-1}}{-1} \right] + c$$

$$y x^{-1} = \ln x \cdot x^{-1} + x^{-1} + c \quad y^{-1} = \ln x + 1 + cx$$

دریم مثال: $\frac{dy}{dx} - 2y \tan x = y^2 \tan^2 x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: معادله په y^2 باندې ویشو

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} - 2y^{-1} \tan x = \tan^2 x$$

اوس دمعادلي دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجرا کوو

$$y^{-1} = v \Rightarrow -y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \quad \therefore -\frac{dv}{dx} - 2v \tan x = \tan^2 x$$

$$\frac{dv}{dx} + 2v \tan x = -\tan^2 x, \quad P = 2 \tan x \quad Q = -\tan^2 x$$

دانتيگرا ل فکتور په لاندې ډول پیدا کوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int 2 \tan x dx} = e^{2 \ln \sec x} = e^{\ln \sec^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore v \cdot \sec^2 x = -\int \tan^2 x \sec^2 x dx + c$$

$$v \cdot \sec^2 x = -\frac{\tan^3 x}{3} + c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{y} \sec^2 x = -\frac{\tan^3 x}{3} + c$$

خلورم مثال: $y(2xy + e^x)dx - xe^x dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوي معادله برنولي معادلي په شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{2}{e^x} y^2$$

پورته معادله برنولي معادله ده ، ددې لپاره چې دخطي معادلي په شکل یې ولیکو ، نو راکړل شوي معادله به y^2 باندې ویشو

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} - \frac{y^{-1}}{x} = \frac{2}{e^x} \quad \text{پس } y^{-1} = v \quad \Rightarrow \quad -y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = \frac{2}{e^x} \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = -\frac{2}{e^x}, \quad P = \frac{1}{x} \quad Q = -\frac{2}{e^x}$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

پس دمعادلي عمومي حل عبارت دې له

$$v x = - \int 2 e^{-x} x dx + c = -2 \left[-x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right] + c$$

$$= -2[-x e^{-x} - e^{-x}] + c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{y} x = 2e^{-x}(x + 1) + c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx} + y \cos x = y^n \sin 2x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله دبرنولي معادلي په شکل ده ، لومړی راکړل شوي معادله په y^n باندې ویشو

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + y^{1-n} \cos x = \sin 2x \dots \dots \dots (1)$$

$$y^{1-n} = v \quad \Rightarrow \quad (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولوسره لومړی معادله په لاندې خطي معادلي باندې بدلیږي

$$\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} + v \cos x = \sin 2x \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} + (1-n) \cos x \cdot v = (1-n) \sin 2x$$

$$P = (1-n) \cos x, \quad Q = (1-n) \sin 2x$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int (1-n) \cos x dx} = e^{(1-n) \sin x}$$

پس دمعادلي عمومي حل په لاندې ډول پيدا کوو

$$v e^{(1-n) \sin x} = \int (1-n) \sin 2x e^{(1-n) \sin x} dx + c$$

$$(1-n) \sin x = t \quad \Rightarrow \quad \cos x dx = \frac{1}{n-1} dt$$

$$v e^{(1-n) \sin x} = \int (1-n) 2 \sin x \cos x e^{(1-n) \sin x} dx + c$$

$$= \frac{2}{n-1} \int t e^t dt + c$$

$$= \frac{2}{n-1} \left[t e^t - \int 1 \cdot e^t dt \right] + c$$

$$= \frac{2}{n-1} [t e^t - e^t] + c = \frac{2}{n-1} [(t-1)e^t]$$

$$y^{(1-n)} e^{(1-n) \sin x} = \frac{2}{n-1} [(1-n) \sin x - 1] e^{(1-n) \sin x} + c$$

$$y^{1-n} = \left\{ \frac{2}{n-1} \right\} [(1-n) \sin x - 1] + c e^{-(1-n) \sin x}$$

شپږم مثال: $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} \ln z = \frac{z}{x^2} (\ln z)^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله په z باندې ویشو، نو لاندې نتیجه لاسته راځوي

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x} \ln z = \frac{1}{x^2} (\ln z)^2 \quad y = \ln z \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

پورته معادله دبرنولي معادلي شکل دی، ددې لپاره چې په خطي شکل یې بدله کړو، نو معادله په y^2 باندې ویشو

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{1}{x^2} \quad y^{-1} = v \quad \Rightarrow \quad -y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = \frac{1}{x^2} \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v = -\frac{1}{x^2} \quad P = -\frac{1}{x}, \quad Q = -\frac{1}{x^2}$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

اوس یی عمومی حل پہ لاندی پول پیدا کو

$$v \cdot \frac{1}{x} = \int -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + c$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x^2} + cx \quad y = \ln z$$

$$\therefore \frac{1}{\ln z} = \frac{1}{2x} + cx$$

1.14 تمرینونه:

لاندی تفاضلی معادلات حل کریں

1. $\frac{dy}{dx} - xy = x^3 y^2$ Ans: $\frac{1}{y^2} = 1 - x^2 + ce^{x^2}$
2. $2 \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$ Ans: $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{c}{\sqrt{x}}$
3. $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2}$ Ans: $-\frac{1}{y^2} e^{x^2} = c - 2x$
4. $\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3$ Ans: $\tan y e^{x^2} = c + \frac{1}{2} e^{x^2} (\tan y - 1)$ put $\tan y = v$
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 x$ Ans: $1 + x^2 y + cxy = 0$
6. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^3 \sec x$ Ans: $\cos^2 x = y^2 (2 \sin x + c)$
7. $x^3 \frac{dy}{dx} + y^4 \cos x = x^2 y$ Ans: $x^3 = (c + 3 \sin x) y^3$
8. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = y^2 \sin^2 x \cos^2 x$ Ans: $\frac{1}{y} = \frac{1}{3} \sin x \cos^3 x + c \sin x$
9. $\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$ Ans: $\tan y = \frac{1}{2} (x^2 - 1) + ce^{-x^2}$
10. $\frac{dy}{dx} (x^2 y^3 + xy) = 1$ Ans: $\frac{1}{x} = 2 - y^2 + ce^{-\frac{y^2}{2}}$

کاملي تفاضلي معادلي (Exact Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلي چي (1) $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ شکل ولري ، کاملي تفاضلي معادلي ورته وايي ، که چيرته د لومړي معادلي چپ طرف ديوي تابع لکه $f(x, y)$ کامل ديفرنسيال وي ، يعني $M(x, y) dx + N(x, y) dy = df$ ، يابه ساده ډول باندې لومړي معادلي ته کامله تفاضلي معادله وايي که چيرته $u(x, y)$ په لاندې ډول موجود وي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{او} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

د مثال په ډول $x dy + y dx = 0$ تفاضلي معادله په نظر کې نيسو ، نوموړي معادله کولای شو چي د $d(xy) = 0$ په شکل وليکو ، کوم چي مونږ ته $df = 0$ شکل رابښايي ، چي f د x او y تابع ده ، دانتيگرا ل نيوني څخه وروسته $xy = c$ لاسته راځي ، کوم چي درا کرل شوي معادلي عمومي حل دي ، داډول معادلوته کاملي تفاضلي معادلي وايي.

قضيه: د لومړي معادلي دکامل والي لپاره لازمي اوکافي شرط عبارت له $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ څخه دی.

(i) دلزامي شرط لپاره ثبوت:

فرض کړئ چي لومړي معادله کامله ده ، مونږ بايد وښايو چي $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ، څرنگه چي لومړي معادله کامله ده ، نو د تعريف په اساس د $f(x, y)$ يوه تابع موجوده ده دکوم لپاره چي مونږ لاندې معادله لرو

$$df = M(x, y) dx + N(x, y) dy \dots \dots \dots (2)$$

د تيرو رياضياتوپه اساس لرو چي

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \dots \dots \dots (3)$$

د دوهمي او دريمي معادلو دمقايسې په اساس لرو چي

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial f}{\partial y} \dots \dots \dots (4) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

څرنگه چي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

کوم چي لازمي شرط رابښايي.

(ii) دکافي شرط لپاره ثبوت:

فرض کړئ چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ، مونږ باید د $f(x, y)$ یوه تابع پیدا کړو ، دکوم لپاره چې لاندې معادله صدق وکړي

$$df = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad \text{یعني} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{او} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

مونږ باید د $f(x, y)$ تابع دابول لاسته راوړو ، دکوم لپاره چې څلورمه معادله کې لومړۍ حالت صدق وکړي، دنوموړۍ معادلي نظر x ته مشتق اخلو او y ثابت نیسو ، نو مونږ لاندې معادله لاسته راوړو

$$f = \int M(x, y) dx + \phi(y) \dots \dots \dots (5)$$

چې $\phi(y)$ یوه اختیاري تابع د y ده ، اوس $\phi(y)$ دابول انتخابوو چې په څلورمه معادله کې دوهم حالت لپاره هم صدق وکړي ، یعني (6) $\dots \dots \dots \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ ، اوس د $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ په نظر کې نیولو سره $\phi(y)$ هروخت امکان لري.

د (5) څخه لیکلای شو چې

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y) dx \right] + \phi'(y) \dots \dots \dots (7)$$

د (6) او (7) دمقایسي په اساس لیکلای شو چې

$$\phi'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \dots \dots \dots (8)$$

د (8) چپ طرف د x څخه مستقل دی

راځئ چې اوس د (4) حالت لاندې وښایو، x د (8) ښي طرف ته دننه کیدای نه شي ، ددی لپاره مونږ باید وښایو چې د (8) ښي طرف قسمي مشتق صفر دی.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int M dx \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int M dx = M(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

ځکه $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ اوس د (8) مشتق نظر y اخلو، نو ترلاسه کوو چې

$$\phi(y) = \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] dy + c \dots \dots \dots (9)$$

چې c یو اختیاري ثابت عدد دی ، اوس که (9) په (5) کې وضعه کړو ، نو غوښتل شوي تابع لاسته راځوي

$$f(x, y) = \int M dx + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] dy + c$$

دکومې چې کامل ډیفرنسیال عبارت له $M dx + N dy$ څخه دی
دکاملو تفاضلي معادلو دحل طریقه:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ چې وښایو چې لومړی باید وښایو چې}$$

1. د $M(x, y)$ انٹیگرال نظر x ته پیداوو او y ثابت په نظر کې نیسو، لاسته راغلي انٹیگرال په I_1 سره ښایو.

2. په $N(x, y)$ کې هغه حدونه چې x ونلري ، نظر y ته انٹیگرال نیسو او دغه انٹیگرال په I_2 سره ښایو.

3. $I_1 + I_2 = c$ دراکړل شوي معادلې عمومي حل دی

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(2xy + 3y) dx + (x^2 + 3x) dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ
حل:

$$M = 2xy + 3y \quad \text{او} \quad N = x^2 + 3x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 3 \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معادله ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداوو

$$\int (2xy + 3y) dx + \int (0) dy = c$$

$$2y \frac{x^2}{2} + 3y x = c \quad \text{یا} \quad x^2 y + 3xy = c$$

پورته معادله کولای شو په لاندې ډول حل کړو، چې لومړی دمعادلې چپ طرف دیو کامل ډیفرنسیال په شکل لیکو

$$(2xy \, dx + x^2 \, dy) + 3(x \, dy + y \, dx) = 0 \quad \text{یا} \quad d(x^2y) + 3d(xy) = 0$$

دانتیگرال څخه وروسته دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاس راځي

$$x^2y + xy = c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + (2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4)dy = 0$$

حل: پوهیږو چې

$$M = 5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3 \quad \text{او} \quad N = 2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2y - 6xy^2 \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y - 6xy^2$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + \int (-5y^4)dy = c$$

$$x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^5 = c$$

درېم مثال: $(e^y + 1) \cos x \, dx + e^y \sin x \, dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لیدل کېږي چې

$$M = (e^y + 1) \cos x \quad \text{او} \quad N = e^y \sin x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \cos x \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \cos x$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (e^y + 1) \cos x \, dx + \int (0) \, dy = c \quad \Rightarrow \quad (e^y + 1) \sin x = c$$

خلورم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$\left[y \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \cos y \right] dx + [x + \ln x - x \sin y] dy = 0$$

حل: پوهیږو چې

$$M = y \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \cos y \quad \text{او} \quad N = x + \ln x - x \sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \sin y \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \sin y$$

څرنگه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int \left[y \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \cos y \right] dx + \int (0) \, dy = c$$

$$yx + y \ln x + x \cos y = c$$

پنځم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(2x \ln y) \, dx + \left(\frac{x^2}{y} + 3y^2 \right) \, dy = 0$$

حل: لیدل کیږي چې

$$M = 2x \ln y \quad \text{او} \quad N = \frac{x^2}{y} + 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x}{y} \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2x}{y}$$

څرنگه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (2x \ln y) dx + \int 3y^2 dy = c \quad \Rightarrow \quad x^2 \ln y + y^3 = c$$

شپږم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

حل: لیدل کیږي چې

$$M = \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) \quad N = e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y}\right) + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} = \left(-\frac{x}{y^2}\right) e^{\frac{x}{y}}$$

څرنگه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \int (0) dy = c$$

$$x + \frac{e^{\frac{x}{y}}}{\frac{1}{y}} = c \quad \text{یا} \quad x + y e^{\frac{x}{y}} = c$$

1.16 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $3x(xy - 2)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$
2. $y \sin 2x dx - (1 + y^2 + \cos^2 x)dy = 0$
3. $(x^2 - 2xy + 3y^2)dx + (y^2 + 6xy - x^2)dy$
4. $(y^2 - x^2)dx + 2xy dy = 0$
5. $\left(1 + 3e^{\frac{x}{y}}\right)dx + 3e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$
6. $(y \sec^2 x + \sec x \tan x)dx + (\tan x + 2y)dy = 0$

7. $(e^y + 1) \cos x \, dx + e^y \sin x \, dy = 0$
8. $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 y}\right) dx - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2 y}\right) dy = 0$
9. $\left(x + \frac{y^3}{x^2}\right) dx - 3y^2 dy = 0$
10. $(\cos x - 3x^2 \tan y) dx - x^3 \sec^2 y \, dy = 0$
11. $(ax + hy + g) dx + (hx + by + f) dy = 0$
12. $\left[\cos x \log_e(2y - 8) + \frac{1}{x}\right] dx + \frac{\sin x}{y - 4} dy = 0 \quad y(1) = \frac{9}{2}$

جوابونه:

1. $x^3 y - 3x^2 + y^2 = c$
2. $3y \cos 2x + 6y + 2y^3 = c$
3. $x^3 - 3x^2 y + 9xy^2 + y^3 = c$
4. $\frac{x^3}{3} - xy^2 = c$
5. $x + 3ye^{\frac{x}{y}} = c$
6. $y \tan x + \sec x + y^2 = c$
7. $(e^y + 1) \sin x = c$
8. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{xy} = c$
9. $x^3 - 2y^3 = cx$
10. $3y \cos 2x + (6y + 2y^3) = c$
11. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$
12. $\sin x \ln(2y - 8) + \ln x = 0$

1.17 هغه تفاضلي معادلي چي په كاملو تفاضلو معادلوباندې بدليري

په دې برخه کې ځينې معادلي تربيحت لاندې نيسو ، کومې چې $Mdx + Ndy = 0$ شکل ولري خو کاملې نه وي، ولې ديوې مناسبې تابع دضربولو څخه وروسته په کاملوتفاضلي معادلوباندې بدليري ، چې دغه مناسبې تابع ته دانتيگرا ل فکتور يا داتمام عامل وايي ، دانتيگرا ل فکتور دپيدا کولو لپاره لاندې قوانين بغير دثبوت څخه ترڅيرني لاندې نيسو.

لومړی قانون: که چيرته راکرل شوی تفاضلي معادله يوه متجانسه تفاضلي معادله وي او همدارنگه

$Mx + Ny \neq 0$ ، نو $\frac{1}{Mx+Ny}$ عبارت دانتيگرا ل فکتور څخه دی.

لومړی مثال: $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده، نو لومړی یې دانتيگراډ فکتور پیداوو

$$IF = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{(x^4 + y^4)x + (-xy^3)y} = \frac{1}{x^5}$$

اوس راکړل شوي معادله په $\frac{1}{x^5}$ کې ضربوو

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right)dx - \frac{y^3}{x^4}dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right)dx + \int (0)dy = c \quad \Rightarrow \quad \ln x - \frac{y^4}{4x^4} = c$$

دوهم مثال: $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده، نو دانتيگراډ فکتور یې په لاندې ډول پیداوو

$$IF = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{y^2x + (x^2 - xy - y^2)y} = \frac{1}{y(x^2 - y^2)}$$

اوس راکړل شوي معادله په لاسته راغلي انتيگراډ فکتور کې ضربوو، نو معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{y}{x^2 - y^2}dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int \frac{y}{x^2 - y^2}dx + \int \frac{1}{y}dy = c$$

$$y \cdot \frac{1}{2y} \ln \frac{x-y}{x+y} + \ln y = c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} \ln \frac{x-y}{x+y} + \ln y = c$$

دوهم قانون: که چیرته $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ یواځې د x تابع وي، د $f(x)$ په شکل یې فرض کوو، نو $e^{\int f(x)dx}$ عبارت دانتیگرال فکتور څخه دی.

لومړی مثال: $2y dx + (2x \ln x - xy)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ
حل:

$$M = 2y \quad N = 2x \ln x - xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \right) - y = 2(1 + \ln x) - y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2 - 2 - 2 \ln x + y}{2x \ln x - xy} = \frac{-2 \ln x + y}{x(2 \ln x - y)} = -\frac{1}{x} = f(x)$$

$$\therefore IF = e^{\int f(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

اوس راکړل شوي معادله په $\frac{1}{x}$ کې ضربوو، نو ترلاسه کوو

$$\frac{2y}{x} dx + \frac{2x \ln x - xy}{x} dy = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{2y}{x} dx + (2 \ln x - y) dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int \frac{2y}{x} dx + \int (-y) dy = c \quad \Rightarrow \quad 2y \ln x - \frac{y^2}{2} = c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(6x^2 + 4y^3 + 12y) dx + 3x(1 + y^2) dy = 0$$

حل:

$$M = 6x^2 + 4y^3 + 12y \quad N = 3x + 3xy^2$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{12y^2 + 12 - 3 - 3y^2}{3x(1 + y^2)} = \frac{12(y^2 + 1) - 3(1 + y^2)}{3x(1 + y^2)} = \frac{3}{x} = f(x)$$

$$\therefore IF = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

راکړل شوي معادله په x^3 کې ضربوو

$$(6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y) dx + 3x^4(1 + y^2) dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده ، نو په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int (6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y) dx + \int (0) dy = c$$

$$x^6 + x^4y^3 + 3yx^4 = c$$

دریم قانون: که چېرته $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ د y تابع وي ، او د $f(y)$ په شکل یې وښایو نو $e^{\int f(y)dy}$ دانتیگرال فکتور دی.

لومړی مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$$

حل:

$$M = y^4 + 2y \quad N = xy^3 + 2y^4 - 4x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 + 2 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y^3 - 4$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{(y^3 - 4) - (4y^3 + 2)}{(y^4 + 2y)} = \frac{-3(y^3 + 2)}{y(y^3 + 2)} = \frac{-3}{y} = f(y)$$

اوس یې دانتیگرال فکتور په لاندې ډول پیداوو

$$IF = e^{\int f(y)dy} = e^{-\int \frac{3}{y}dy} = e^{-3 \ln y} = e^{-\ln y^3} = \frac{1}{y^3}$$

اوس راکړل شوي معادله په $\frac{1}{y^3}$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$\left(y + \frac{2}{y^2}\right) dx + \left(x + 2y - \frac{4x}{y^3}\right) dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده ، نو عمومي حل یې په لاندې ډول دی

$$\int \left(y + \frac{2}{y^2} \right) dx + \int 2y dy = c$$

$$xy + \frac{2x}{y^2} + y^2 = c \quad \text{يا} \quad x \left(y + \frac{2}{y^2} \right) y + y^2 = c$$

څلورم قانون: که چېرته راکړل شوي معادله د $f_1(x, y)y dx + f_2(x, y)x dy = 0$ شکل ولري، چې $M = f_1(x, y)y$ او $N = f_2(x, y)x$ وي او $Mx - Ny \neq 0$ نو په دې صورت کې عبارت دانتيگرا ل فکتور څخه دی. $\frac{1}{Mx - Ny}$

مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$y(1 + 2xy) dx + x(1 - xy) dy = 0$$

حل:

$$M = yf_1(x, y) \quad N = xf_2(x, y)$$

$$M = y(1 + 2xy) \quad N = x(1 - xy)$$

$$Mx - Ny = xy(1 + 2xy) - xy(1 - xy) = xy + 2x^2y^2 - xy + x^2y^2$$

$$Mx - Ny = 3x^2y^2 \neq 0$$

پس دراکړل شوي معادلې دانتيگرا ل فکتور عبارت دی له

$$IF = \frac{1}{Mx - Ny} = \frac{1}{3x^2y^2}$$

راکړل شوي معادله په $\frac{1}{3x^2y^2}$ کې ضربوو، نو ترلاسه کوو چې

$$\left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x} \right) dx + \left(\frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y} \right) dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده او عمومي حل یې په لاندې ډول دی

$$\int \left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x} \right) dx + \int -\frac{1}{3y} dy = c$$

$$-\frac{1}{3xy} + \frac{2}{3} \ln x - \frac{1}{3} \ln y = c \quad \text{يا} \quad -\frac{1}{xy} + 2 \ln x - \ln y = k \quad (k = 3c)$$

پنجم قانون : که چپرته معادله د $x^a y^b (my dx + nx dy) + x^c y^d (py dx + qx dy) = 0$ چي a, b, c, d, m, n, p, q ثابت عددونه دي شکل ولري، نو دراکړل شوي معادلي دانتيگرا ل فکتور عبارت د $x^h y^k$ څخه دی ، د h او k دلاسته راوړلو لپاره لومړی راکړل شوي معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو ، ترڅو معادله په کامله تفاضلي معادله باندې بدله شي ، بیا یې د کامل والي د شرط څخه په استفادې سره ، دضریبونو دمقایسي څخه د h او k قیمتونه لاسته راوړو، دغه موضوع په لاندې مثال کې واضح کوو

مثال: $(y^2 + 2x^2 y)dx + (2x^3 - xy) dy = 0$ معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$y(y dx - x dy) + x^2(2y dx + 2x dy) = 0$$

اوس راکړل شوي معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$(x^h y^{k+2} + 2x^{h+2} y^{k+1})dx + (2x^{h+2} y^k - x^{h+1} y^{k+1})dy = 0 \quad (1) \dots \dots \dots$$

پورته معادله باید یوه کامله تفاضلي معادله وي

$$M = x^h y^{k+2} + 2x^{h+2} y^{k+1} \quad , \quad N = 2x^{h+2} y^k - x^{h+1} y^{k+1}$$

څرنګه چي لومړی معادله کامله ده ، نو لروچي

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(k+2)x^h y^{k+1} + 2(k+1)x^{h+2} y^k = 2(h+3)x^{h+2} y^k - (h+1)x^h y^{k+1}$$

دپورته عینیت دضریبونو د مساوات څخه لرو چي

$$k+2 = -(h+1) \quad \text{او} \quad 2(k+1) = 2(h+3)$$

$$h+k = -3 \quad \text{او} \quad h-k = -2$$

دپورته سیستم دحل څخه د h او k قیمتونه عبارت دي له

$$h = -\frac{5}{2} \quad k = -\frac{1}{2} \quad \therefore IF = x^{-\frac{5}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

اوس راکړل شوي معادله په $x^{-\frac{5}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$ کې ضربوو

$$\left(x^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\right)dx + \left(2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)dy = 0$$

پورته معادله يوه متجانسه معادله ده ، او عمومي حل يې په لاندې ډول دی

$$y^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\right) + 2y^{\frac{1}{2}}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) = c \quad \text{يا} \quad 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = c$$

1.18

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $(x^2 - 3xy + 2y^2) dx + x(3x - 2y) dy = 0$
2. $(x^2y - 2xy^2) dx + 2y dy = 0$
3. $(xy - y^2) dx - x^2 dy = 0$
4. $(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2y dy = 0$
5. $(3xy - 2ay^2) dx + (x^2 - 2ayx) dy = 0$
6. $(x^3 - 2y^2) dx + 2y dy = 0$
7. $(xy^2 - x^2) dx + (3x^2y^2 + x^2y - 2x^3 + y^2) dy = 0$
8. $(y^4 + 2y) dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x) dy = 0$
9. $(xy^2 + y) dx + 2(x^2y^2 + x + y^4) dy = 0$
10. $(xy \sin xy + \cos xy)y dx + (xy \sin xy - \cos xy)x dy = 0$
11. $(x^2y^2 + xy + 1) y dx + (x^2y^2 - xy + 1)x dy = 0$
12. $(2y dx + 3x dy) + 2xy(3ydx + 4xdy) = 0$

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library