شمیرپوهنه (ریاضي)

د لسم ټولګي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

لیکونکی:

ډاکترماخان میرې شینواری

2016

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:

ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

Smakhan1946@gmail.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

سریزه...................................... ۴
پولینومشمیرنه ۶
د ګاوس الګوریتم.............. ۲۹
هورنرشیما.......................... ۴۶
اړیکې.............................. ۵۵
فنکشن(ځیرونه) یا تابع ۶۵
فنکشن او په ښتفنکشن ۹۱
څلوری‌یا مربع توابع ۹۳
نورمال پارابل ۹۶
د څلوری‌تکمیل له.............. ۱۰۱
کرښیزبرابرونسیستم ۱۱۵
د مناسبځواب له پاره تلنلار.... ۱۲۳
مساواتسیستم بې له ۱۲۹
توان یا پوتنځ توابع ۱۳۳
کرښیزتوابع د ورکړ شوو ۱۳۸
مومړی حالت ۱۳۸
د کرښبرابرونونو ځانګړی ۱۴۲
n- مه درجه ټولراشنل توابع ۱۶۵
د ټولراشنل توابعوغوښتکي ۱۷۵
د بدلونقانونه ۱۷۸
شننیزه – یا تحلیی هندسه ۱۸۳
فنکشنونه (بل بدیل)............ ۲۰۲
دریکوډیکچ ۱۳۷
ګډوله – یا کمپلکسګڼونه ۲۷۹
د لیکونکیلیکلیاوژباړې..... ۳۱۵
د لیکوکیژنود ته لنډه کتنه...... ۳۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

دا ځلوېښت کاله کیږي، چې زموږ هیواد هراړخیزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هیوادوالو!

د نورو نیمګرتیاو په څیر زموږ درسي نصاب - په تیره شمیرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په ځلوردیوالي ونه شو، نو زه به وهڅیږم، چې دا ما لیکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شریک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستااتیستیک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تیریږم او د ښوونځي د تیرو کتابونو څخه هم هیله ده- که زما کتابونه وړاندي نه شو- چې دابرخي یا سمې یا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړئ، چې نه لیکونکی بوهیږي او نه بل لوستونکی پرې پوهیدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پیدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتیستیک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شمیرنه راوړي او د ستاتیستیک یو ګتاب مې هم ژباړلي، چې زه به یې په مناسبوخت کې د لیدلو پتې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځنې کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شمیرپوهني سم اند یا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتیستیک او ... د پوهیدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې برېښي- دومره پیچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هیله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبي(د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دی، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیګرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره ګټوره او زه چې پوهیږم، یواځنۍ سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دګرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولي، چې باید سمې وي.

زه به وهڅیږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړی زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼئ.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړی مغذ مې ترې نورموړ دی، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینومشمیرنه

پویلینوم څه شی دی؟

یو پولینوم د اووښتوني یا واریابلي –چي موږيي د x سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زیاتون دی: د توان ځګګنونه پیداښتي یا طبیعي ګڼونه دي. زیاتون له دې برسیره پای دی.

بیلګه: $a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

همداسي

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

یا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

دلته n یو پیداښتي ګڼ اوپای دی او a_i ریلګنونه دي د ټولو $i=0,1,\ldots n$ له پاره.

پیژند: د پولینمچګګڼ n د پولینوم درجه بلل کیږي، که $a_n \neq 0$ وي.

په یاد ولری: په پورته سر کې- د پولینوم لیکنبنه د توان په همغږیزجګیدونکي لیکنبنه اودا کښته يي د پولینوم د توان په همغیزټیټیدونکي لیکنبنه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو سره شمیرنه یا کارونې داسې لنډې څیړو

د پولینومونو زیاتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاته-وو، نو داسې مخ ته ځو:

په دې پورته برابرون کې ګورو، چې اووښتونې یا واریابله د څلور په جګ یعنې x^4 نه شته. دا په دې مانا ده،چې څله ووني یا صریب یې صفر دی. یعنې $o\ x^4$ یا

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاتونعملیه یا کارونه مح ته بیای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

ګورو،چېد برابر توا یا برابر جګګنې واریابلې سره زیاتیږي.

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + o\ x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

د پولینومونو کمون کارونه:

کمون یې هم په همدې بیلګه داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$-(b_5 \cdot x^5 + o\, x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0)$$

$$(a_5 - b_5) \cdot x^5 + (a_4 - o)x^4 + (a_3 - b_3)x^3 + (a - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$-(2x^5 + o\, x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + 6x^4 \quad -7x^3 \quad -x^2 + x + 6$$

پيژند: دوه پولینومونه سره برابر دي، که خله وونې يا صریبونه یې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n \cdot x^n + \dots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

او

$$b_n \cdot x^n + \dots + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

سره برابر دي که $b_i = a_i$ وي،د ټولو $i=1,2,:::n$ له پاره.

د پولینومونوپه هکله مو په اتم ټولګي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولینوم کې هم ټول هغه شمیرلارې، چې په ګڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بیلګې دې هم داروښانه کړي:

د پولینومونوله پاره نورې بیلګې:

- $3x^2 + 2x + 5$
- $7x^3 + x^2 + 6x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $10x^5 + 3x^4 + 2x$

د پولینوم ډولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف ډولونه شته.په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی.دا لاندې بیلګې دا هم ښايي، چې بینوم څنګه برېښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له درې زیاتونونو جوړ دی‌ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلګه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلګه

$$(-x^5-2x^4-3x^2-x+2) + (x^2+2) = -x^5-2x^4-2x^2-x+4$$

پولینومکمون ته بیلګه: په لاندې بیلګه کې ګورو، چې د برابر توانونو x یو له بل څخه کمیږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) - (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل (ضرب):

دا لاندې درې بیلګې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موږ او تاسي د دي لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسوپام ورته رااړول کیږي

$$(x-4)\cdot(x^2-2x+3) = x^3-6x^2+11x-12$$

$$(x-5)\,(x^2+3\,x+7) = x^3-2\,x^2-8\,x-35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(x-3)(4x+7) = 4x^2 - 5x - 21$$

$$(x+1)(x^2+x-6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

پولينوموېش:

دا لاندې بيلګه د وېش له پاره راوړ، خو دا چې وېش لږ پيچلی دی، په دې به پوره وغږيو.

$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3 - x^2 + 5x - 9 + (27)/(x+3)$

$-(x^4+3x^3)$
$-(-x^3-3x^2)$
$-(5x^2+15x)$
$-(-9x-27)$
پاتېRest: 27

کربنيزځله ووني سره ځل کيږي يا ضربيږي

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-1,5)$$

د ځله ووني ۲ سره غزول کيږي.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+3x+2)(x-1,5) \\ &= x^3 - 1,5x^2 + 3x^2 - 4,5x + 2x - 3 \\ &= x^3 + 1,5x^2 - 2,5x - 3 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم وېش:

که د یوه پولینوم صفرځای معلوم وي، نو کړی شو د پولینوم وېش له لارې د پولینوم درجه یه یوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لارښود کړي یا بوځیو نو ساده دی، چې نور صفرځایونه بیدا کړو. لاندې بېلګې دې د پولینوم وېش روښانه کړي.

د بیلګې په توګه د دریمې درجې ټولراشنل تابع صفرځایونه معلوم دي، نو کیدی شي چې د تابع مساوات د کرښیزو صریبونوپه څېر ولیکلی شو:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - \bar{x}_3)$$

چیرته چې x_3 ؛ x_2 ؛ x_1 صفرځایونه دي.

موږ اوس په څرګنده توکه تابع یا څیرونه د څیړنې لاندې نیسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چیرته چې $x1=2$ یو صفرځای دی، ځکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د $x1=2$ صفرځآی لاندې (له امله) په پام کې ونیسو او لکه چې لاس ته راځي و
لیکو $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (.........)(x - 2)$

د صفرځای ټاکلو لپاره اینوونه : $f(x)= 0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$
دا افاده $x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$ څېړو

د نوکانو افادې یا وییني $(\dots)$ټاکو

دواړه لورې په $(x-2)$وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6) :(x-2)=(\dots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده $(\dots)$لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

وپش د ليکنيز وپش قانون سره سم مخ ته بيايو

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = x^2 + x - 3 \\
\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\
\quad x^2 - 5x \\
\quad \underline{-\left(x^2 - 2x\right)} \\
\qquad -3x + 6 \\
\qquad \underline{-(-3x + 6)}
\end{array}
$$

د نوکانو افاده (...) اوسx^2+x-3 بنه لري

له دې لاس ته راځي د صفرځای ټاکنو لپاره اینوونه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=(x^2+x-3)(x-2)=0$$

نو دا مربع مساوات x^2+x-3 اوس حل کوو.

دا د p-q- فرمول سره ځوابوو:

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array}\right.$$

صفرځایونه:

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x محور سره غوځتکي:

$$P_{x1}(2|0);\ P_{x2}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right);\ P_{x3}\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right)$$

تابع مساوات:

$$f(x)=(x-2)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\Leftrightarrow f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

د پولینوموېش او لیکنیز پولینوموېش په منځ کې اړیکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښایي.

$62228 : 47 = 1\ 3\ 2\ 4$	$(x^3-6x^2+11x-12) : (x-4) = x^2-2x+3$
-47 ← $47\cdot 1$	$-(x^3-4x^2)$ ← $(x-4)\cdot x^2$
152	$-2x^2+11x$
-141 ← $47\cdot 3$	$-(-2x^2+8x)$ ← $(x-4)\cdot(-2x)$
112	$3x-12$
-94 ← $47\cdot 2$	$-(3x-12)$ ← $(x-4)\cdot 3$
188	0
-188 ← $47\cdot 4$	
0	

ګڼ ۶۲ د لومړیو دوه ځایونو څخه چوړ دی د دې وېشونو ګڼونو څخه د پروېشوني (۴۷)

سره وېشل کیږي. لاس ته راوړنه (۱) د (۴۷) سره څل یا ضرب کیږي او د ګڼ (۶۲) څخه کمیږي. د کمښت نتیجې کمښت (۱۵۲) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر څو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

ازماېښت : $47\cdot 1324 = 62228$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right):(-2x+3)=3x^2+2x-4$$

$$\underline{-\left(-6x^3+9x^2\right)}$$

$$-4x^2+14x$$

$$\underline{-(-4x^2+6x)}$$

$$8x-12$$

$$-\underline{(8x-12)}$$

$$0$$

Probe:

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right)=\left(3x^2+2x-4\right)(-2x+3)$$

بیلګه:

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-2)=x^2+5x+4$$

$$\underline{-\left(x^3-2x^2\right)}$$

$$5x^2-6x$$

$$\underline{-\left(5x^2-10x\right)}$$

$$4x-8$$

$$\underline{-(4x-8)}$$

$$0$$

Probe: $\left(x^2+5x+4\right)(x-2)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right):(a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$\underline{-\left(a^3+a^2b\right)}$$
$$2a^2b+3ab^2$$
$$\underline{-\left(2a^2b+2ab^2\right)}$$
$$ab^2+b^3$$
$$\underline{-\left(ab^2+b^3\right)}$$
$$0$$

ازماېښت:

$$:\ \left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)=\underbrace{\left(a^2+2ab+b^2\right)}_{\text{1. binomische Formel}}(a+b)=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بیلګه:

$$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right):(x-2)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$$
$$\underline{-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2\right)}$$
$$-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x$$
$$\underline{-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)}$$
$$-x+2$$
$$\underline{-(-x+2)}$$
$$0$$

ازماېښت: $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 \qquad -14x-12):(x-3)=2x^2+6x+4 \\
\underline{-(2x^3-6x^2)} \\
\qquad 6x^2-14x \\
\qquad \underline{-(6x^2-18x)} \\
\qquad\qquad 4x-12 \\
\qquad\qquad \underline{-(4x-12)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

په ځنو حالتونوکي دا ښه ده، چي د پولینوم لیکنوکي د اړتیا په وخت کېبوه تشیا پرېږدو، کلکه په پورته بیلګه کي چېکورو.

یوه بله شونتیا یي داده، چي هغه تشیا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندي:

$$2x^3-14x-12=2x^3+0x^2-14x-12$$

بیلګه:

لاندي بیلګه یو وېش د پاتي سره مخ ته بیایي.لکه ښنګه چي د لیکنیز وېش ښخه راته ښرګند دی.

$$
\begin{array}{l}
(x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2\ \ (\text{Rest}\ -10) \\
\underline{-(x^3-x^2)} \qquad\qquad \Rightarrow (x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2-\dfrac{10}{(x-1)} \\
\qquad 4x^2-6x \\
\qquad \underline{-(4x^2-4x)} \\
\qquad\qquad -2x-8 \\
\qquad\qquad \underline{-(-2x+2)} \\
\qquad\qquad\quad -10\ \ \text{Rest}
\end{array}
$$

$$\text{Probe:}\ \left(x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\right)(x-1)=(x^3+3x^2-6x-8)$$

دا چي نوي بلډي یون کي د ناسمون سره مخامخ کیږي،غوره ده چي د دې ازماېښت هم وکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوموېش په کارونه کې که د پولینوموېش يوصفرځای څرګند وي، نو کیدی شي د پولینوم درجه په یوه وړه یا رکمه شي.

$x_1 = 2$ د پولینوم یو صفرځای دی.

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Restpolynom}}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\
\quad x^2 - 5x \\
\quad \underline{-\left(x^2 - 2x\right)} \\
\qquad -3x + 6 \\
\qquad \underline{-(-3x + 6)}
\end{array}$$

د پاتې پولینوم صفرځایونه اوس کیدیشي د څلوری یا مربع پولینوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پیدا کړو.

د سمون ازماېښت یې وکړی.

بیلګه: پولینوموېش او ازماېښت یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)=x^2+x-6$$
$$-\left(x^3+x^2\right)$$
$$x^2-5x$$
$$-\left(x^2+x\right)$$
$$-6x-6$$
$$-(-6x-6)$$

$$\text{Prob e}:(x+1)\left(x^2+x-6\right)=x^3+x^2-6x+x^2+x-6=\underline{\underline{x^3+2x^2-5x-6}}$$

پوښتنې:

لاندې پولینوموېش مخ ته بوځئ

الف- $\left(x^3-3x^2-6x+8\right):(x+1)$ ب ـ $\left(2x^3-x^2-8x+4\right):\left(x^2-4\right)$

پـ - $\left(2x^3-3x+1\right):(2x-1)$ ت ـ $\left(6a^6+a^4b+25b^3\right):\left(3a^2+5b\right)$

ټ - $\left(8x^5-6x^7+2x\right):2x^2$

ث ـ $\left(9a^5b^3-12a^3b^5\right):3a^3b^3$

ج - $\left(15a^9-8a^6b+8b^3\right):\left(3a^3+2b\right)$ ،

چ ـ $\left(14a^4-a^3+5a^2-3a+1\right):\left(7a^2-4a+1\right)$

ح ـ $\dfrac{3x^5y^{n+2}+3x^2y^{3n+2}-2x^{m+3}y^{n+3}-2x^my^{3n+3}}{x^3+y^{2n}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځ - $\frac{48a^{n+x}+56a^{x}b^{x}-72a^{n}b^{c}-84b^{x+c}}{12a^{n}+14b^{x}}$

څ - $\frac{8a^{2n+1}-10a^{2n}b+15a^{3n-2}b-12a^{3n-1}}{2a^{2n}-3a^{3n-2}}$

خ - $\frac{2a^{5}b^{x+2}-2a^{3}b^{x+5}+3a^{4}b^{2x-1}-3a^{2}b^{2x+2}}{a^{2}-b^{3}}$

پولینوم برابرون:

د یوه برابرون په کيږ اوښي لور د x مختلف توانونه یو پولینوم برابرون ورکوي

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8$$

د داسېبرابرون د اوبی له پاره لومړیدا برابرون په داسي نامه صفربڼه اړوي. دا په دې مانا چي برابرون تر هغې په ورتهبڼه بدلوناړولکیږي، چې په ښیلور یوائې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8 \mid -3x^2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=-8 \mid +8$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x+8=0$$

د صفربڼې یا- فورم په ځای د پولینوم دې بڼې ته هم نورمال بڼه وایي.
موږ د پولینوم پنځه بدیلونهراړوړو

لومړی بدیل:

په برابرون کې د اووښتونې x یو یوائنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n+b=0 \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n ناجوړه وي،نوريښه وېښتوني کیدی شي کميز ګڼ هم وي.
د رېښي ټيک يو حل شتون لري.
که n جوړه وي، نوريښه نيونی(هغه ګڼ چېريښه يېښيول کيږي) يو اځې زياتيز ګڼ کيدی شي.
دوه اوبیونې شتون لري.
بيلګه:

$$
\begin{aligned}
& 8x^3 + 27 = 0 \,|\, -27 \\
\Leftrightarrow\ & 8x^3 = -27 \,|: 8 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 = -\frac{27}{8} \,|\, \sqrt[3]{\ } \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2x^4 - 3 = 0 \,|\, +3 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^4 = 3 \,|: 2 \\
\Leftrightarrow\ & x^4 = \frac{3}{2} \,|\, \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107 \Rightarrow L = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107\right\}
\end{aligned}
$$

په لومړي حالت کې n ناجوړه دې. ريښه نيوني کميزه هم کيدی شي
اويواځې يواوبی شتون لري.
په دويم حالت کې n جوړه دی، ريښه نيونی زياتيزدی.که کميزوي بيا برابرون اوبی نه لري.

دويم بديل:

پولينومبرابرون يوځلوری‌برابرون (مربع مساوات) انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+px+q=0$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

دا د -p-q- – فرمول له لارې اوبی –یا حلکيږي

بيلګه

$$x^2-13x+36=0 \quad p=-13 \quad q=36$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$=\left(\frac{13}{2}\right)^2-36=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9\\ x_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow L=\{4;9\}$$

D د دېسکريمينانت له پاره ليکلکيږي چې هغې لرلو سره مخ دمخه سړی د اوبيونويا حلومو څومره وال يا ګڼون ټاکلی شي.

که صفر $<$ D وي ، نو څلورۍ برابرون دوه اوبي يا حلونه لري

که صفر $=$ D وي،نو برابرون يواځې يو ډبل اوبيلري

که صفر $>$ D وي، نو برابرون اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دريم بديل

ولينومبرابرونيو دوه-څلورۍ برابرون biquadratische انځوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$ax^4+bx^2+c=0 \Leftrightarrow z^2+pz+q=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

$$x^2=z \Rightarrow x=\pm\sqrt{z} \text{ für } z\geq 0$$

$$ax^4+bx^2+c=0 \Leftrightarrow z^2+pz+q=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

$$x^2=z \Rightarrow x=\pm\sqrt{z} \text{ für } z\geq 0$$

د په ځا اېښووني یا سبستیچیوشن z د -p-q- فرمول په مرسته یا له لارې شمیرل کیدی شي
پسې دې بیرته په ځایونه په ځسبستیچیوشن وکارول شي او ریښه دې ونیل شي.
ریښه تیک د   زیاتیز - p-q-z- ارزښتونو   له پاره نیول کیدی شي.

بیلګه:

$$\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}=0$$

Substitution: $z=x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2-\frac{9}{5}z+\frac{81}{10}=0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2-18z+81=0$$

$$p=-18\,;\; q=81$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=81-81=0$$

$$z=-\frac{p}{2}=9$$

Rücksubstitution

$$z=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-3;3\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې د يسکريمينانت صفر دی، داسې چې د سبستيچيوشناووښتونې له پاره يو اوبې .(z = 9) شتون لري.
دا په دېمانا، چې د ۴ –مې درجې پولينوم ټيک دوه اوبې يا ځوابونه لري.

ځلورمبديل:
په پولينومبرابرون کې هغه همغه ارژښته يا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x\left(ax^2 + bx + c\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووښتونې يا مجهوله x کيدی شي له نوکانو راووېستلشي.
اوبيونې د صفرځل يا – صرب له جملې شميرلکيدی شي (د فاکتورکولو تلنلار)،

بيلګه

$$\begin{aligned}
&x^3 + x^2 - 2x = 0\\
&\Leftrightarrow x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}\\
&\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0\\
&\Rightarrow p = 1;\ q = -2\\
&\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}\\
&\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\\
&\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1\\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2\end{array}\right.\\
&\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2;0;1\}}}
\end{aligned}$$

د صفر ځلوونې يا صريب دويم ځلوونی کيدی شي د p-q - فرمولسره سادهوشميرلشي.
د صفرځلوونې جمله: يوخل يا صرب ټيک هلته صفردی، چې يو ځلوونی صفر ړي.

پنځم بديل:
پولينومبرابرون له بديلونو ۱ – ۴ په څير نه دی.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

په ډېرو حالتونوکېکيدی شي، د پوينوموېشله لارې اوبی ومیندلشي.
د دې له پاره بايد يواوبی معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د پولینوم یو اوبی معلوم وي،نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لارېیه یوه کمه شي. که دا یو څلوری برابرون راکړي،نو اوبیونه یېبیا ساده ه، چې نور اوبي پیدا کړو.
لاندې بیلګه چې اوبی $x = 2$ معلوم دی،د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي.
پولینوموېش همغه په راته څرګنده لیکنیزډول لاس ته راوړو.
Division.
وېشنه

$$
\begin{aligned}
&\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = x^2 + x - 3 \\
&-\left(x^3 - 2x^2\right) \\
&\quad x^2 - 5x \\
&\quad -\left(x^2 - 2x\right) \\
&\qquad -3x + 6 \\
&\qquad -(-3x + 6)
\end{aligned}
$$

د نوکانو(....) وبینه یا افاده اوس دا بڼه $x^2 + x - 3$ لري.
له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 3\right)(x - 2) = 0$$

اوس دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $\left(x^2 + x - 3\right)$ د اوبیوني دي،چې د
p-q- فرمول له لارې سرته رسیږي.

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\; \begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 &= -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{aligned} \right.$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ 2;\ -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې د ګومان یا ازماېښت له لورې اوبی نه شي پیداکیدی، نوبیا د نومریک تلنلار ځخه کار اخستلکیږي(دا به اوس زموږ دنده نه وي).

برابرونونو ته تمرینونه:

۱ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف - $\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0$ ب - $\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0$ پ - $8x\left(x^2 - 1\right) = -8x + 1$

۲ – برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف - $27x^3 - 8 = 0$ ب – $\frac{1}{16}x^3 - 4 = 0$ پ- $-2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1$

۳ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف- $4k^2x^3 - 2k = 0; k > 0$ ب – $\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0; b > 0$ پ - $(x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$

۴ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

$$\frac{k \cdot x^3}{4} - 2k = 0$$

۵ - ځانګړې باکتریاګاني د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل ګنو(تعداد) څلور برابره کوي.په یوه ساعت کې یې په سلوکې ډېروالی څومره دئ؟

۶ – د کال په پیل کې د موټروختارزښت نوی ټاکییا کره کیږي. د یوه پنځه کلن زوړ کارشوې یوم،ترپلورونکی € 8500 ورکوي.

د موټر کلنی زیان به څومره (د وختارزښت د په سلو کې) وي، که سړی له دې، که سړس داسېمخ ته لاړ شي چې دا په لومړیوپنځه کلونوکې برابر جګ وي؟

۷ – برابرونونه اوبی –یا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف - $\frac{1}{4}x^3-4x=0$ ب- $3x^3+\frac{4}{3}x^2=0$ پ - $x^3+x^2-2x=0$

۸ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $4x\left(x^2-x\right)=7x^3-7x^2-6x$ ب- $\frac{3}{4}x^3-3x^2=0$

پ --- $\frac{1}{8}x^3-x^2+2x=0$

دا لاندې برابرونونه اوبي کړئ

الف- $x^3+4x^2-20x-48=0$ ب - $-\frac{1}{2}x^3+4x=\frac{1}{2}x^2-4$

پ - $-2x^3+6x^2-4x=\frac{1}{2}x-1$ ت- $x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+2=0;\ x_1=\frac{1}{2}$

ټ - $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3+4x^2-2x\right)=\frac{3}{2}$

لاندې برابرونونه حل کړئ چې یو اوبی یا حل یېمعلوم وي

الف - $x^3-3x^2-6x-2=0;\ x_1=-1$

د پولینوم ویېش ځخه کارواخلی.

-- د پولینوموېش ځخه کار واخلئ

الف- $\left(4x^3-6x+\frac{5}{2}\right):(2x-1)$ ب - $\left(x^3-2kx^2-2x+4k\right):\left(x^2-2\right)$

۱۲ – برابرون $x^3-4x^2+(k+4)x-2k=0$ ورکړشوی. وښایئ، چې د $x_1=2$ لپاره برابرون یواوبی دی. د k د کوم ارزښت لهپاره ټیک یو ډبل اوبی شته؟

لاس ته راوړنه د کرښیزو ځلوونو یا صریبونوپه څیر ولیکی.

پوښتنه:

a داسې وټاکئ، چې برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0

ټیک دوه اوبیونې یا حلونه ولري

یو د دریمې درجې برابرون دا دوه { 2 ; 4- } = L اوبیونې لري.

الف - د اوبیونو یا حلونوپه هکله وېناوې وکړی.

ب – دوه برابرونونه ددې اوبیونې ورکړی.

۳ – برابرونونه اوبیکړی

الف- $2x^3 - x^2 - x = 0$ ب - $x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$

۴ – برابرونونه اوبیکړی

الف- $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$ ب- $x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$

۵- برابرونونه اوبیا حلکړی

الف - $x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

ب- $x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$

برابرونونه اوبی کړی

الف – $-u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0$ ب - $a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$

۷ – برابرونونه حل کړی

الف - $x^3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$

ب- $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$ پ- $\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$

ت - $\frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0$ ټ - $x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$

ث - $\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ج - $x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

چ - $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ خ - $x^3 - 3x^2 = -4$

څ - $(3x - 5)\frac{(x-2)^2}{5} = 0$

پوښتنې

۱ - برابرونونه د پسې حل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف ـ $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0$ ب $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$

پ ـ $-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0$ ت ـ $\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0$

ټـ $2x^3-x^2-5x-2=0$ ث ـ $(3x-1)(x+k)^2=0$

۱ ـ د x پسې يې اوبې کړی $(k\neq 0)$

الف ـ $\frac{1}{9k}(x^4+x^3-12x^2)=0$ ب ـ $\frac{k}{2}x^4-kx^3-\frac{3k}{2}x^2=0$

پ ـ $\frac{x^2}{5k^2}(x^2-3k)=0\,;\,k>0$ ت ـ $x^4-26x^2+25=0$

ټ ـ $-\frac{1}{2}x^4+3x^2-4=0$ ث ـ $\frac{1}{2}x^4-4x^2+2=0$

ج ـ $-\frac{1}{16}x^4+x^2-3=0$ چ ـ $\frac{1}{3}(x^2-3)^2-3=0$

ځ ـ $\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$ ځ ـ $x^4-11x^2+18=0$

پوښتنې
حلونه یا اوبیونې وټاکئ

الف ـ $\frac{1}{3}x^4-3x^3=0$ ب ـ $\frac{1}{7}x^4-7=0$ پ ـ $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0$

تـ $-2x^4+x^2+x=0$ ټ ـ $\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0$ ث ـ $\frac{1}{3}(x^2-4)^2-3=0$

ج ـ $\frac{2}{5}(x^2-9)(x+2)^2=0$ چ ـ $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$ خ ـ $x^4-5x^2-2x=0$

ځ ـ $x^4-6x^2+8=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس الګوریتم Der Gauß- Algorithmus

فکر دې وشي، چې دا برخه په یولسم ټولګي کې راشي. دلته یې راوړنه هم بده نه ده.

یادونه: خوارزمیة د Algorithmus عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزمیّة دی، چې په لاتین کې ترې الګوریتموس جوړ شوی دی.

الخواریزم د الګوریتم نومورکونکی، یوه شوروي پوست مارکې چې د الخواریزم د ۱۲۰۰ کلیزې جشن په هکله راوېستلې وه.

الګوریتم د پرابلم یا د پرابلمونود ټولګي یا یوه یواځنی د اوبیوني تلنلار ړه.

الګوریتم یوه نړیواله تلنلار ده د په خوښه کرښیز برابرونونو سیستم اوبیوني ته

ننوتنبیلګې:

د کرښې ډول په توګه کار کوو. د لیکو له پاره اجازه شته : - بدلیدلی شي - د یوه ګڼ سره ځلیدلی شي. - په یوه ګڼ سره وېشلکیدی شي.	درې برابرونونه د درې اووښتونویا واریابلو یا متحولو سره له بنه بدلون څخه لرو	$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$ $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$ $-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$ شمیرنځیره یا شیما داسې لیکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سره زیاتیدی شي

- سره کم کړي

درځونه هم سره بدلیدلی شي، که اووبنتوني یا واریابلي x ورسره واخستل شي.

د اوبیوني یا حل لاس ته راوړنه د بیرته په څټ اینیووني له راې هم کیدی شي.

$$-14x_3 = -14$$
$$\Leftrightarrow x_3 = 1$$
$$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$$
$$\Leftrightarrow -11x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 0$$
$$7x_1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$$
$$\Leftrightarrow 7x_1 = -7$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -1$$

$$L = \{-1; 0; 1\}$$

ازمابینت: په لاندې کي د رښتیا له پاره ځاي په ځاى دي.

$$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$$
$$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$$
$$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$$

x_1	x_2	x_3	
7	3	−5	−12
−1	−2	4	5
−4	1	−3	1

x_1	x_2	x_3	
*	*	*	*
0	*	*	*
0	0	*	*

شمیرنه داسي مخ ته بیایو: شننه یې بشي لور ته ده.

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	| ·4
−1	−2	4	5	| ·28
−4	1	−3	1	| ·7
28	12	−20	−48	
−28	−56	112	140	II + I
−28	7	−21	7	III + I
28	12	−20	−48	|: 4
0	−44	92	92	|: 4
0	19	−41	−41	
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	| ·19
0	19	−41	−41	| ·11
7	3	−5	−12	
0	−209	437	437	|: 19
0	209	−451	−451	III + II
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	
0	0	−14	−14	

د بیخي نویو له پاره یادوني:

د اوبیوني له پاره تلندول کیدی شي په کوچنیو پلونو توته شي.

۱ـ د اصلي ماتلاندې سره د لیکي له لارې ځل (ضرب) سره د د ماتونو مخه ونیسی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- په لومړۍ کرښه لومړی ګڼ باید زیاتیز وي(که نه، بیا کیدی شي د ۱- سره ځل شي)

۳- د ځل یا وېش له لارې وهڅیري چې په لومړي درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

په ۲ ـمه او ۳ ـمه لیکه کې دې لومړي ګڼونه کمیزوي.

۴- ۲ ـمې او ۳ ـمې لیکې هرې یوې ته دې لومړۍ لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درځ کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۵- په۲ ـمه لیکه کې دې دویم ګڼ زیاتیز وي(که نه، نو د ۱- سره دې ځل شي)

۶ ـد ځل یاوېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

۷ - و ۲ ـمېلیکې یا کرښې ته ۳ ـمه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۸ - لاس ته راوړی د اوبی یا حل په ښت لور کیږدی.

برابر پرمختګېول کیدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دریو زیات برابرونونه شتون ولري:

بڼه بدلونونه کړی شي سړی بل ډول هم مخ ته بوځي.دا چې ،، ښنګه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پربېږدو. د زیاتو تمرینونوله لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونیولشي، چې د نا اړینې تیرونې مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي ډېر بڼه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیږي، خود ناسمون شونتیا زیاتیږي؟

د په ښت اینووولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه	لانې الماني:سره بدل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

tausche: ⇄

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	
−1	−2	4	5	$\|\cdot(-1)$ I ⇄ II
−4	1	−3	1	
1	2	−4	−5	
7	3	−5	−12	II - 7·I
−4	1	−3	1	III + 4·I
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	$\|\cdot 9$
0	9	-19	-19	$\|\cdot 11$
1	2	−4	−5	
0	−99	207	207	$\|:9$
0	99	−209	−209	III + II
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	
0	0	-2	-2	

$-2x_3 = -2$

$\Leftrightarrow x_3 = 1$

$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$

$\Leftrightarrow -11y = 0$

$\Leftrightarrow x_2 = 0$

$x_1 + 2\cdot 0 - 4\cdot 1 = -5$

$\Leftrightarrow x_1 = -7$

$\Leftrightarrow x_1 = -1$

$L = \{-1; 0; 1\}$

ازماېښت:

$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$

$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$

$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$

بیلګه ۱ :(ساده یا اسانه)

د په ښتې اینوولو له لارې د اوبیيا حل لاس ته راوړنه

$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$

$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$

$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1$

x_1	x_2	x_3		
2	−3	4	8	$\|\cdot 6$
3	4	−5	−4	$\|\cdot 4$
4	−6	3	1	$\|\cdot 3$
12	−18	24	48	$\|:6$
12	16	−20	−16	II - I
12	−18	9	3	III - I
2	-3	4	8	
0	34	-44	-64	
0	0	-15	-45	

$-15x_3 = -45$

$\Leftrightarrow x_3 = 3$

$34x_2 - 44\cdot 3 = -64$

$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$

$\Leftrightarrow x_2 = 2$

$2x_1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$

$\Leftrightarrow x_1 = 1$

$L = \{1; 2; 3\}$

Probe:

$2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8 \quad (w)$

$3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 5\cdot 3 = -4 \quad (w)$

$4\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1 \quad (w)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ (منځنۍ سخته)

د په ځښ اینوولو له لارې د اوبې یا حل لاس ته راوړنه

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$$

x_1	x_2	x_3		
3	2	−4	−2	$\|\cdot 8$
4	−5	3	9	$\|\cdot 6$
8	7	−9	13	$\|\cdot 3$
24	16	−32	−16	$\|:8$
24	−30	18	54	II - I
24	21	−27	39	III - I
3	2	-4	-2	
0	-46	50	70	$\|:2$ II ⇄ III
0	5	5	55	$\|:5$
3	2	-4	-2	
0	1	1	11	$\|\cdot 23$
0	-23	25	35	
3	2	−4	−2	
0	23	23	253	$\|:23$
0	−23	25	35	III + II
3	2	−4	−2	
0	1	1	11	
0	0	48	288	

$$48x_3 = 288$$
$$\Leftrightarrow x_3 = 6$$
$$x_2 + 1\cdot 6 = 11$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 5$$
$$3x_1 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2$$
$$\Leftrightarrow 3x_1 = 12$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 4$$

$$L = \{4; 5; 6\}$$

ازمایښت:

$$3\cdot 4 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2 \quad (w)$$
$$4\cdot 4 - 5\cdot 5 + 3\cdot 6 = 9 \quad (w)$$
$$8\cdot 4 + 7\cdot 5 - 9\cdot 6 = 13 \quad (w)$$

بیلګه ۳ : (سخته): لاندې درې برابرونونه غواړو اوبې کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$
$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$
$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_1	x_2	x_3		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	4	$\mid\cdot 40$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	23	$\mid\cdot 40$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	$\mid\cdot 20$
20	−32	15	160	$\mid\cdot 12$
30	15	8	920	$\mid\cdot 8$
16	−10	5	160	$\mid\cdot 15$
240	−384	180	1920	$\mid : 12$
240	120	64	7360	II - I
240	−150	75	2400	III - I
20	−32	15	160	
0	504	−116	5440	$\mid : 4$
0	234	−105	480	$\mid : 3$
20	−32	15	160	
0	126	−29	1360	$\mid\cdot 13$
0	78	−35	160	$\mid\cdot 21$
20	−32	15	160	
0	1638	−377	17680	$\mid : 13$
0	1638	−735	3360	III - II
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	
0	0	-358	-14320	

د په څټ اینوولو له لارې حل لاس ته راوړنه

$$-358x_3 = -14320$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 40}}$$
$$126x_2 - 29\cdot 40 = 1360$$
$$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 20}}$$
$$20x_1 - 32\cdot 20 + 15\cdot 40 = 160$$
$$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 10}}$$
$$L = \{10\,;\,20\,;\,40\}$$

ازمايښت:

$$\frac{1}{2}\cdot 10 - \frac{4}{5}\cdot 20 + \frac{3}{8}\cdot 40 = 4$$
$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4\,(w)$$
$$\frac{3}{4}\cdot 10 + \frac{3}{8}\cdot 20 + \frac{1}{5}\cdot 40 = 23$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23\,(w)$$
$$\frac{4}{5}\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{1}{4}\cdot 40 = 8$$
$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8\,(w)$$

د کاروني يا استعمال بیلګی
د ټولراشنل فنکشن د فنکشن برابرون د شمیرلو له لارې، چي ځلور ټکي يې معلوم دي،
د ګاوس الګوریتم کارونه يا استعمال

د کاروني بیلګه۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll} P_1(1|4) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = 4 \\ P_2(2|2) \Rightarrow & f(2) & = & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 & = 2 \\ P_3(4|4) \Rightarrow & f(4) & = & 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 & = 4 \\ P_4(5|20) \Rightarrow & f(5) & = & 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 & = 20 \end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	4	
1	2	4	8	2	II − I
1	4	16	64	4	III − I
1	5	25	125	20	IV − I
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	3	15	63	0	III − 3·II
0	4	24	124	16	IV − 4·II
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	12	96	24	IV − 2·III
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	0	12	12	

$\Rightarrow$

$$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$6a_2 + 42a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \,|\, -42$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 = -36 \,|:6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \,|\, +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

د کارونپیلګه ۲

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll} P_1\left(1\middle| -\frac{11}{2}\right) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = -\frac{11}{2} \\ P_2\left(-1\middle| \frac{9}{2}\right) \Rightarrow & f(-1) & = & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = \frac{9}{2} \\ P_3(-2|8) \Rightarrow & f(-2) & = & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 & = 8 \\ P_4\left(-3\middle| \frac{5}{2}\right) \Rightarrow & f(-3) & = & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 & = \frac{5}{2} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{11}{2}$	$\vert\cdot 2$
1	−1	1	−1	$\frac{9}{2}$	$\vert\cdot 2$
1	−2	4	−8	8	$\vert\cdot 2$
1	−3	9	−27	$\frac{5}{2}$	$\vert\cdot 2$
2	2	2	2	−11	
2	−2	2	−2	9	II − I
2	−4	8	−16	16	III − I
2	−6	18	−54	5	IV − I
2	2	2	2	−11	
0	−4	0	−4	20	$\vert:(-2)$
0	−6	6	−18	27	$\vert:3$
0	−8	16	−56	16	$\vert:4$
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	−2	2	−6	9	III + II
0	−2	4	−14	4	IV + II
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	4	−12	−6	IV − 2·III
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	0	−4	−4	

$\Rightarrow$

$$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 4a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 2a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \mid -2$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \mid +7$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2}}$$

د کاروني بيلګه ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$

$$P_2(2|11) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$

$$P_3(4|-11) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$

$$P_4(6|-9) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−16	
1	2	4	8	11	II − I
1	4	16	64	−11	III − I
1	6	36	216	−9	IV − I
1	−1	1	−1	−16	
0	3	3	9	27	|: 3
0	5	15	65	5	|: 5
0	7	35	217	7	|: 7
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III − II
0	1	5	31	1	IV − II
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	4	28	−8	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	0	8	8	

$\Rightarrow$

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \mid -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \mid +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \mid +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

د کاروني بيلګه۴ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$$
$$P_2(-2|6) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$$
$$P_3(3|1) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_4(-3|-2) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

$\Rightarrow$

$$20a_2 = -10 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$$
$$2a_2 - 12a_3 = -7$$
$$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 \,|\, +1$$
$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \,|:(-12) \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$$
$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$$
$$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \,|\, +5$$
$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \,|:(-1) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \,|\, -3 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4}$$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

د پررته المانيژباره:د خيروني يا تابع برابرون

د کاروني بيلګه ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(2|22) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 22$$
$$P_2(4|44) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 44$$
$$P_3(-4|4) \Rightarrow \quad f(-4) = -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(8|40) \Rightarrow \quad f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 40$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	22	
1	4	16	64	44	II − I
1	−4	16	−64	4	III − I
1	8	64	512	40	IV − I
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	−6	12	−72	−18	$III + 3 \cdot II$
0	6	60	504	18	$IV - 3 \cdot II$
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	24	336	−48	$IV - \frac{1}{2} \cdot III$
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	0	288	−72	

$\Rightarrow$

$$288a_3 = -72 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$48a_2 + 96a_3 = 48$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 - 24 = 48 \,|\, +24$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 = 72 \,|\, : 48 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 18 - 14 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 4 = 22 \,|\, -4$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 18 \,|\, : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 6 - 2 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 22 = 22 \,|\, -22 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Die Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$

د پړرته المانيژباره:د څيرونبيا تابع برابرون

د کاروني بيلکه۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|0) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 0$$
$$P_2(-1|-2) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -2$$
$$P_3(2|16) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 16$$
$$P_4(-3|-4) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -4$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	0	
1	−1	1	−1	−2	II − I
1	2	4	8	16	III − I
1	−3	9	−27	−4	IV − I
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	1	3	7	16	$III + \frac{1}{2} \cdot II$
0	−4	8	−28	−4	
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	3	6	15	|: 3
0	0	8	−24	1	|: 8
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	1	−3	0	IV − III
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	0	−5	−5	

$\Rightarrow$

$$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$a_2 + 2a_3 = 5$$
$$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 \mid -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 \mid +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}}$$

د کارونې بیلګه ۷ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|1) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_2(2|0) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$
$$P_3(-2|4) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(3|9) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	1	
1	2	4	8	0	II − I
1	−2	4	−8	4	III − I
1	3	9	27	9	IV − I
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	−3	3	−9	3	III + 3·II
0	2	8	26	8	IV − 2·II
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	2	12	10	$IV - \frac{1}{6} \cdot III$
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	0	10	10	

$\Rightarrow$

$$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$12a_2 + 12a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \,|\, -12$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \,|\, : 12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \,|\, +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

د کاروني بیلګه ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2} \middle| \frac{45}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_4\left(-\frac{3}{2} \middle| -\frac{77}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 = -\frac{77}{8}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
1	3	9	27	−4	
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{8}$	$\vert \cdot 8$
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{77}{8}$	$\vert \cdot 8$
1	1	1	1	6	
2	3	9	27	−4	II − I
8	−4	2	−1	45	III − 8·I
8	−12	18	−27	−77	IV − 8·I
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	−12	−6	−9	−3	III + 6·II
0	−20	10	−35	−125	IV + 10·II
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	42	147	−63	|: 21
0	0	90	225	−225	|: 45
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$\Rightarrow$

$$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 7a_3 = -3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \mid -7$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

$$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \mid +14$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \mid +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کاروني یا استعمال بیلګه۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \middle| -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1 \middle| \frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3 \middle| -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2} \middle| -8\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{9}{2}$	$\mid\cdot 8$
1	−1	1	−1	$\frac{11}{2}$	$\mid\cdot 8$
1	3	9	27	$-\frac{5}{2}$	$\mid\cdot 8$
1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{125}{8}$	−8	$\mid\cdot 8$

$$-11a_3 = -11 \mid : (-11)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

8	8	8	8	−36	
8	−8	8	−8	44	II − I
8	24	72	216	−20	III − I
8	−20	50	−125	−64	IV − I
8	8	8	8	−36	|: 4
0	−16	0	−16	80	|: 4
0	16	64	208	16	|: 4
0	−28	42	−133	−28	|: 7
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	4	16	52	4	III + II
0	−4	6	−19	−4	IV − II
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	0	16	48	24	|: 8
0	0	6	−15	−24	|: 3

$$2a_2 + 6a_3 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \mid -6$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \mid : 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$-4a_1 - 4a_3 = 20$$

$$\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \mid : (-4)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \mid +13$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \mid : 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کاروني يا استعمال بيلګه ۱۰ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|25) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 25$$
$$P_2(-1|-49) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -49$$
$$P_3(3|27) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 27$$
$$P_4(5|5) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 5$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	25	
1	−1	1	−1	−49	II − I
1	3	9	27	27	III − I
1	5	25	125	5	IV − I
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	2	8	26	2	III + II
0	4	24	124	−20	IV + 2·II
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	24	120	−168	IV − 3·III
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	0	48	48	

$\Rightarrow$

$$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$8a_2 + 24a_3 = -72$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \,|\, -24$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \,|\, :8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -74$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \,|\, +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \,|\, :(-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \,|\, -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}}$$

پوښتنې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 0x_3 = 28 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 30 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 32 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{13 ; 15 ; 17\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 12 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{3 ; 2 ; 1\}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{15 ; 12 ; 10\}$$

$$\left|\begin{array}{l} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{-1 ; 3 ; 2,5\}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 23 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{5 ; 3 ; 1\}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 20 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{5 ; 3 ; 1\}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -21 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L = \{1; -1; 2; -1\}$$

$$\left|\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_4 = 5 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L = \{-1; -1; 0; 5\}$$

د لاس ته راوړنې د کنترل له پاره دې ازمايښت وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Das Horner – Schema هورنر- شيما

د دي له پاره چې د جګودرجو ټولراشنلځيرونو يا که غواړئ توابعو ګراف وکښلای شو، بايد يو ارزښت جدول برابرکړو. دا به ډېر وخت اوځای ونيسي، چې د دې له پاره اړين څيره ارزښتونه يا فنکشنارزښتونه وشميرو.

د هورنر – شيما دا شميرنې ډېرې ساده کوي.

بيلګه : دريمه درجه ټولراشنل فنکشن يا راشنل ځيرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د x د ډېرځله نوکانو بندولو له لارېمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underbrace{x\underbrace{\left[x\left(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2}\right) + a_1\right]}_{e_4} + a_0}_{E}$$

که سرې غواړې چې د $x = x_1$ له پاره فنکشن ارزښت وشميرې، نوکی دی شي سرې په لاندې ډول له دننه دباندې لورته مخ ته لاړ شي:

-- ګرد نوکان وشميري

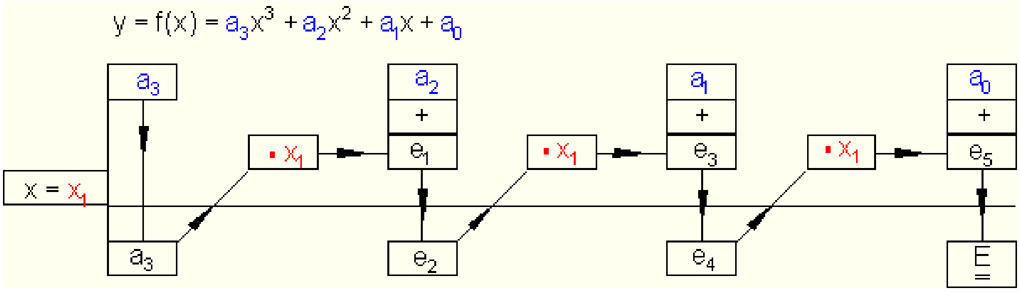
--منځ لاس ته راوړنه (ښه ليکنه به يې داسې وي: منځلاس –ته-راوړنه) د x_1 سره ځل کړي او a_1 ته يې ور زيات کړي

--لاس ته راوړنه د x_1 سره ځل کړي او a_0 ته يې ور زيات کړو

دا شميرنکارونې يا که غواړئ شميرنعمليې کيدی شي څيره ډوله يا شيماتيکي داسې انځور کړو:

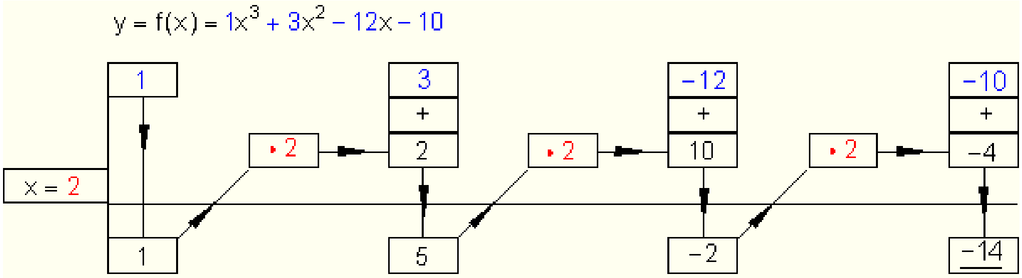
(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیزه بڼه Allgemeines Schema:



بیلګه : $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

د $x = 2$ له پاره دې د $y = f(2)$ ارزښت د هورنر – شیما له لارې وشمیرل شي.



نو لاس ته راځي یا باورلری: $y = f(2) = \underline{-14}$

د یوه دریمي درجي پولینوم له پاره- چې غواړو ګراف یې رسم کړو یا کاږو- باید یو ارزښتجدول جوړکړو.

$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	1	4	1	−6	
x = −4		−4	0	−4	
	1	0	1	−10	= f(−4)
	1	4	1	−6	
x = −3		−3	−3	+6	
	1	1	−2	0	= f(−3)
	1	4	1	−6	
x = −2		−2	−4	+6	
	1	2	−3	0	= f(−2)
	1	4	1	−6	
x = −1		−1	−3	+2	
	1	3	−2	−4	= f(−1)
	1	4	1	−6	
x = 1		+1	+5	+6	
	1	5	6	0	= f(1)
	1	4	1	−6	
x = 2		+2	+12	+26	
	1	6	13	20	= f(2)
	1	4	1	−6	
x = 3		+3	+21	+66	
	1	7	22	60	= f(3)
	1	4	1	−6	
x = −2,5		−2,5	−3,75	+6,875	
	1	1,5	−2,75	0,875	= f(−2,5)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتجدول؛

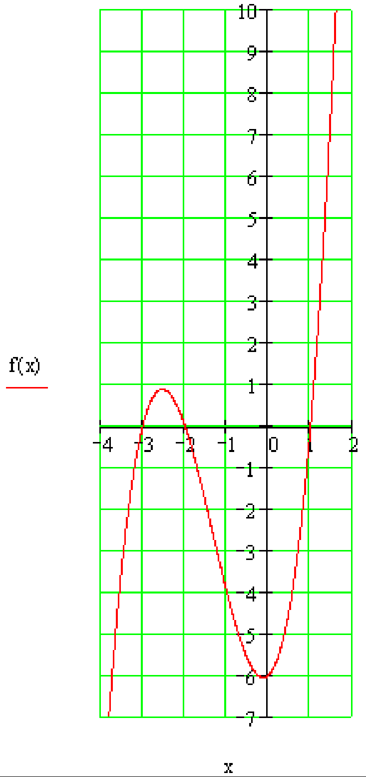
x	-4	-3	-2,5	-2	-1
f(x)	-10	0	0,875	0	-4
x	0	1	2	3	
f(x)	-6	0	20	60	

د لښتي- يا جدولارزښت سره کيدی شی په نږدې توګه ګراف وکښل شي.

که د ګراف کښلو کې څرګنده شي،چې يوبل ځای هم پاتې دی،دا کيدی شي هر وخت د هورنرشيما په مرسته پيدا شي.

ګراف په لاندې x – ځايونوکې صفر ارزښتونه لري: 1;-2 ;-3

دا y – محور په -6 کې غوڅوي.



که په کښلوکې څرګنده شي چې يوبل ځای هم پاتې دی، نو دا کيدی شي د هونرشيما په مرسته پيدا کړو،د بيلګېپه توګه(0,5) f

	1	4	1	-6	
x = 0,5		+0,5	+2,25	+1,624	
	1	4,5	3,25	-4,375	= f(0,5)

د پولينوم وېشني پر ځای کيدی شي د ټولراشنل تابع درجه د هورنر شيما له لارې هم کمه شي.
موږ د هورنر شيما څيړو:

موږ بيرته تابع ترخيرني لاندې نيسو

$f(x)=x^3-x^2-5x+6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته چي $x1=2$يو صفرځای دی.

د $f(x)=x^3-x^2-5x+6$ لپاره د هورن شيما د $x1=2$ سره

موخه د ضريب (x-2) له نوکانو وتنه ده. $\begin{array}{c\|cccc} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ x=2 & \downarrow & 2 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$	په دريمه ليکه کې درې عددونه د وېش نتيجو لپاره هم د پاتي پولينوم ضريبونه بللکيږي. $f(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(1\cdot x^2 + 1\cdot x - 3)}_{\text{Restpolynom}}$ پاتي پولينوم کربنيز ضريب

د $f(x)$ د نورو صفرځايونو لپاره د پاتي يا باقي پولينوم صفرځايونه شميرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لاري کيږي.

نتيجه يي د لاندي پولينوم وېش بيلګي سره وګوری.

بيلګه: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x - 4$ چيرته چي $x_1 = -2$ يو صفرځای دی.

$\begin{array}{c\|cccc} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -4 \\ x=-2 & \downarrow & -\frac{1}{2} & -1 & 4 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{array}$	باقي يا پاتي پولينوم: $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ $f(x) = (x+2)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)$ د مربع مساوت حل $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ له دې لاس ته راځي او معکوس: $x2=2$ او $x3=-4$

بيلګه:

$f(x) = -x^3 + 7x - 6 = -x^3 + 0\cdot x^2 + 7x - 6$ چيرته چي $x_1 = 1$ يو صفرځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\begin{array}{r\|rrrr} & -1 & 0 & 7 & -6 \\ x=1 & \downarrow & -1 & -1 & 6 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$	باقي پولينوم:-1.x-1.x+6 $f(x)=(x-1)(.x^2-x+6)$ د مربعيز مساوات حل: $.x^2-x+6$له دي لاس تره اوپه څټ يا برعکس $x2=2$ او $x3=-3$

لکه بيلګه چې ښايي، د هورن شيما سره د پاتې پولينوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولينوم وېش ته.

دا ټولې پورته تلنلارې مو د مربع مساوات حل ته لاربښودوي. که دا ونه توانيږو، نو د نومريکي تلنلارو څخه کار اخستل کيږي، چې دا دلته نه څېړل کيږي.

تمرينونه: د پولينوم وېش...

د لندې ترمونو لپاره د پولينوم وېش وکاروی:

لومړی - $\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)$ دیم - $\left(2x^3-14x-12\right):(x-3)$

دريم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-7)$ څلورم - $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+6\right):(x+2)$

پنځم - $\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+5x-4\right):(x+2)$ شپږم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x-2)$

اوم - $\left(x^3-\frac{5}{4}x^2-\frac{23}{4}x+\frac{3}{2}\right):(x-3)$ اتم - $\left(x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{47}{3}x-5\right):(x+3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x+3)$ لسم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-1)$

تمرینونه: د ټول راشنل توابعو صفرځایونه.

تمرین ټولراشنل تابع **IV**

د صفرځایونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د یوه تاسو ته مناسب قانو له مخې د ټولراشنل توابعو صفرځایونه وټاکئ. د x محور سره د ګراف غوځېدنې ټکي و ټاکې او د تابع مساوات د کرښیزو ضریبونو د ضرب په څیر انځور کړئ.

اول - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{2}x^2+18$ دویم - $f(x)=x^3-4x^2+x+6$

دریم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ څلورم - $f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216$

پنځم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3$ شپږم - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x$

اوم - $f(x)=3x^4-3$ اتم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2$

نهم - $f(x)=2x^3-4x^2-16x$ لسم - $f(x)=2x^3+4x^2-26x+20$

پوښتنې

د ټول هوښیار یا راشنل توابعو محورغوځېدنې ګرافونه

صفرځایونه وشمیرئ او ګرافونه وکاږئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4+2x^3+x^2$ ب - $f(x)=x^2-6x+9$

پ - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(\frac{1}{2}x+4\right)$ ت - $f(x)=x^6-x^4$

ټ - $f(x)=3x\left(\frac{2}{3}x-2\right)(-2x+3)$ ث - $f(x)=3\left(x^2+4\right)\left(x^2-4x+10\right)$

دویم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$ پ - $f(x)=x^6-8x^4+20x^2$

دریم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ ب - $f(x)=x^3-12x+16$

پ - $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ ت - $f(x)=2x^3-10x^2-4x+20$

ټ - $f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}$ ث - $f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3$

ج - $f(x)=-5x^3-10x^2-\frac{5}{2}x-5$ چ - $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+9x+6$

څلورم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=-3x^4+15x^2-12$ ب - $f(x)=x^4-x^3-2x^2$

پ - $f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24$ ت - $f(x)=\left(x^2-6x+9\right)(x-4)$

ټ - $f(x)=x^6-3x^4-4x^2$ ث - $f(x)=x^4-25x^2-60x-36$

پنځم: د لاندې ټولراشنل توبعو ګرافونه په یوه مناسب پروتولاړ یا کواودینات سیتم کې وکاږئ. د دې لپاره یو ارزښت جدول واچوئ او محور غوڅټکي وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=x^3-6x^2+9x \quad D_f=\{x\,|\,-0,5\le x\le 4,5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2 \quad D_f=\{x\,|\,-3,5\le x\le 2,5\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x)=x^3-6x^2+9x-2 \quad D_f=\{x\,|\,-0,2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \quad D_f=\{x\,|\,-3\le x\le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ټ - $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2 \quad D_f=\{x\,|\,-2,5\le x\le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ث - ج - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x \quad D_f=\{x\,|\,-0,2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځايونه وټاکئ او ګراف يې تر شونې پولې پورې ښه وکاږئ. ارزښتجدول کيږدئ او ځنې ارزښتونه د جبشميري سره وشميرئ. ځنې صفرځايونه اټکل کړئ او که شوني وي، صفرځايونه وشميرئ.

الف- $f(x)=x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{3}x-1$ ب - $f(x)=0,01\left(x^3-x^2-x+1\right)$

پ - $f(x)=0,1x^3-0,3x^2-9x-10$ ت - $f(x)=(x-1,7)\left(x^2-3\right)$

تر ۶۴۰ پورې دلته محورغوځتېکيراځي؟

اړيکې "Relation":

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

یوه اړیکهٔ له دوه شیانو جوړه ده:

۱ – یوه وینابنه

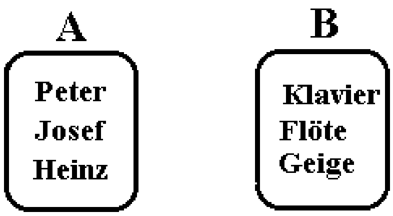
۲ – جوړه، چې دا وینا یې پوره کوي(چې وینابنه یوه رښتیا وینا کوي)۰

بیلګه :

دیوې کورنۍ د غړو ډیرۍ A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیرۍ۰

B	A
فوټبال	سپین
هاکي	
زیرګل	
والبال	
کوچۍ	

یا دا لاندې



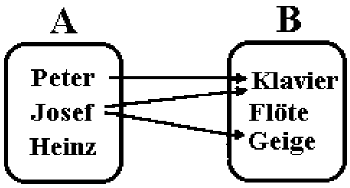
موزیک الي پیانو شپیلۍ ګایګي	 	د کسانونومونه: پتر یوسف هاینخ

د دواړو ډیریو په منځ کې یوه بینار وینابنه دې یوه وینابنه وي، چې سرۍ a اله bباندې لوبې کوي۰

جوړه ، چې وینابنه پوره کوي، کیدی شي د بیلګې په توګه لاندې جوړې وي:

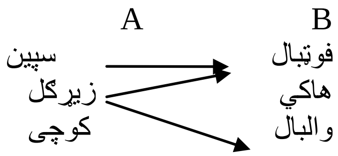
(c) ketabton.com: The Digital Library

پتر په کلاویر لوبه کوي، یوسف په کلاویر لوبه کوي ، یوسف په ګایګي لوبه کوي، د ځیرې په توګه اړیکي داسي انځورېږي:



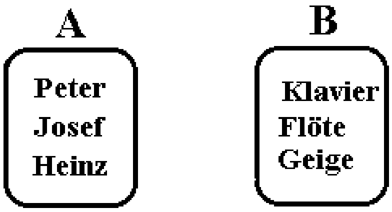
a spielt das Instrument b

یا دا لاندي



نورې بیلګی

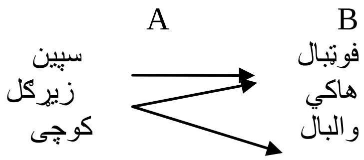
موږ د مخه دا لاندي ډیرى منځ ته ر اوړې:

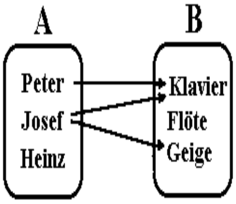


د دواړو ډیریو په منځ کې د اړیکو په ځیر موږ اړیکي «په اله لوبه کوي» راوړې یا دا لاندې

فوتبال	سپین
هاکي	زیړکل
واليبال	کوچی

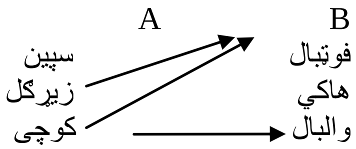
(c) ketabton.com: The Digital Library

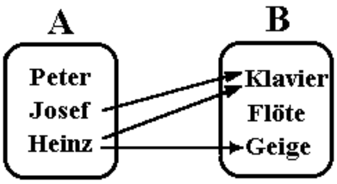




a spielt das Instrument b

په پورته کې ښوول کيږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي.
موږ اوس دواړه ډیرئ A او B ساتو ، مګر د دوي ترمنځ نوې اړيکې غواړو وپيژنو يا تعريف کړو:
بينار اړيکې دې اوس داسې وي، چې « اله لري» او « په اله باندې لوبه کوي» نور نهوي٠
د دې برسيره دې اړيکې « اله لري » لاندې درې جوړې ولرى :
هاينځ کلاوير لري
هاينځ يوه ګايګې لري
يوسف يوه کلاوير لري
د څيرې په څير انځور يږي:





a besitzt das Instrument b

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدلکیږي، چې د دوه ډیریو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي·

شننیزه انځورونه
مخ ته تیرو مخونوکې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بنه او یوه جوړه، چې دا وینابنه پوره کوي·
کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري·

بیلګه ۱
ډیرئ $A = \{ 1,2,3\}$ او ډیرئ $B=\{1,2,3\}$ دې ورکړ شوي وي· وینابنه کوچنی له یا لنډ >

هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې $(1/2),(1/3)$ او $(2/3)$ دا وینابنه پوره کوي· جوړو ګڼلو ته اړنه یو، بلکې دا د وینابنې مخ ته پرتې ډیرئ A او B ته·

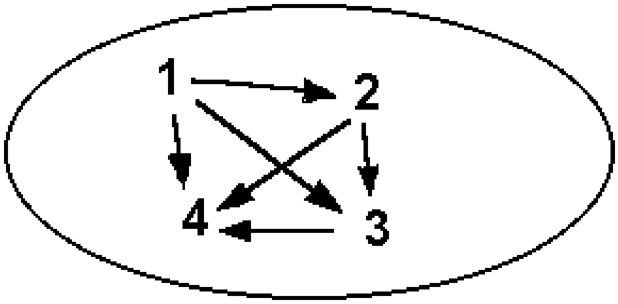
بیلګه ۲
په ځانګړې توګه دا هلته له پامه غورځول کیږي، چې ټولې جوړې وشمیري، کله چې وینابنو ته مخ ته پرتې ډیرئ یا ډېرې لویې وي او یا ناپای·
بیلګه : ډیرئ : $A = B = \{1, 2, 3, \ \dots \}$
وینابنه: له هغې، چې لیدل کیږي، چې بیخي ناشوني ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابنه پوره کوي·

بیلګه ۳
کله کله اړیکه بیخي نه شي انځوریدلی·
بیلګه : ډیرئ نارینه =M او ښځینه =F وینابنه کې راوستل شي، چه « واده له سره »·
دا څوک نه شي ګڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډیریو M او F کې ورکړ شوې·

د یوې اړیکې تیوپ یا ډول
اړیکه په دوه ګروپونو ویشل کیدی شي·
۱ – ددوه ډېریو ترمنځ اړیکې
۲ – د یوې ډیرئ په دننه کې اړیکې

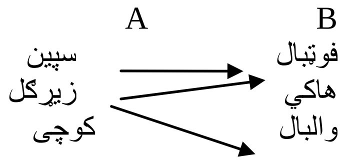
(c) ketabton.com: The Digital Library

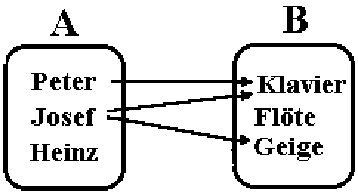
تیوپ ۱ – مورړ وپیژند
د تیوپ ۲ - لپاره بیلگه لاندې اړیکي دي(چې په څیره کي کښل شوي دي):



x له y څخه کوچنی دي

د مخ ته تیرو بیلگو په مخامخوالي یا تضاد دلته د ډیریو د توکو ترمنځ اړیکی پرتي دي
بنسټډیری ،موخه ډیری یا تر مخورشو پسي ورشو
Erklärungروښانه ونه
د ډیری A (بنسټډیری) او B (موخه ډیری) په اړیکو کي په رینتوني د مخ ته ورشو (پتر ،یوس) همداسي ورپسي ورشو (کلاویر، گایگي) اړیکي هغه توکي جوړوي، چې په کارونه کي ونده لري٠
A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي





Grundmenge: { سپین ، زیرگل، کوچی} : بنسټډیری
Zielmenge { فوتبال ، هاکي ، والیبال } : موخه ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

Vorbereich ترمخورشو {Peter, Josef} :
Nachbereich وروسي ورشو {Klavier, Geige} :

ځني شميرپوهان دا مخورشو او همداسي پسي ورشو، تعريفډيرۍ ،
ارزښتډيرۍ يا تعريفورشو همداسي ارزښتورشو بولي

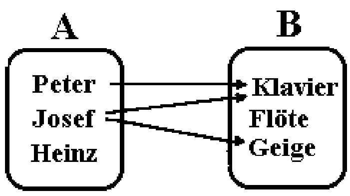
د اړيکو تختهRelationstafel

تراوسه مو تولي اړيکي د غشيدياګرام له لارې انځور کړل٠ يو شونوالی يا امکانات يې د اړيکو تختي له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټډيرۍ او موخه ډيرۍ توکي په يوه جدول کې ليکو ٠ د بنسټډيرۍ توکي په پورته ليکه کې ليکو اود موخه ډيرۍتوکي په کيڼ درځ يا کينه مته کې ليکو ٠

په صليبونه سره هغه پيژند يا تعريف ورکول کيږي، چې د موخه ډيرۍ په توکي باندې د بنسټډيرۍ يو توکی تنظيم شوی وي٠

د بيلګي په توګه بيرته همغه د ساز الو سره بيلګه راوړو



په دې پورې اړونده اړيکتخته په لاندې ډول ليدل کيږي

	Peter	Josef	Heinz
Klavier	x	x	
Flöte			
Geige		x	

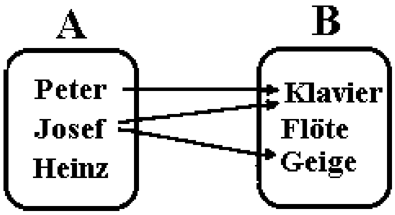
د کواوردينات سيستم انځوربنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

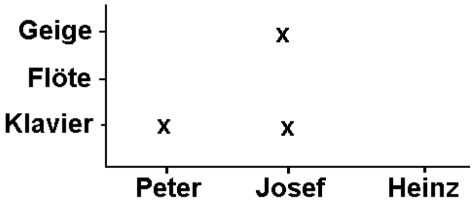
تراوسه مو اړيکې د غشيدياګرام او اړيکتختو له لارې انځور کړې. اوس یو دریم شوونوالی یا دریمه شوونتیا یا امکان غواړو وپیژنو:
انځورونه په یوه کواوردیناتسیستم کې :

د بنسټډیرۍ توکي د پروتمحور په نخښه کوو او د موخه ډیرۍ توکي په ولاړ محور په نخښه کوو .
د ټکو سره هغه د بنسټډیرۍ توکي او ورسره د تنظیمډیرۍ تنظیم توکو ټاکلي وي

بیلګه
د بیلګی په توګه بیرته هغه بیلګه د لوبو یا موزیک الاتو سره ټاکو:
دلته په دې لاندې الماني لیکنیپا ښه یې :خیره بسیا کړی شو

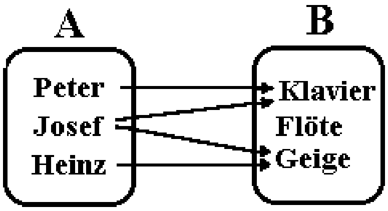


په کواوردیناتسیستم کې انځورونه داسې لیدل کیږي



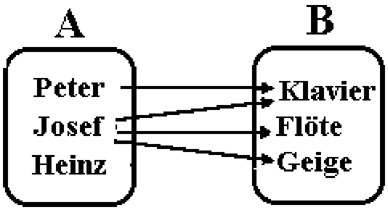
کڼ پوره کیدونکی اړیکې :
د Aخخه هرتوکی کم له کمه د B په یوه توکي تنظیمیږي(پیژندورشو یا مخ ته ورشو او بنسټیزه ډیری کټمټ دي)
ښي پوره اړیکې : دB هر توکی کم له کمه د خیري په توګه منځ ته راځي (پسې ورشو او موخه ډیرۍ کټمټ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



Linksvollständig

کیڼ پوره



rechtsvollständig

ښی پوره

ښی یواځنی اړیکې

د بنسټډیری (کیڼ) هر توکی په زیات ترزیاته د موخه ډیری (ښی) باندې تنظیمیږي۰

پام مرسته : غشي ښي « ښیلوریز) یواځنی دي۰

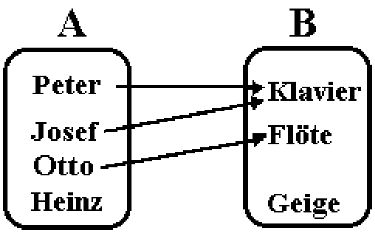
کیڼ یواځنی اړیکې :

د ښی ډیری هر توکی زیات ترزیاته یو وار د یوې ډیری (کینډیری) د خیرې په ډول منځ ته راځي۰

پام مرسته : غشي ښي لورته یواځني دي۰

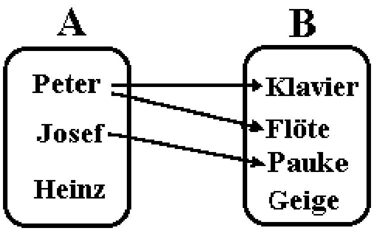
ناټیکوالی!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الې ورکړ شوي دي



rechtseindeutig

ښی



linkseindeutig

کیڼ یواځنی

یواځنی، .

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو کینپوره کیدونکی او بنی یواځنی اړیکي یواځنی اړیکي بلل کیږي (فنکشن او یا څیرونې)

په غشیدیاګرام کې یو فنکشن په دې پیژندل کیږي ، چې په هر توکی تیک یو غشی پیل کیږي

په ځت اړیکې : په ځپ اړیکو کې

۱ – مخ – او پسې ورشوګانې سره بدلیږي(پیژندډیرى او ارزښتډیرى)

۲ – اوښتونې سره بدلیږي

رفلکسیو اړیکې reflexive relations

دیاګرام : په هرتوکي یوکړۍ غشی شته

رفلکسیو اړیکې :

د رفلیکسو اړیکو پیژند : د هرو برابرو توکو جوړه اړیکو پورې اړ ج لري

د فرمو په څیر یې لیکنه : د تولو a لپاره باور لري:
aRa

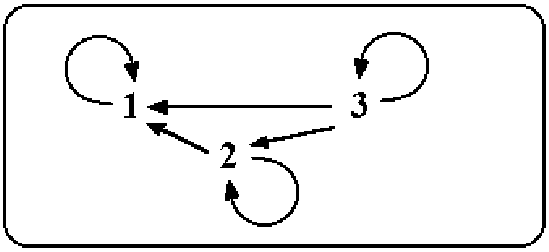
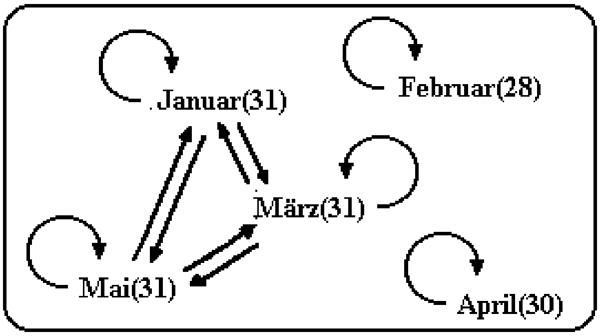


Bild: Die reflexive Relation ≥

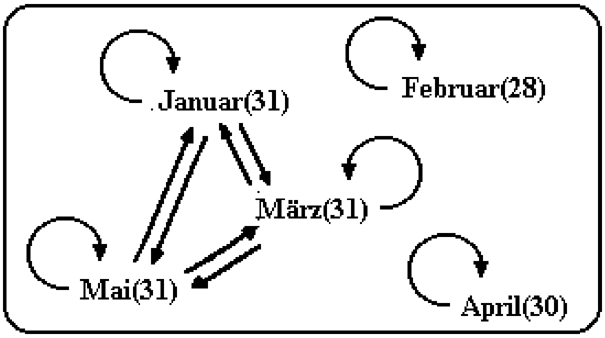
انتیرفلکسیو(ایرفلکسیو اړیکي
Antireflexive
(irreflexive)
Relationen

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند : په انتيرفلکسيو اړيکو کې په هيڅ توکي کړی غشی نه شته
د همغه توکي جوړه اړيکو پورې اړوند نه دی، يا په اړيکو ونډه نه لري٠
د فرمول په توګه ليکل يې : ¬(aRa)



سيومتريکي اړيکي : symetric relations
هر غشي ته په څټ غشی شته
که (a,b) اړيکو پورې اړه ولري ، نو (b,a) هم په اړيکو پورې اړه لري٠
د سيومري اړيکو ځيره: « همغومره ورځې لري لکه»



انتيسيومتري اړيکي: Antiasymetric reltions
د انتيسيومتري اړيکو دياګرام : په څټ غشی نه شته ٠
که (a,b) په اړيکو اړه ولري،نو (b,a) په اړيکو اړه نه لري، مګر که a = b وي٠

فرمول: a R b /\ b R a => a = b

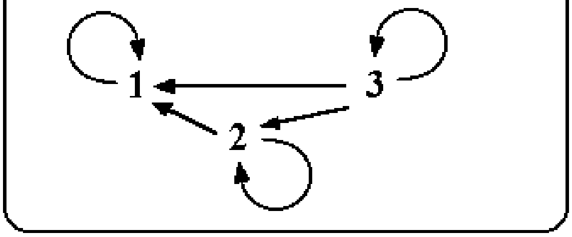


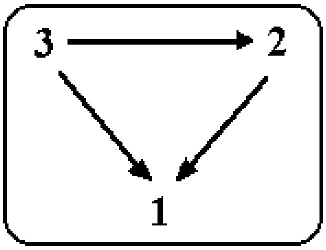
Bild: Die antisymmetrische Relation ≥

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناسیومتریک اړیکي پورته څېره :Antiasymetric reltions

اسیومتریکي اړیکي
asymetric relations (Asymmetrische Relationen)

د اسیومتریکي اړیکو دیاګرام نه په ښت غشی لري او نه کړي غشی لري٠
د اسیومتریکي اړیکو پیژند: انتیرفلیکسیو او انتیسیومتریکي اړیکي
فرمول : $\neg(bRa \Rightarrow aRb$

څېره: اسیومتري اړیکي	

خیره کونه یا توابع Funktionen

p

یادونه: په انرېزي کې mapping د او الماني کې DieAbbildung په نامه ن,مولشوي، چې پښتوماناا یې خیرونه یا څیره کونه ده.

فنکشندوه اوښتونپیا واریابلپلري، چې یوه خپلواکه اوبله یپواکه ده. له دېام له د فنکشن لهپاره ناسمد تابع نومورکړشویدی.

په ریاضي یا شمیرپوهنه کې خیرونه یا توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شميرپوهنه کې طبيعي ، تخنيکي يا هم نورو ورځنيو کارونو کې زيات وخت يوه لويه د بلې لوي په واک کې وي يا که غواړئ د هغې تابع وي، لکه د بيلګې په توګه د يوه موټر د بنزين سوزول يا استعمالول د هغه د تللې چټکتيا يا سرعت په واک کې يا تابع دی. دا ډول ساده اړيکې مو پخوا هم لوستلي او ګرافيکي مو په يوه کواوردينات – يا پروتولاړسيستم کې انځور کړي.

بيلګې:

د يوه شي يا جنس قيمتت د هغه د خرڅ شوې ډيرئ يا سټ په واک کې دی يا تابع دی.

ټوله دباندنئ تودوخي د ورځې د وخت په واک کې ده.

د يوه بايسکلځغلونکي وهلې لار په مساوي چټکتيا يا سرعت د تلنې وخت په واک کې ده.

د موټر د بريک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتيا په واک کې ده.

د يوه کوچني لوېدنه د هغه د عمر په واک ده.

د يوه رياضي ازموېنې نمرې د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د يوې بډايئ د ګټې قيمت يا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلې ګټې سره دوخت تيرېدنې په واک کې ده.

تمرين ۱ : د داسې يو په واکوالي يا تابعيت لپاره نورې بيلګې هم پيدا کړئ.

له پورته بيلګې څخه ليدل کيږي، چې هر دوه لويې سره تنظيميږي.

ډيرئ يا سټ ← وخت خرڅشوې سټ په قيمت اغيزه لري.

د ورځې وخت ← تودوخي. د ورځې وخت په اندازه شوې تودوخي اغيز لري.

د لاس ته راړلو ټکو تعداد يا ګڼون ← نمرې د يوې ازموېنې نمرې د لاس ته راړلو ټکو اغيزمن کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين ۲ : د پاتې بيلګو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرين ۱ کې مو ميندلي اړيکې پيدا کړئ.

دا يو له بل سره تنظيم شوي لويې متحولې(اووښتوني يا **Variablen**) بلل کيږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالی يا تابعيت د دوي په منځ کې شتون لري.

د رياضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مګر نه د نمرو د ټکو په واک کې.

سړی نمرې د بلواک يا تابع متحولو په حيث هم ښايي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حيث ښايي.

د ټکو او نمرو په منځ کې يو فنکشن يا بلواکيزې يا که غواړئ تابعيتي اړيکې شتون لري.

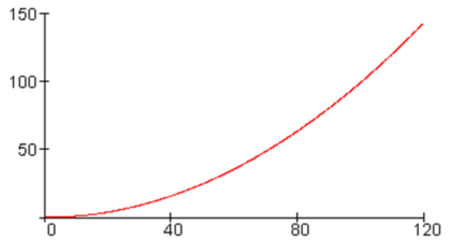
لکه د مخه درسونو څخه چې پوهيږو، ډېر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعيتي اړيکې تشريح کړو يا انځور کړو.

د مختلفو چټکتياو لپاره د بريک لار اندازه کيږي او يو ارزښت جدول ترتيبيږي.

چټکتيا په km/h(x)	20	40	60	80	100	120
د بريکنيولو لار په m(y)	4	16	36	64	100	144

که د جدول ارزښتونه په يوه پروت ولاړ – يا کواورديناټ سيستم کې وکښل شي، نو سړی ګراف لاس ته راوړي ورروسته له هغې چې ټکي يو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتيا او بريکلار ترمنځ اړيکې تشريح کوي.

د پراته محور ، چې ابسخيز هم بلل کيږي د خپلواکي متحولې x ارزښتونه پيدا کيږي، په ولاړ محور چې اورديناټ هم بل کيږي د بلواک متحولې y = f(x)ارزښتونه ميندل کيږي.



تمرين ۳ :   د ارزښت جدول سره سم په يوه مناسب پروتولاړ – يا کواورديناتسيستم کې اړونده ټکې وکاږئ او دا په يوه ګراف کې سره ونښلوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټا کئ.

پولیس یوه د90 m د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زیات وخت دا هم شوني ده چې فنکشنال یا تابیعي اړیکې د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري: $y = f(x) = 0{,}01\ x^2$

دلته $y = f(x)$ د بریکلار لپاره اینبوول شوی ا و دا وايي، چې y -کواوردینات په کواوردیناتسیستم کې د متحولې x په واک کې دی، یعنې د خپلواک متحولېx یو تابع دی یا په واک کې دی. تابعمساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د $f(x)$ تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

د تابع مساوات په ځاي هم وایو چې $f(x) = 0{,}01\ x^2$ د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\ x^2$ وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوې کار څخه کیدی شي ووایو:

پیژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولېx هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت $f(x)$ باندې- یا سره تنظیمیږي. سړی دا هم وایي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.

$$\underbrace{f : x \rightarrow \underbrace{f(x) = x - 1}_{\text{Funktionsgleichung}}}_{\text{Funktion}}$$

لیکنډول:f

پورته لومړیېی په پښتو: تابع برابرون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعنې فقط $f(x) = ...$ ی.

د تابع نوم f دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا $x \rightarrow f(x)$ ليکندود روښانه کوي، د هر x –ارزښت سره يو ټاکلی تابع ارزښت f(x)اړه لري.

تابع مساوات $f(x) = x - 1$ د شميرلو قاعده يا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنګه جوړيږي.

د دې لپاره چې د نظم يواځنوالی بيا وښايو، لاندې بيلګه راوړو:

هر زده کوونکی يو ټاکلی د بوټانو لويوالی لري. دلته حتمي ده چې زيات زده کوونکي به يو- - يا هماغه د بوټانو لويوالی ولري.

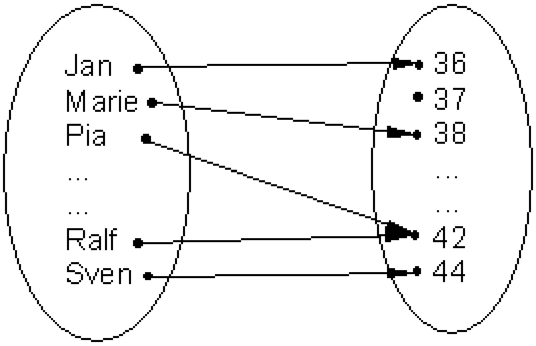
يواځنواوالی په زده کوونکو اړه لري ← د بوټانو لويوالی.

د متحولو سره کښلی يا ليکلې دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په ګوته کوي او هغه سره تنظيم شوې د بوټانو لويوالی بلواکه يا تابع متحوله جوړوی.

معکوس يا په څټ د زده کوونکو تنظيم يواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بيلګې په توګه ۴۲ نمرې د بوټانو لويوالی لرودی شي.

دا ډول تابع د تابعمساوات نه لري، دا کيدی شي چې د ډېرئ ځيرې يا سټعکس په ځير انځور شي.

يواځنی نظم(تابع يا فنکشن)

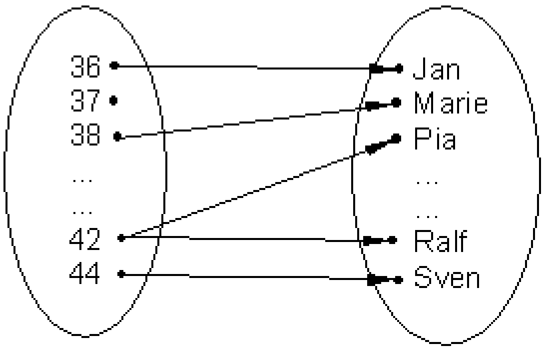


د بوټانولويوالی ډېرئ ياسټ   د زده کوونکو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

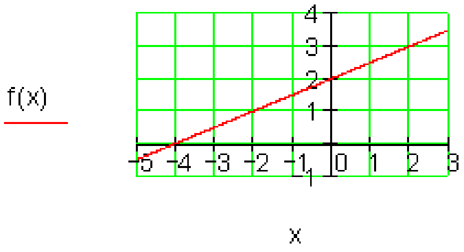
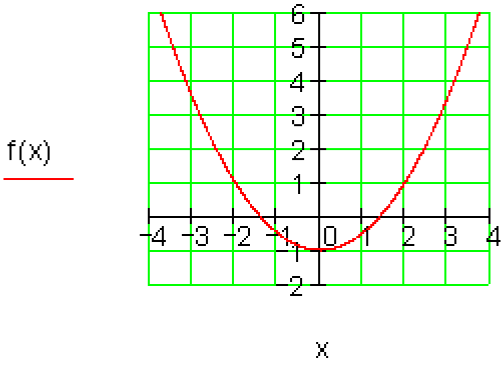
(ارزښت ډېرى) (تعریفډېرئ)

نظم یواځنی نه دی (تابع نه دی)



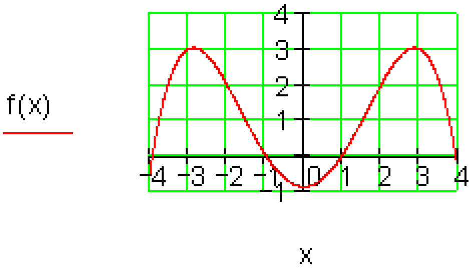
د دواړو ستونو بدلول

د ریاضیکي توابعو او تابعمساواتو بیلګي (له کینږ و ښي لورته)

$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 2$  کرښیز مساوات(ګرښنه (	$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$  مربع مساوات(پارا بل)

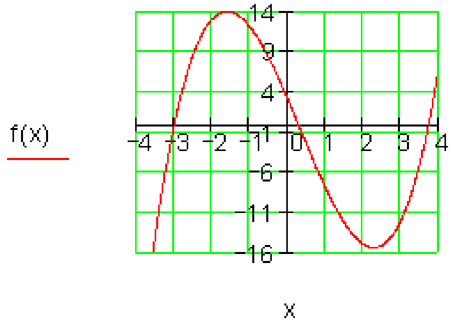
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-7}{120}\cdot x^4 + \frac{23}{24}\cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



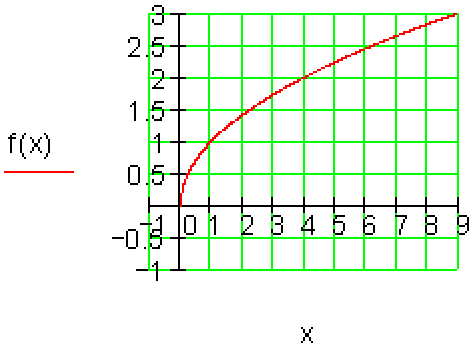
د څلورمې درجې پولراشنل تابع

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



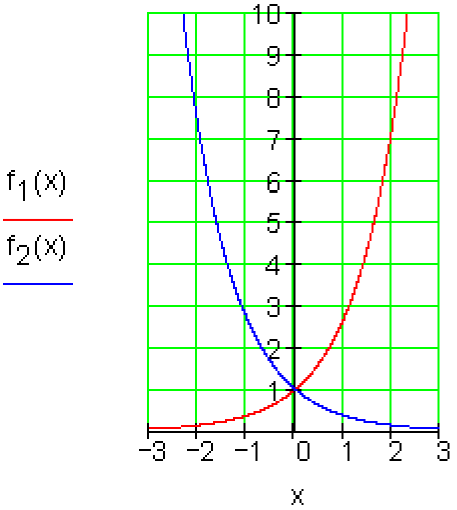
د دریمې
درجې
پولراشنل تابع

$$f(x) := \sqrt{x}$$



ریښه تابع

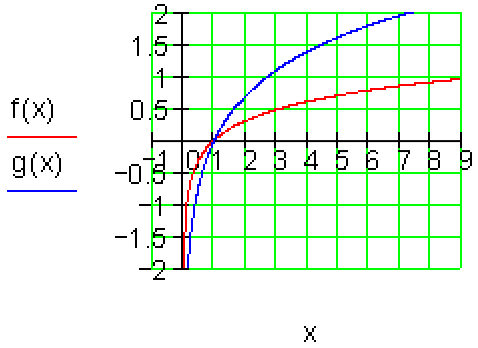
$$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$$



اکسپوننشل تابع

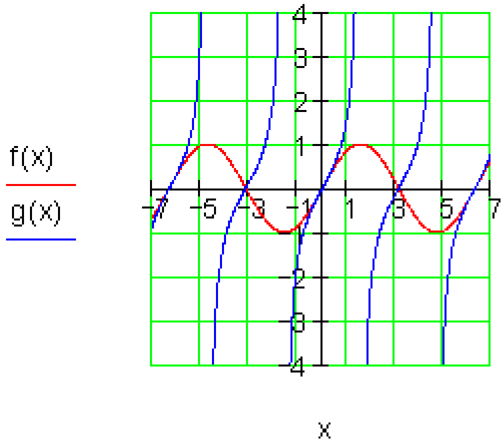
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \log(x) \qquad g(x) := \ln(x)$



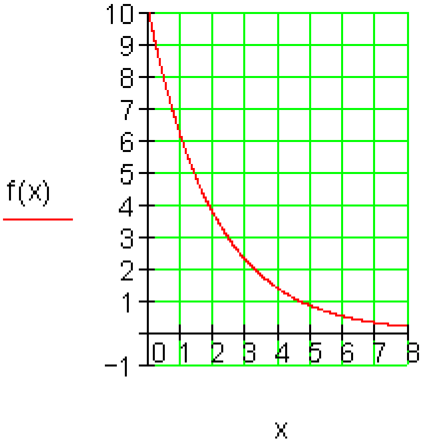
لوګاريتمتابع

$f(x) := \sin(x) \qquad g(x) := \tan(x)$



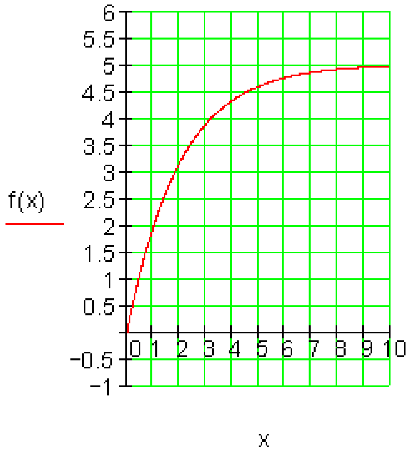
تريګونومتريکي(مثلثاتي) تابع

$f(x) := 10e^{-0.5 \cdot x}$



اکسپننشلي کښته کيدنه

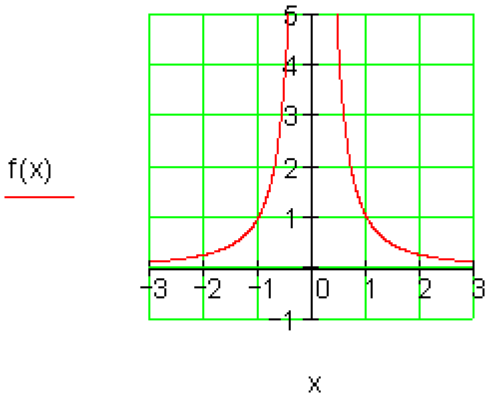
$f(x) := 5 \cdot \left(1 - e^{-0.5 \cdot x}\right)$



اکسپوننشل مربنتکره

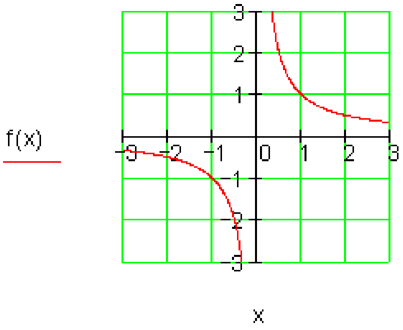
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \frac{1}{x^2}$



های پارابول محورسیومتریک

$f(x) := \frac{1}{x}$



های پارابول ټکی سیومتریک

تعریف- او ارزښتډېرئ یا - سټ

تعریف(پیژند):

د یوه تابع تعدریفسټ **D** د ټولو خپلواکو متحولو ډېرئ یا سټ ده، د کومو لپاره چې تابع تعریف دی.

ارزښت ډېرئ **W** د ټولو تابع ارزښتونو- یا بلواکو - سټ ده، چې د D له ټوکو منځ ته راځي.

بیلګه:

$f(x) = \frac{1}{x}$ تعریفست $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ تعریفست D=R

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره د وېش اجازه نه شته	Rد حقيقيي اعدادو ډېرئ ده

بيلګه:

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}\,;\, W = \mathbb{R}_+$ د تابع ارزښت په حيث فقط مثبت يا زياتيز ارزښتونه رامنځ ته کيږي	$f(x) = x+1 \quad D = \mathbb{R}\,;\, W = \mathbb{R}$ تابع هر په خوښه ارزښت نيولی شي.

شميرپو هنيزه ليکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$ د خپلواکو متحولو د ارزښت x = 4 لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه (7 | 4)په کواورديناتسيستم کې د ټکي (7 | 4) P کواورديناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$ غوښتونی د x -ارزښت دی، چې په هغه پورې تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$ د x = 5 لپاره تابع ارزښت دی.

ټولګه:

يو يواځنی نظم، چې په هغه کې د تعريف سټ D څخه خپلواکه متحوله x ټيک يو تابع ارزښت f(x) باندې تنظيم شي ځيرونه (چېمورړ يې تابع بولو) يا فنکشن بلل کيږي.

تابعي(خپلواکيز) يا فنکشنلي اړوندوالی د يوه تابع مساوات(د بيلګې په توګه: f(x) = 2x + 1) سره ليکل –يا تشريح کيږي.

تابع مساوات کې د x –ارزښتونو په اېښولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د x -ارزښتونو سره يوه ارزښت جدول کې ايښولی يا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردينات سيستم کې ټيک يو ټکی په ګوته کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په زياتو حالتونو کې کيدی شي دا منځ ته راغلي ټکي يوه ګراف ته سره رايوځای يا وتړل شي.

د ټول x - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعريف ډېرئ يا ـسټ بلل کيږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ يا ـسټ، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ W پورې اړه لري.

د تمرينونو حل

لومړی تمرين: د داسې بلواکوالي لپاره نورې بېلګې پيدا کړئ.

ځواب: - د يوه تيلسوزونکې ماشين قدرت د څرخونتعداد(د ماشين د څرخيدو تعداد) په واک کې دی.

- د يوې ګردئ يا دايرې سطحه د وړانګې يا شعاع په واک کې ده.

- د بريښنا پيسې د ثابت قيمت سره د انرژي يا بريښنا مصرف په واک کې ده.

دويم تمرين : د پاتې بېلګو او د هغو لپاره چې تاسو په لومړي تمرين کې وليدل ګډې اړيکې سره په فرمولبندۍ کې راوړي.

ځواب:

لار → د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتيا د خوزښت وخت په وهلې لار اغيز لري.

بريکلار → چټکتيا: د يوه موټر چټکتيا د بريکلار باندې اغيزه لري.

ټوله ګټه → د تيريدني وخت: د سرمايې ايښونې وخت د ګټې لاس ته راوړنه باندې اغيزه لري.

وده → عمر: د کوچني عمر د هغه په وده اغيزه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

قدرت ← ځرخونتعداد: د یوه سوزونکي ماشین د تیلو سوزیدنه د هغه په ځرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه ← وړانګه : د ګردئ یا دایرې وړانګه د دایرې سطحه باندې اغیز لري.

د بریښنا حساب ← انرژي ستې: د سوزولې بریښنا یا انرژئ ستې یا ډېرئ د بریښنا بل(هغه د مصارفو کاغز) اغیزمن کوي.

دریم تمرین:په یو مناسب کواوردیناتسیستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکاږئ او دا یوه ګراف ته سره وتړئ.

د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بریکلار پیدا کړئ.

پولیس یوه د 90 m بریکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتیا سره تلی؟

ځواب:

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

تلنلار: په کواوردیناتسیستم یا پروتولاړ سیستم کې د x -محور(ابسځیزا) د خپلواکو متحولو ډېرئ نمایندګي کوي، د y –محور (اوردینات) د بلواک یا تابع متحولو نماینده ده.

د مخه له دې چې په یوه کواوردیناتسیستم کې ارزښتونه لیکل –یا کښل کیږي باید وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- یا تابع متحوله ده.

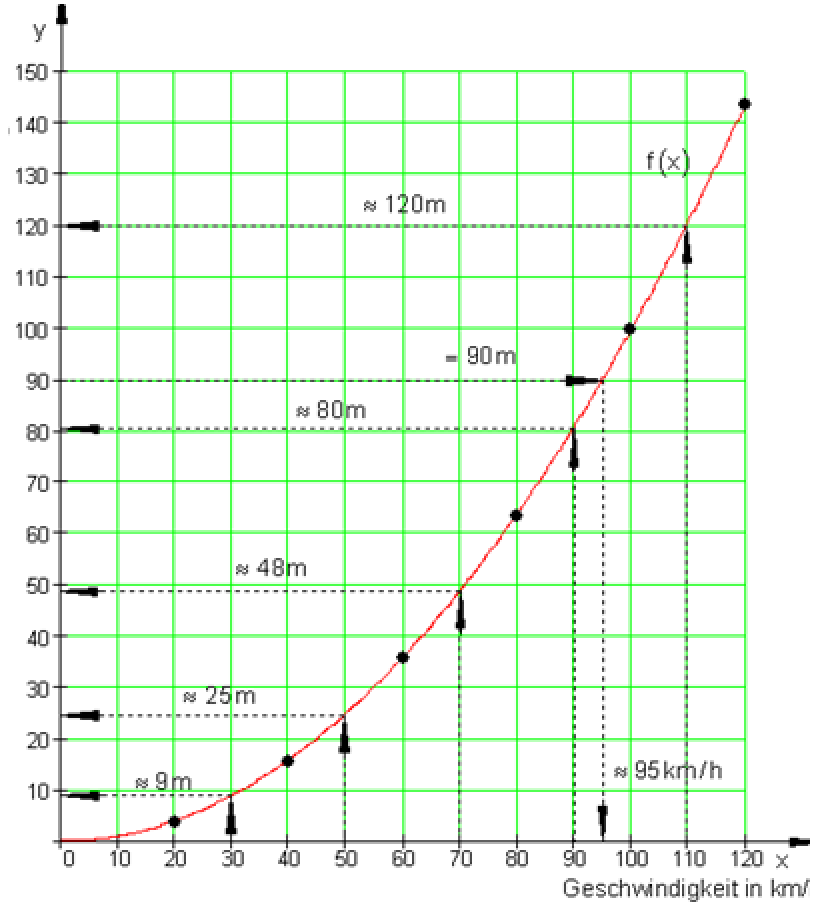
(c) ketabton.com: The Digital Library

پسې دا هم غوره ده، چې د کچونې لپاره يوو بنه کچونى يا هغه اله چې اندازه پرې کچوو بايد ومومو.
د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کټل کيږي او پرېکړه کيږي چ دواړه محوررونه په څو برخو بايد وويشل شي.

وروسته له هغې چې ټول په جدول کې ټکي په کواورديناتسيستم کې ځاى په ځاى شوي، نو بيا دا ټکي د ګراف په توګه سره ترل – يا نښلول کيږي

کيدى شي له ګراف څخه د داسې x -ارزښتونو لپاره هغه لړ يا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چې په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کيدى شي د يوه ټاکلي تابعارزښت اړونده x -ارزښت ولوستل شي. د دې نتيجو ټيکوالى د دې په واک کې دى، چې ګراف څومره ټيک کښل شوى دى.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته کواوردينات – يا پروتولاړسيستم کي: پروت: چټکتيا په کيلومتر. ولاړ:بريکلار په متر

ځلورم تمرين:

لوستل شوي ارزښتونه وشميرئ، که تابع مساوات $f(x) = 0,01\,x^2$ وي.

ځواب:

تابعارزښتونه داسې شميرلکيږي، چې اړونده د x ارزښتونه په تابع مساوات کې کيښوول شي.

$$f(x) = 0,01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0,01 \cdot 30^2 = 0,01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0,01 \cdot 50^2 = 0,01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0,01 \cdot 70^2 = 0,01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0,01 \cdot 90^2 = 0,01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0,01 \cdot 110^2 = 0,01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتيا بريکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتيا بريکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتيا بريکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتيا بريکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتيا بريکلار 120 m ده

له 90 m بريکلار سره يو موټر 95 km/h د چټکتيا سره ځغلي.

بريکلار 90 m کچ شوې ، غواړو چټکتيا پيدا کړو.

پيل: $f(x) = 90 \Leftrightarrow 0,01x^2 = 90$ دا مساوات په x پسې ځواب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0{,}01x^2 = 90 \,|\, :0{,}01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94{,}9$$

نسبت و پوښتنې ته فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه موخه ور دي، ځکه چې موږ مثبته چټکتیا په پام کې نیسو. د 90 m بریکلار سره د موټر چټکتیا 94,9 km/h وه.

یادونه:لومړی شمیرنه تیک ارزښتونه راکوي، سره له دې هم موخه وردی، چې دا شمیرل شوي ارزښتونه په ګراف کې یا له ګراف ځخه هم د لوستلو له لارې کنترول کړو.

پوښتنې

تابع I

لومړی:

تول ټکي په کواوردینات سیستم کې په نخښه کړئ، چې کواوردینات یې ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

الف- $y \le -1 \wedge x \ge 1$ ب- $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \le x \le 3$ پ- $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت - $0 \le x \le 4 \wedge y \ge 0$ ټ- $|x| \ge 1{,}5 \wedge |y| \le 2$ ث- $y > 0 \wedge x = -1$

دويم: په مناسب کواوردینات سیستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$$A(40\,|\,220);\ B(10\,|\,250);\ C(200\,|\,300);\ D(80\,|\,240)$$

ایا د x – او y -کواوردیناتو ترمنځ کومې اړیکې شته؟ د دې لپاره یو ترم ولیکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دريم: د ټکو ځای وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- ټکي $P_t\left(t-1 \middle| \frac{1}{t+1}\right)$ د t€R کوم ارزښت په لومړئ څلورئکې پروت دی؟

ب- ټکي $Q_t\left(t \middle| t^2-1\right)$ د t€R کوم ارزښت لپاره دx محور کښته لور ته پرته ده؟

څلورم:

د ټکوډېرئ يا –سټ $A=\left\{(1|3);\left(2\middle|\frac{3}{2}\right);(3|1);\left(4\middle|\frac{3}{4}\right);\ldots\right\}$ ورکړ شوی دی.

د A نور دري توکي ورکړئ او دا ټکي په يوه کواوردينات سيتم کې وکاږئ. ايا د x- او y -کواورديناتونو ترمنځ اړيکی شته؟

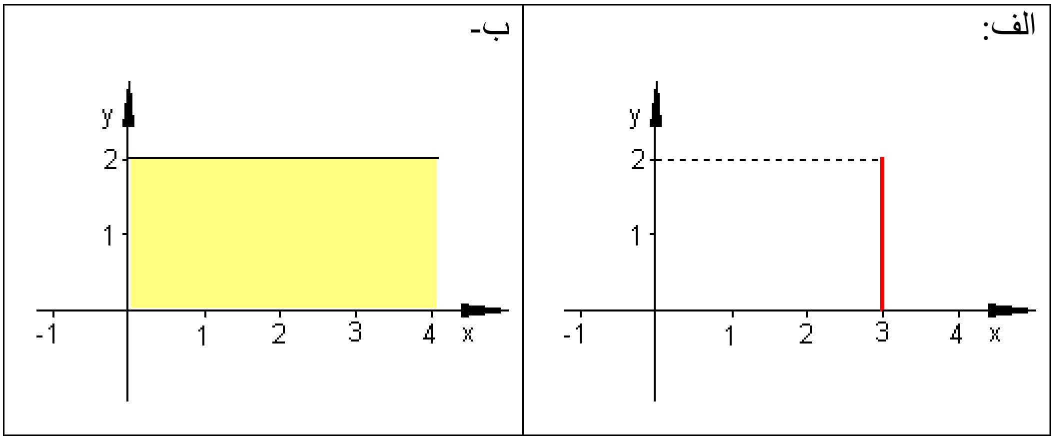
پنځم: يو ټکی $P\left(t \middle| \frac{t}{2}+3\right)$ د t€R سره ورکړشوی دی.

د t لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د دې اړونده ټکي په يوه کواوردينات سيستم کې وکاږئ.

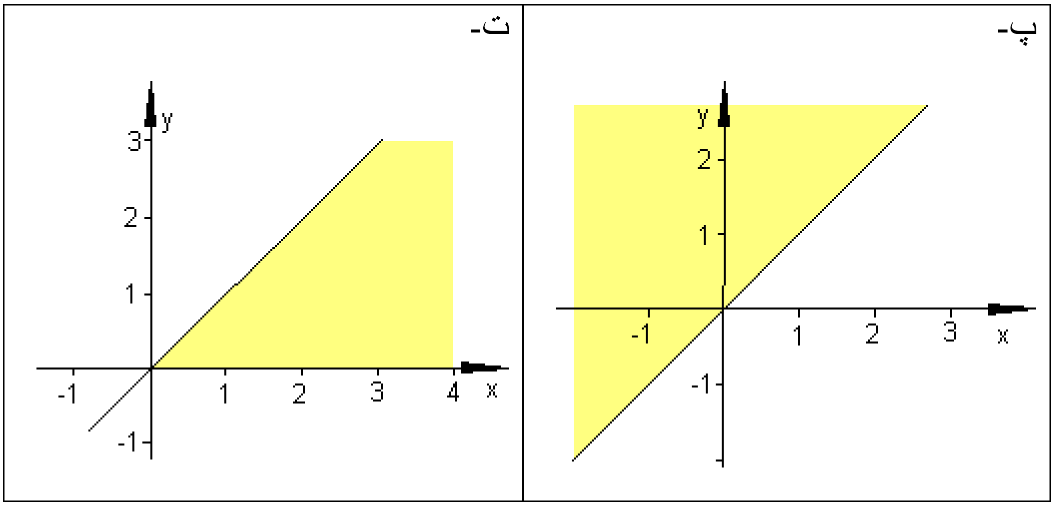
د کومو t -ارزښتونو لپاره باور لري:

د ټکي P د x -کواوردينات د ټکي د y -کواوردينات سره برابر دي؟

شپږم: په نخښه شوې کرښه او همداسې سطحه تشريح کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library



پوښتنې

توابع II

لومړی

ښاغلی برګ د یوه ملفون(لاسي یا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرایطو سره وکړ:

د میاشتې 20 € ، د تلفون قیمت په دقیقه 0,35 € .

الف- که دی 80 ,40 یا 120 دقیقي تلفون وکړي، نو میاشتنی حساب به یې څومره جګ وي؟

ب - لګښت لپاره یو ترم ولیکئ چې په دقیقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ – اړیکې ګرافیکي انځور کړئ.

دویم:یوه الوتکه د سوزونموادو کیروزین 10500 Liter لیتره زخیره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په ليتر مصرف جدول جوړ کړئ. يو واټن له 0 km تر 5000 km پورې وټاکئ.

ب – اړيکې يې ګرافيکي څور کړئ.

پ-له څومره کيلومتره وروسته به زخيره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خونديونې په واکوالي کې وټاکئ.

دريم: يو د شميراړونې جدول جوړ کړئ، چې ^{0} څلزيوس (^{0}C) په فارنهايت(^{0}F) اړوي د 20^{0}C - او 60^{0}C په ساحه يا ورشو کې. د دې لپاره اړين داتا تشريح کړئ. اړيکې ګرافيکي انځور کړئ. دا اړيکې کوم ترم په ګوته کوي؟ د ا د تبې تودوخئ کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تبې په اندازه کئ چې ده ايا دا حرارت يا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: يوه د مالونو ليږلو مغازه غواړي لګښت له امله يو د تحفې پاکټ وليږي. د پاکټولو تخنيکي پرابلم له امله يې يو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لګښت نظم بايد په پام کې نيول شوی وي

د لګښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هيواد کې.

خورا کوچنئ کتله(يا بهتره ډکی): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جګوالی 1 cm .

خورا جګه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm يا اوږدوالی جمعه يې سور جمعه يې يا په ورزيات جګوالی = 90 cm. خورا زيات وزن 2 kg.

الف- د يوه ډکي ياحجم $V = 21\ dm^3$ لپاره د سور او جګوالي ترمنځ اړيکې وټاکي.

ب- دا ماکسيمال رسيدلوړ ډکی يا حجم څومره لوي دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش ځنګه تغير خوري، که کوچنی شي.

ب- ايا لاندې اړيکې به د فرمول له لارې تشريح شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

A : د کرايي موټر ټول لګښت د عدد a د تللی کیلو متر او د هغه د یوه کیلو متر د قیمت c لپاره.

B : د ودرېدلو لار یا واټن a د بریکلارb او عکس العمل لارc څخه شمیرل کیږي.

پ-شي اړیکې ورکړئ چې د فرمول له لارې تشريح کیدی شي یا روښانه کیدی شي.

شپږم: یو ولاړګوډیز یا مستطیل U = 12 cm چاپیریال یا محیط لري.

الف- اړخونه څنګه یو د بل په واک کې کیدی شي.

ب- یو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ a څخه ورکوي یا د اړخ a په واک کې یا تابع دی.

پ- د a د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لویه وي؟

پوښتنې

توابع III

لومړی: توابع f(x) ورکړ شوي. یو مناسب ارزښتجدول وکاږئ. دې ته ا ړوند ګراف رسم کړئ.

الف - $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ب - $f(x)=x^2$ پ - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ت- $f(x)=3^x$

دویم: فکر وکړئ، چې ایا یو ،،یواځنی نیظم،،د $x \rightarrow y$ لپاره مخ ته لرو: $x^2+y^2=1$

دریم: ټکی P ورکړ شوی دی. ایا یوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لویه تعریفسټ یا – دېرئ هم وټاکئ.

$$P=\left\{(2|1);\left(5|\frac{1}{4}\right);\left(10|\frac{1}{9}\right);\left(25|\frac{1}{24}\right);\ldots\right\}$$

څلورم: یو ارزښتجدول ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ:

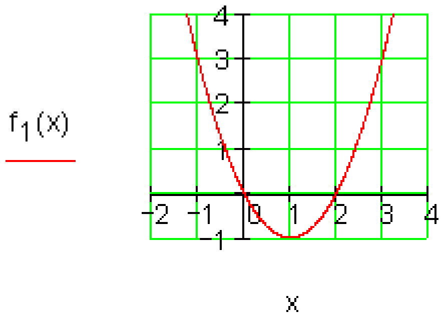
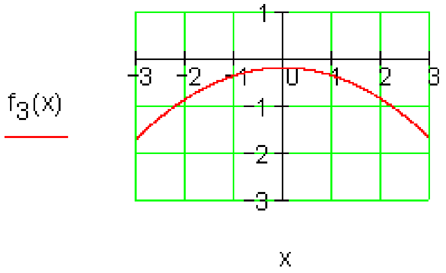
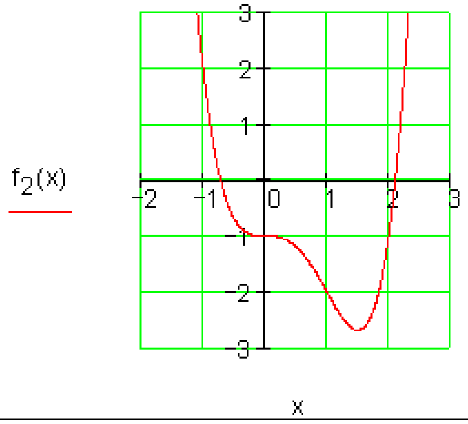
$$f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3-2x-4\right);\ x\in\mathbb{R}$$

الف- د جبشمیري سره f (3) او f (- 2) وشمیرئ.

ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت 1 دی؟
ت-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت کمیز یا منفي دی؟
ټ-د کومو x -ارزښتونو لپاره باور لري:1 > f (x) کړئ، چې د کوم تابع لپاره باور لري:
پنځم: د درې توابعو f1, f2, f3 گراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:

 	الف- د تابع ارزښتونه هر چیرته صفر دي. ب- توابع په انتروال [0,5 ; 1] منفي یا کمیز دي پ-.f (2) < f (0) ت-.f (0) = - 1 ټ-.f (- 2) = f (2)
 	

پوښتنې

توابع **IV**

لومړی: تابع f ورکړ شوې د f(x) =-0,2(2-x); x€R سره

پرېکړه وکړئ، چې ایا لاندې ویناوې رښتیا او که نارښتیا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيل ځواب مدلل کړئ.

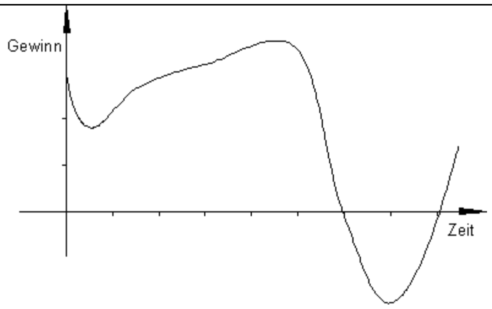
الف- د تابع ارزښتونه زياتيز يا مثبت دي د ټول x – ارزښتونو لپاره.

ب- $f(x) < 0$ د ټولو $x€R$ لپاره.

پ- $f(x)$ د $x = 2$ لپاره منفي دی.

ت- يو ځای u شتون لري، چې د هغه لپاره $f(u) = f(u + 1)$ باور لري.

دويم: د رسم شوي تابعګراف تلنه تشريح کړئ. دلته هغه غوره ټکي په نخښخه کړئ. هغه ټکي، انتروالونه روښانه کړی يا تشريح کړئ په کومو کې چې ته اقتصادي پسمنظر(د شاته پراته دليل) فرمولبندي کوې.



کواوردیناتسیستم کې : پروت: وخت. ولاړ: ګټه

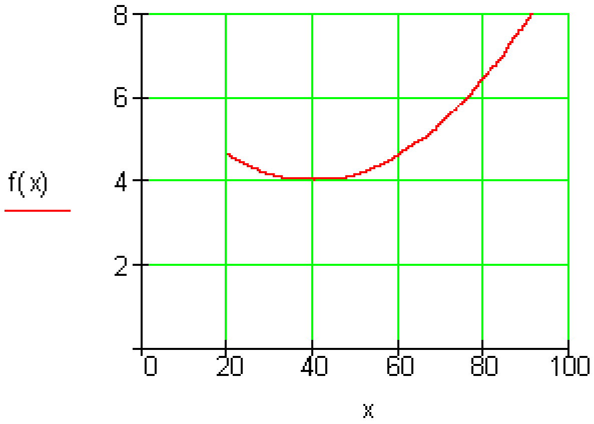
دريم: د يوه موټر د تيلو سوزول د چټکتيا په واک کې يا تابع دی. دا په څنګ کې ښيره د تيلو سوزول ښايي په ليټر په سل کيلو متر کې او د چټکتيا په واکوالي کې، که سرې په څلورم ګير Gang کې لاړ شي.

الف- کړه يا منحني روښانه کړه.

ب- په کومه چټکتيا کې استعمال ۶ ليتره په سل کيلومتر کې دی؟

پ- په کومه چټکتيا کې د تيلو سوزښت خورا کم دی؟

ت- کړه به څنګه وځغلي، که په دريم ګير کې سرې لاړ شي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د لمبا په ډنډ کې $40\ m^3$ اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقیقه کې 350 Liter لیتره اوبه وځي.

الف- یو ترم د پاتې حجم یا ډکې لپاره په m^3 وټاکئ.

ب- څومره m^3 د ۲۰ دقیقو وروسته په لمباډنډ کې لا پاتې ي.

پوښتنې

توابع V

لومړی:د تابع f(x)ماکسیمال تعریفورشوD_{max} پیدا کړئ

الف- $f(x) = 2 - 3x$ ب - $f(x) = \sqrt{2x - 3}$

ث- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ت - $f(x) = -x^2 + 1$

دویم: د تابع f(x) ارزښتورشو وټاکئ د $D = D_{max}$ سره.

الف- $f(x) = \dfrac{3}{2}x - 4$ ب - $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

پ - $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ت - $f(x) = x^2 - 5$

دریم: تابع f(x) ورکړ شوې ده. ماکسیمال تعریفورشوD_{max} وټاکئ. د f(x)ګراف وکاږئ.

د $x \in \left\{k\,; -\dfrac{2}{k}\,; k+1; k-4\right\}$ لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

الف- $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ ب - $f(x) = 2x - \dfrac{2}{x}$ پ - $f(x) = x - x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ټ - $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ث - $f(x)=2^{x}-1$

څلورم: تابع $f(x)$ د $f(x)x^3$ سره ورکړشوې ده.

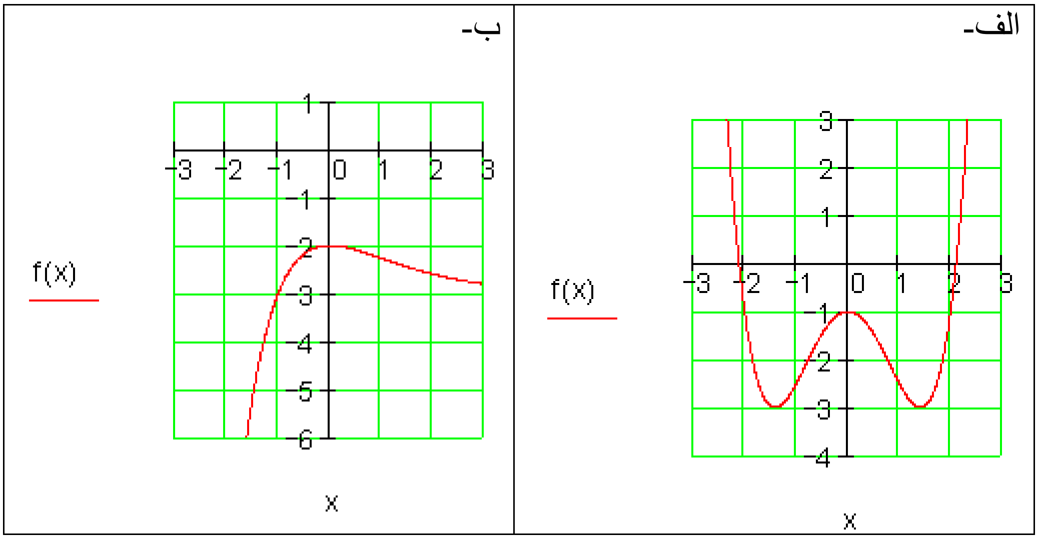
الف- ماکسیمال تعریفورشو D او ارزښتورشو W ورکړئ.

ب- د کوم $x \in D$ لپاره باور $f(x)=81$ لري؟

پ-د کوم $x \in D$ لپاره باور $f(x)\geq 9$لري؟

ت- و ښایئ: $f(x+1)=3.f(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره.

پنځم: تابع $f(x)$ د $D = IR$ لپاره تعریف ده. د رسمونو څخه ارزښت ډېرئ وښایئ.



پوښتنې

VI توابع

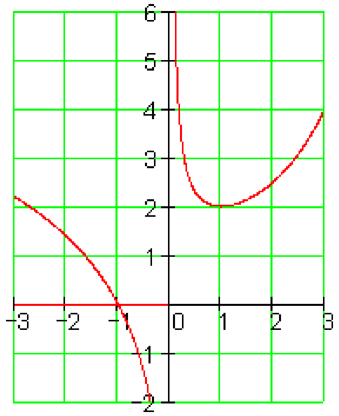
لومړی: د تابع$f(x)$ ارزښتښت د جبشمیري سره وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

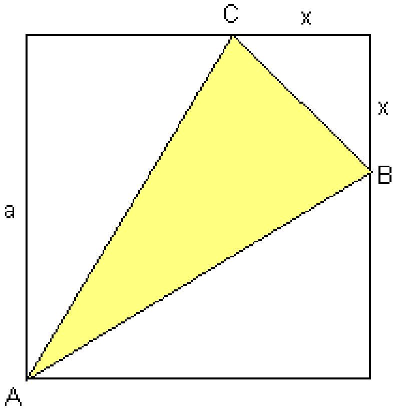
سرلیک

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{2}{5}x^3-2$$ د D=R سره.

دويم:

	دويم: ترڅنګ کړه د تابع f(x) ګراف دی؟ ايا f(x) د ټولو x€R لپاره تعريف دی؟ د x د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت - له 2 لوي دی؟ - له صفرکوچنی دی؟

دريم:

	يوه مربع يا څلورې د اړخ اوږدوالي a = 5 cm سره ورکړ شوې ده. د مثلث يا دريګوديABC د سطحې ترم A(x) وټاکئ

څلورم: د يوه مالک ټول لګښت K د يوه لاسته راوړنې سټ x په واکوالي کې په سټ واحد يا ډېرئ يوون (ME) د ترم له لارې ليکل کيږي

$$K(x)=0{,}01x^3-x^2+100x+720$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- د x -ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لګښت وشميرئ. يو مناسبتلنلارې ډول وټاکئ او د ټول لګښت ليدخيره رسم کړئ.

ب- د هر سټ – يا ډېرې واحد خرڅلاو99 پيسېواحده دی. لاس ته راونې (د پيسو ځومره دې، که x(ME د سټ واحد) په بازار کې خرڅ شي؟

په لرلې کواورديناتسيستم کې د خرڅلاو(پيسو) د ليدلو ځيره و کاږئ.

پ-د ليدخيرې څخه ولولئ:

په کومه ورشو يا ساحه کې ګټه منځ ته راځي؟ د کوم x –ارزښتونو سره به خورا لويه ګټه لاس ته راشي؟

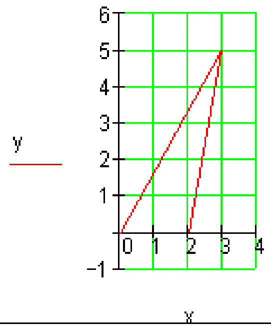
پوښتنې

توابعVII

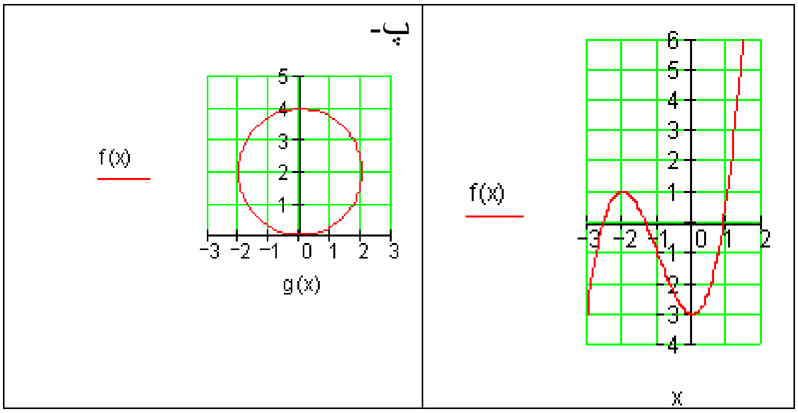
لومړی: توابع f(x) ورکړشوې دي. يو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند ګراف وکاږئ.

الف- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب- $f(x) = x^2$

دويم: کوم ګراف په تابع $f : x \to f(x)$ پورې اړه لري؟ دليل يې راوړئ.

الف-	ب –
	

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم:د شمیرپو هنیز لنډ لیکدود سره يې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای3 کې تابع f(x) تابعارزښت 12 لري.

ب- د تابع f(x) له لاري د x -ارزښت سره عدد 4- تنظیمیږي.

پ-ټکی P (2 | 5) د f(x) په لیدخیره باندي پروت دی.

ت- f(x) د کومو ابسځیزا یا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د f(x) تابع تابع ارزښت له 7لوی دی د ټول $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

ث- تابع f(x) د 17- ځای کې تا بع ارزښت 9 نیسي.

ج- توابع f او g د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

چ- په کوم ځای x کې fد تابعارزښت gد له تابعارزښت څخه کوچنی دی؟

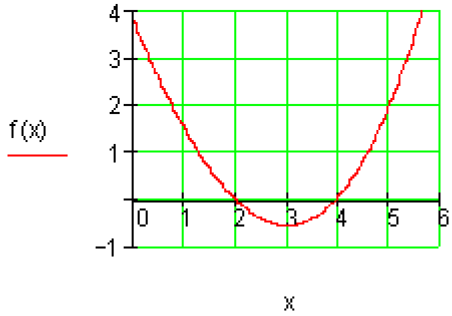
ح- د تابع f(x) د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

خ- د یوه کرښي ټکي K_f کواوردیناتونه سره سر خوري.

څلورم: د یوه نظم لپاره د یوي روځنۍ بیلګي نوم واخلئ، چې هغه تابع وي یا تابع نه وي.

پنځم: دا ترځنګ کره یا منحني د تابع f(x) ګراف دی. له ګراف څخه ولولئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف-د تابع ارزښت په ځای 5 کې

ب- يو ځای د f(x) سره.

پ-په کوم ورشو $f(x) > 0$ باور

لري؟

شيرم:کوم ارزښت جدول يوه تابع پورې اړه لري؟

الف -

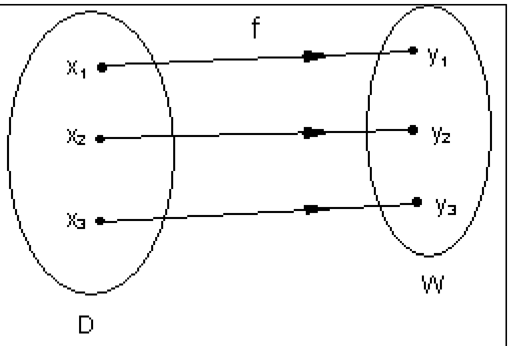
x	−1	0	1	2	3
y	4	0	−2	4	4

ب -

x	−1	0	3	3	4
y	8	7	2	4	5

توابع او په ښت - يا معکوس توابع

تولیز:



د f د نظم قانون د تابع مساوات له لارې افاده کيږي، لکه د بيلګې په توګه

$$f = \{(x|y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

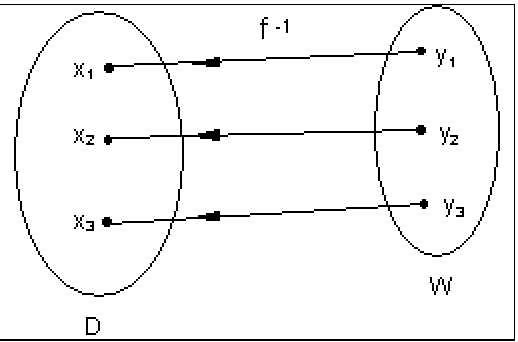
يا په لنډه توګه:$y=f(x)=2x+3$

د يوه تابع د يو-يواځنوالي د f^{-1} يو-يواځنی نظم هم شتون لري.

دا نظم معکوس تابع يا په ښت تابع يا انورز inverse تابع بلل کيږي، لکه د بيلګې په توګه.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

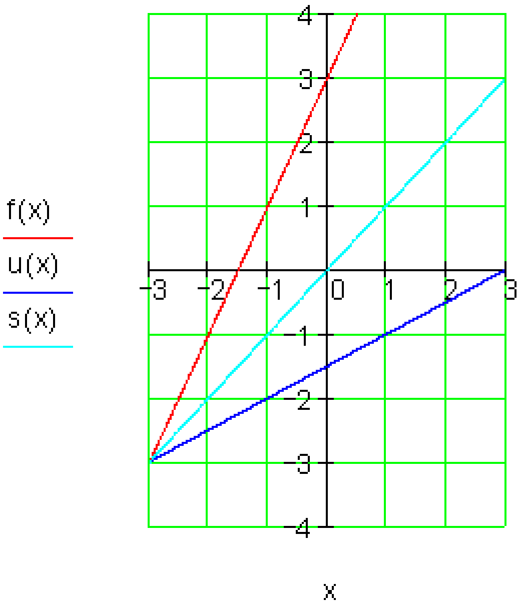
(c) ketabton.com: The Digital Library



د کرښيز توابعو معکوس توابع

تابع: $y = f(x) = 2x + 3$ $x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$ $\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$ $\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$ $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ معکوس تابع: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$	تابع $y = f(x) = 2x + 3$ ورکړ شوی غوښتنه معکوس تابع f^{-1} او د هغه ګراف ده تابع **f** جګوالی $m = 2$ لري. دا د خپل ګراف سره پروت محور په ټکي $P_x(-1,5 \mid 0)$ کې غوځوي او ولاړ محور یا اوردينات په ټکي $P_y(0 \mid 3)$ کې غوځوي. د هغه ګراف کرښه ده. که د تابع اووښتوني یا متحولې يو له بل سره بدلې شي او د y پسې په ورته توګه ښه بدلون منځ ته راشي، نو سړی معکوس تابع لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د معکوس تابع ګراف د تابع د ګراف هندارونه(انعکاس) ده په 45^0 - محور باندې. په تولیزه توګه باور لري: تابع $y = f(x) = a_1 x + a_0$ معکوس تابع $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1}x + \frac{a_0}{a_1}$ د ساده والي له امله معکوس تابع u(x) بولو.

مربع توابع

ځلورى- يا مربع توابعو ته ننوتنه يا پيل

ننوتنه يا پيل

هرڅوک چې موټر زده کوي، بايد پوه وي، جې د بريک په وخت کې په پاخه سرک د بريک نيولو او د موټر دريدځاى په منځ کې لار يا واټن څنګه سره يوځاى کيدى شي يا جمعه کيدى شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې موټر قانون سره سم له چټکتیا(سرعت) v په km/h (کیلومتر په ساعت) د عکس العمل لار r د بریک لار b په متر شمیرلکیدی شي.

پام (خبراوسه) : د بیلګې په توګه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بریکلار سره شمیرل کیږي.

د بریک لار $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ د عکس $r = \frac{v}{10} \cdot 3$ العمل لار

یادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بریکلار لپاره دا فرمول باور لري:.

$b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$

د بریک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتیا یا سرعت په کیلومتر په ساعت (km/h)وي.

الف – د دواړو حالتونو لپاره د s = f(v) تابع مساوات و تاکی ، د کوم لپاره چې په هره تللي چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب - د تابع مشاوات s = f(v) د دواړو حالتونو لپاره د وهل شوی سرعت v = 0, 10, 20, 30, ... 100 km/h سره د ه یوه د ودرېد - یا توقف لار چې شمیرل کیږي.

پ : په کواوردیناتسیستم کې یا د وضعیه قیمتسیستم کې ګراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړې نتیجه تشریح کړی.

Problemlösung: د پرابلم حل:

الف: د تابع مساوات:

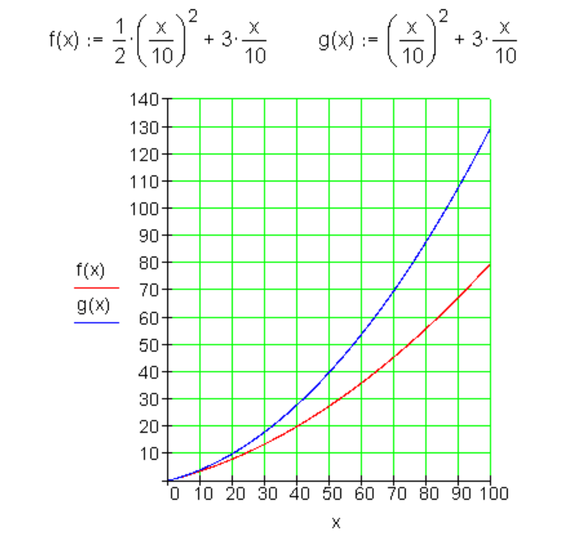
زوړ قانون:	$f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{3}{10}v$
نوی قانون:	$f(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{200}v^2 + \frac{3}{10}v$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - : ارزښتجدول(په کيلو متر په ساعت کي)

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu

پ - گرافونه



د x محور هر ه وهل شوي لار په km/h په گوته کوي.

د y - محور د هر همغه د توقفلار په m په گوته کوي.

ت – کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتيا(سرعت) زياتيدني توپير تل زياتيږي. د 50 km/h چټکتيا سره نوی د تم کيدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لار40 m نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوي لار نوره فقط ده، دا د زړې 130 m لارپا نږدې 61% ده. د بريک نيولو لار کمېدنه د بريک بنه کيدو(ABS) سره موخه وره ده.

د تابع مساوات د ټيک پامورتيا او گراف له امله موږ کره کوو، چې دا نه کربنيز مساوات دی او نه يوه کربنه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندې بنه لري:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او يا هم د2 –مې درجې ټول(تام) راشنل توابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګرافونه يې پارابول بلل کيږي.

تمرينونه:

د لاندې پارابولونو ګرافونه وکاږئ.

د دې لپاره ارزښت جدول وليکئ

اول - $f(x)=x^2+4x-5$ دويم $f(x)=x^2+2x+5$

دريم - $f(x)=-x^2+x+6$ څلورم - $f(x)=x^2-x$

پنځم - $f(x)=x^2-\frac{1}{9}$ شپږم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+3$

اوم - $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ اتم - $f(x)=-2x^2+8x-11$

نهم م- $f(x)=3x^2-3x$ لسم - $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{2}x+10$

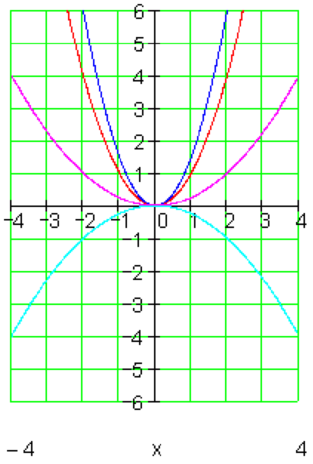
نورمال پارابل، بڼه ځل يا - ضريب او راکښنې

د کار قرارداد:

د a2 د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x)=a_2x^2$ وخيرئ او ګراف په وضعيه قيمت سيستم کې وکاږئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

 	د انځور شوي پارابل تابع مساوات یو له بل د x^2 د ضریب a_2 له امله توپیروي. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = \frac{3}{2}x^2$ $f_3(x) = \frac{1}{4}x^2$ $f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$ دا ضریب a_2 د پارابل د بنې لپاره مسول او له دې امله د بنې ضریب بلل کیږي. د تقاطع ټکی S وضعیه قیمتونه S (0 | 0) لري.

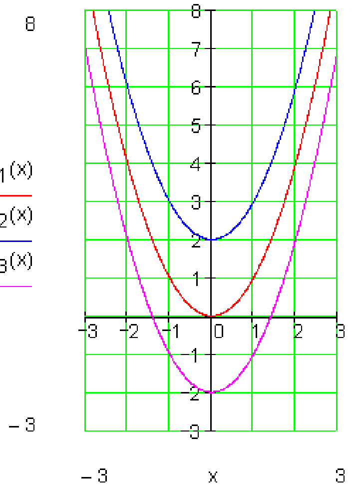
بنه ضریب د پارابل قوارې یا شکل ته څنګه تغیر ورکوي؟

ضریب بني		د پارابول په نخښه ونه
$a = 1$	→	نورمال پارابو ل غزېدلی پارابول کیکاږلی پارابول پهx محور هنداره شوی نورمال پارابول غزېدلی پارابول، په x -محور هنداره شوی کیکاږلی پاربول، په x –محور هنداره شوی
$a > 1$	→	
$0 < a < 1$	→	
$a = -1$	→	
$a < -1$	→	
$-1 < a < 0$	→	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کار قرارداد:

د a_0 د مختلفو ارزښتونو لپاره د $f(x) = x^2 + a_n$ تابع مطالع کړی او په وضعیه قیمتسیستم کې یې ګراف رسم کړی: $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

دا یو راکښلی نورمال پارابل دی، چې ککرئ ټکی(د ر آس نقطه) S دa_0 په واحدونو راکښل شوې ده. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$ راکښنه دy محور په اوږدوالي باندې صورت نیسي ، چېرته چې د راکښنې لور دa_0 مخنخښې له لارې ټاکل کیدی شي. د تقاطع ټکی S کواوردینات S (0 | a_0) لري. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$	

د کار ورکوني قرارداد:

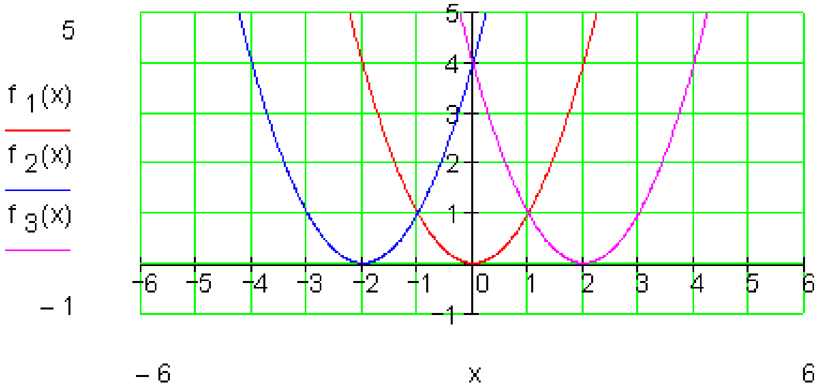
د$f(x) = (x+u)^2$ تابع د u د مختلفو ارزښتونو لپاره راکښنه وڅیړی او ګراف یې په وضعیه قیمتسیستم کې x رسم کړی

$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = (x + 2)^2$ $f_3(x) = (x - 2)^2$

د ارزښت جدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f_1	x	-2	-1	0	1	2	f_2	x	-4	-3	-2	-1	0	f_3	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4



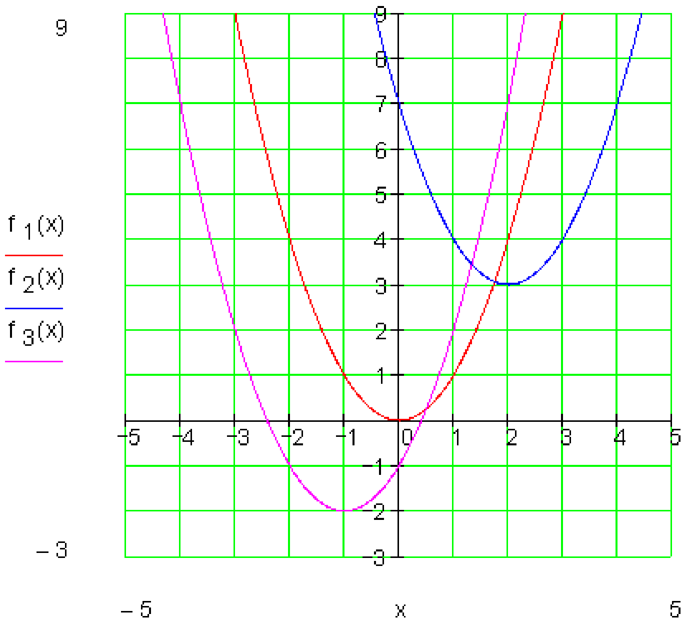
د ا يو راکښلی (چې ځای ته يې تغير ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چې ککرئ ټکی(د رأس نقطه) S يې د u په واحدونو(يوونونو) دx په محور راکښل يا کښول شوې ده. دS غوڅتکی(نقطه تقاطع) يې کواوردينات (0 | -u) Sلري.

کيڼې لور ته ښرخون يا ښرخول، ککرئ ټکیS په u واحدونو يا يوونوو د پيل يا سرچينې کيڼ لورت پروت دی.	u>0 =>
ښی ښرخون يا ښرخول، ککرټکی S په u واحدونو د پيل يا سرچينې ښیَ لورته پروت دی.	u<0 =>

د کار (ورکونې) قرارداد: د u اوa0 دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع + $f(x) = (x+u)^2$ a0 وځيړی او ګراف يې په يوه کواوردينات(پروت ولاړ) سيستم کې انځور کړی.

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \qquad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $f_2 (x)$ ګراف بیرته یو نورمال پارابول دی، چې ککرئ ټکی S یې په دوه واحده ښی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د $f_3 (x)$ ګراف هم یو نورمال پارابول دی، چې ککرټکی S (د رأسټکی) په یوه واحد(یوون) کیڼ او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د $f(x) = (x+u)^2 + a_0$ ډول تابع د مربع تابع د ککرئ ټکي(رأس ټکي) بڼي تابع بلل کیږي.

د تابع ګراف نورمال پاربول دی، چې په u ارزښت دx محور په لور او په a_0 د yمحور په لور راکښل شوی دی.

که ککرټکی د $S(x_s|y_s)$ سره په نخښه کړو، نو د ککرټکي بڼي مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډه بڼه:	$S(x_s \mid y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$
بیلګه:	$S(3 \mid -1) \Leftrightarrow f(x) = (x - 3)^2 - 1$

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلی (را کش شوی) وو.

همدا یا برابره راکښنه کیدی شي د یوه په خوښه پارابول سره سرته ورسول شي.

دلته دې بیا فاکتور a_2 په پام کې ونیول شي.

په ټولیزه توګه باور لري:

$Ist\ f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ د یوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چې ککرټکی (د رأس ټکی) $S(x_s \mid y_s)$ لری، نو $f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$ د ککرټکي د تابع مساوات دي.

د خلوری تکمیلوني له لارې د رآس ټکي(ککری ټکي) ټاکل

موږ پوهیږو چې صدق کوي:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s \mid y_s)$$

په ککرټکي کې د تولیز تابع مساواتو د ترم تابع له لارې کیدی شي د یوه پارابول ککرټکی (د ککری ټکی) وشمیرل شي.

بیلګه:

$F(x) = 3x^2 - 12x + 15$ دې په ککرئ ټکي مساوات واړول شي.

لوړمی پل(قدم) : د x^2 تر مخه ضریب دې له نوکانو راوه وېستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\Rightarrow f(x) = 3[x^2-4x+5]$$

دويم پل : مربع تکميلونه [ ] او بنه بدلون

$$\Rightarrow f(x) = 3.[x^2 - 4x +(2)^2 -(2)^2 +5] = 3.[(x-2)^2+1]=3.(x-2)^2 +3$$

$$\Rightarrow S(2;3)$$

بيلګه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 8\right] = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow S\left(3 \mid -\frac{1}{2}\right)$$

بيلګه:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{3}{4} \mid -\frac{9}{16}\right)$$

تمرينونه: د مربع تکميلونې له لارې د رآس ټکي(ککرۍ ټکي) ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه پارابل تابع مساوات ورکړشوي دي(د دویمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې بارابولونو لپاره رآسته‌کو بڼه او رآسته‌کي پیدا کړۍ.

ګرافونه یې وکاږۍ:

لومړۍ: $f(x)=x^2+2x+5$ دویم: $f(x)=x^2+4x+1$

دریم: $f(x)=x^2-4x+1$ څلورم: $f(x)=x^2-3x+3{,}5$

پنځم: $f(x)=x^2+x-3$ شپږم: $f(x)=-x^2+2x+1$

اووم: $f(x)=-x^2+5x-5$ اتم: $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+2$

نهم: $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}$ لسم: $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

بیلګه 1 :

د ټول راشنل تابع ګراف چې رسم کړای شو،په زیاتو حالتونو کې اړیند دی، چې ارزښتجدول وپیژنو. د دې لپاره جبشمیري له لارې کیدی شي. خو دا هم تل اړیین دی.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د متحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = 0: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$x = 1: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$
$$x = 2: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$
$$x = 3: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$
$$x = 4: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$
$$x = 5: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$
$$x = 6: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له 10 $\pm$ لوی شي، کېدی شي چې پر کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$x = -1: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$
$$x = -2: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمیرل کېدی شي

د بیلګې په توګه $x = \pm ½$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5,25$$

$$x=\frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1,25$$

هر څوک له جبشميري سره بنه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

په لاندې کې HN د اصلي ګډ مخرج (ماتلاندې) په معنا دی.

يوه غوره بيلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

يادونه: په لاندې زيات ځايونه HN راغلي، دا د اصلی مخرج په مانا دي.

موږ د $x=0$ سره پيل کوو

$$x=0: f(0)=\frac{4}{5}\cdot 0^2-\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{7}{2}=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3,5$$

$$x=1: f(1)=\frac{4}{5}\cdot 1^2-\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3,45$$

$$x=2: f(2)=\frac{4}{5}\cdot 2^2-\frac{3}{4}\cdot 2-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$$

$$=-1,8$$

$$x=3: f(3)=\frac{4}{5}\cdot 3^2-\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1,45$$

$$x=4: f(4)=\frac{4}{5}\cdot 4^2-\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6,3$$

$$x=5: f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5^2-\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{7}{2}=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{=}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12,75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$x=-1: f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2: f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3: f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4: f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې ليکل کيږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کيدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسې شميرل کيدی شي

د بيلګې په توګه $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}: f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}: f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په پورته کې (HN(Hauptnenner داصلي مخرج(ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتوني یا تام راشنل تابع ګراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیین دی، چې ارزښت جدول وکاږو. د دې لپاره یو جبشمیروني ته اړتیا لرو.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د تحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

$$
\begin{aligned}
x = 0 &: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3 \\
x = 1 &: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0 \\
x = 2 &: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \\
x = 3 &: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \\
x = 4 &: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3 \\
x = 5 &: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8 \\
x = 6 &: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له ± 10 لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$
\begin{aligned}
x = -1 &: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8 \\
x = -2 &: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښنل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمېرل کیدی شي

د بېلګې په توګه $x = \pm ½$

$$x=-\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5,25$$

$$x=\frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1,25$$

هر څوک له جبشمېري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شمیروني یا کمپیوتر څخه کار واخلي.

یوه غوره بېلګه، چې ځنې برخې یې د جبشمیري په مرسته حل شوي دي:

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

مونږ د $x = 0$ سره پیل کوو

$$x=0: f(0)=\frac{4}{5}\cdot 0^2-\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{7}{2}=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3,5$$

$$x=1: f(1)=\frac{4}{5}\cdot 1^2-\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3,45$$

$$x=2: f(2)=\frac{4}{5}\cdot 2^2-\frac{3}{4}\cdot 2-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}=-1,8$$

$$x=3: f(3)=\frac{4}{5}\cdot 3^2-\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1,45$$

$$x=4: f(4)=\frac{4}{5}\cdot 4^2-\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6,3$$

$$x=5: f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5^2-\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{7}{2}=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{=}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1,95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1,2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5,95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12,3$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې ليکل کيږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کيدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسې شميرل کيدی شي

د بيلګې په توګه $x = \pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$

$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3,375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$

$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0,375$$

پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنستونه مربع توابع II

لومړی - د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړی:

الف- $f(x)=x^2-4x+2$ ب – $f(x)=x^2+4x+2$

پ – $f(x)=-x^2-4x+3$ ت- $f(x)=-x^2+8x-9$

ټ- $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+5$ ث – $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+6$

ج – $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2$ چ – $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}x+6$

ح- $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x-7$ خ - $f(x)=\frac{4}{5}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

(۱) د ککرئ ټکي بڼه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیری.

(۳) پل په پل تشریح کړی، چی $f(x)$ د نورمال پارابول حخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولاړسیستم کې د $f(x)$ ګراف وکاږی

دویم – سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوښه پارابول د د غوڅټکي د راکښني له لارې او د پرسېدني یا غزوني له لارې منځ ته اوړي. که دا کښته لور ته واز وي، نو دا دx محور باندې هنداره کیږي یا منعکس کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه پارابول په هکله لاندې ټکي پيژنو:

د y په لور راکښنه يا بدلون	د x په لور راکښنه يا ځای بدلون	Formfaktor بڼه ضريب	
په 2 واحدونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 1$	a)
په 4 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -1$	b)
په 4 واحدونو کښته لور ته	په 2 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = \frac{1}{2}$	c)
په 5 واحدونو پورته لور ته	په 1 واحد ښي لورته	$a_2 = -2$	d)
په 3 واحدونو پورته لور ته	په 4 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -\frac{1}{4}$	e)
په 6 واحدونو کښنه لور ته	په 2,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{3}{2}$	f)
په 3 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -\frac{3}{4}$	g)
په 4,5 واحدونو کښنه لور ته	په 3,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 2$	h)
په 3 واحدونو يا يوونونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{1}{3}$	i)
په3 واحدونو پورته لور ته		$a_2 = -\frac{2}{3}$	j)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پـه 4 واحدونو ښـي لورته

(۱) د ککرئ ټکي ښه او ککرئ ټکي وټاکئ.

(۲) د محورونو غوځټکي وشميرئ.

(۳) د تابع مساوات په پولينوم ښه $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$? ځنګه دي؟

(۴) په يو مناسب کواوردينات سيسم کې د f(x) ګراف وکاږئ.

پوښتنې

د مربع توابعو ښستونه IV

لومړئ:

تابع f(x) ورکړ شوی دی. د شميرنې له لارې وښايئ، چې ګراف تابع په x محور کې لمسوي. ګراف وکاږئ.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دويم: د تابع مساوات(f(x د محور غوځټکي وشميرئ، او ککرئ ټکي. ګراف يې رسم کړئ.

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ پ- $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت - $f(x) = -0,25\left(4x^2 + 12x + 9\right)$ ټ _ $f(x) = 3x(1-x)$ ث- $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$

دريم: د U = 18 cm محيط سره کوم مستطيل(ولاړکوديز) خورا لويه سطحه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د توابعو $f(x)$ او $g(x)$ ګرافونه چیرته د x محور غوڅوي؟ ککرۍ چیرته پرتې دي؟ د دواړو ګرافونو ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړئ.

الف –

x	−3	−2	−1	0	1	2
f(x)	−3,5	0,5	2,5	2,5	0,5	−3,5
g(x)	4	0	−2	−2	0	4

ب –

x	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	−12	−5	0	3	4	3
g(x)	3,5	0	−2,5	−4	−4,5	−4

پنځم: د اړونده ګراف کوم خویونه د تابع مساوات څخه سیده لوستل کیدی شي؟

$$f(x) = -x^2 - x + 6;\quad g(x) = (2-x)(x+3);\quad h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4}$$

د مربع-یا څلورئ توابعو معکوس تابع

تلنلار (که غواړې: طریقه یا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښیزو توابعو کې چې وښوول شوه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=(f(x)=x^2$

د متحولو x او y بدلول

$x=f(y)=y^2 \Leftrightarrow y^2=x$

رېښه نيونه:

له دې لاس ته راځي او برعکس

$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$

يا $y = -\sqrt{x}$

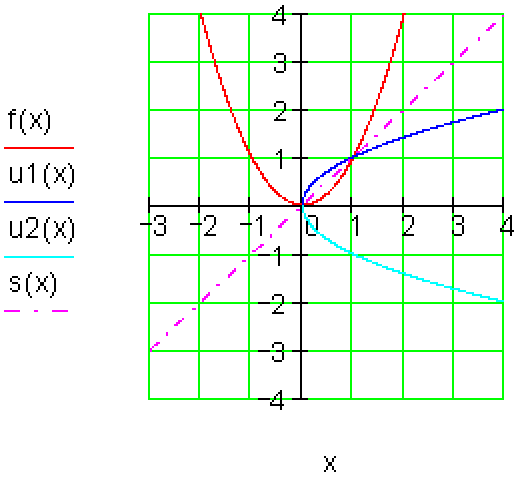
نو دوه معکوس توابع شتون لري:

$y = u_1(x) = \sqrt{x}$

او

$y = u_2(x) = -\sqrt{x}$

د معکوس تابع جوړولو سره تعريفورشو محدوده شوه، د دې لپاره چې يواځنی نظم منځ ته راشي



(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښنیزبرابرونسیستم د ۲ برابرونونو او ۲ متحولو سره.

داسې سیستم له دوه مساوتو څخه جوړ دی. غوښتونی د دواړو مساواتو ګډ حل دی. مختلفې تلنلاړې شته، چې سرې حل ته ورسیږي

په لاندې einsetzen in = په ... کې اینوول.

د جمعې تلنلار:

مساواتسیستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$	د حل پل(قدم) غوښې(قطاع، که قطعه؟) د جمعې تلنلار ته لومړی امکان یا واریانت
(I) $5x - 2y = 1 \mid \cdot 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$ (I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$	لومړی: مساوات ورته داسې بڼه بدل کړئ، چې ضریبونه (ترمخ عددونه) د yمتحولې تر مخنښې پورې سره سروخوري.
(I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$ } + $10{,}5x = 10{,}5 \mid : 10{,}5$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$	دویم: منځ ته راغلې مساوات سره جمعه کړې او د **x** - متحولې پسې یې حل کړئ
په $3x + 3y = 9$ کې اینوونه: $x = 1$	دریم: د **x** لپاره میندل شوې ارزښتونه د دواړو څخه په یوه مساوات کې کیږدئ او **y** پسې یې حل کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$3\cdot 1+3y=9$ $\Leftrightarrow 3+3y=9\,\vert -3$ $\Leftrightarrow \quad 3y=6\,\vert :3$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=2}}$	
$\underline{\underline{L=\{(1\vert 2)\}}}$	څلورم: حلست یا حلډيرئ وليکئ

پنځم:

ازماېښت د اينووني له لارې

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسيستم

$$(I)\quad 5x-2y=1$$
$$(II)\quad 3x+3y=9$$

د حل پلونه قدمونه د جمعي تلنلار لپاره

دويم واريانت

$$(I)\quad 5x-2y=1\,\vert \cdot 3$$
$$(II)\quad 3x+3y=9\,\vert \cdot(-5)$$
$$(I)\quad 15x-6y=3$$
$$(II)\quad -15x-15y=-45$$

لومړی: مساوات داسي ورته بنهبدل کړئ، چې د **x** ضريبونه(ترمخعددونه) تر مخنخښي پورې سره يوغربز شي.

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & 15x-6y=3\\ (II) & -15x-15y=-45\end{array}\right\}+$$
$$-21y=-42\,\vert :(-21)$$
$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=2}}$$

دويم: منځ ته راغلی مساوات سره جمعه کړئ او متحولې **y** پسې يې حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: بنې لورته الماني د اينووني په مانا ده

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

د x لپاره میندل شوي ارزښتونه له دې دوه پهيوه مساوت کې کيږدئ او د متحولې x پسې یې حال کړئ.

$$3x + 3\cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

خلروم: حلستې یا د حلډېرئ وليکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم: د اينووني له لارې ازماېښت

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابراينووني تلنلار

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x - 2y = 1$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9$$

د حل پل د برابراينووني تلنلار ته

واريانت 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}
&(I) \quad 5x - 2y = 1 \mid +2y \\
&(II) \quad 3x + 3y = 9 \mid -3y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I) \quad 5x = 1 + 2y \mid : 5 \\
&(II) \quad 3x = 9 - 3y \mid : 3
\end{aligned}$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتوني يا متحولې **x** پسې حل کيږي.

$$\begin{aligned}
&(I) \quad x = \frac{1+2y}{5} \\
&(II) \quad x = \frac{9-3y}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I) \quad x = \frac{1+2y}{5} \\
&(II) \quad x = 3 - y
\end{aligned}$$

دويم: د مساوات بني ا ړخونه برابر اينسوول کيږي او د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$\frac{1+2y}{5} = 3 - y \mid \cdot 5$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 1 + 2y = 15 - 5y \mid +5y \\
&\Leftrightarrow 1 + 7y = 15 \mid -1 \\
&\Leftrightarrow 7y = 14 \mid : 7 \\
&\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}
\end{aligned}$$

دريم: (د کين لور الماني په پښتو: اينسول په ..کې)

د **y** ميندل شوی ارزښت د دواړو څخه په يوه وتونمساوات کې اينسوول کيږي، او دا بيا د متحولې **x** پسې حل کيږي.

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$\begin{aligned}
&3x + 3 \cdot 2 = 9 \\
&\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6 \\
&\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3 \\
&\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}
\end{aligned}$$

څلورم: حلسټ يا ـدېرئ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم: د ځا په ځای کولو یا ایښوولو له لارې ازماېښت

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x-2y=1$$
$$(II)\quad 3x+3y=9$$

د حل پل د برابرایښوولو له لارې

واریانت 2

لومړی: دواړه مساوت د اووښتونې یا متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$(I)\quad 5x-2y=1 \mid -5x$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \mid -3x$$

$$(I)\quad -2y=1-5x \mid :(-2)$$
$$(II)\quad 3y=9-3x \mid :3$$

$$(I)\quad y=\frac{1-5x}{-2}$$
$$(II)\quad y=\frac{9-3x}{3}$$

$$(I)\quad y=\frac{5x-1}{2}$$
$$(II)\quad y=3-x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم: د دواړو مساواتو ښئ خوا برابره ليکل يا اينسوول کيږي او د متحولي **x** پسې حل کيږي.

$$\frac{5x-1}{2} = 3-x \mid \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 5x-1 = 6-2x \mid +2x$$
$$\Leftrightarrow 7x-1 = 6 \mid +1$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \mid :7$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

درى(ښئ الماني: اينسوول په ...کې)

د **x** ميندل شوى ارزښت د دداړو وتونمساواتو څخه په يوه کې اينسوول کيږي، دا بيا د متحولي **y** پسې حل کيږي.

$x = 1$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$3\cdot 1 + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$$
$$\Leftrightarrow 3y = 6 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow y = 2$$

څلورم: د حلسټ وليکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم د اينووني له لارې ازماښت

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د اينسووني تلنلار: د اينسووني تلنلار لپاره د حل پلونه(قدمونه)

وارينت 1

مساواتسيستم

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \mid +2y$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2y + 1 \mid :5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}$$

لومړی: مساوات**(I)** د **x** پسې
حل کيږي.

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9 \mid -\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5} \mid \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow 21y = 42 \mid :21$$
$$\Leftrightarrow y = 2$$

دويم: د بني اړخ ميندل شوی ترم
په مساوات **(II)** کې اينسوول
کيږي او د **y** پسې حل کيږي.

$$y = 2 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

دريم: د **y** لپاره ميندل شوی
ارزښت په يو د دې دوه
وتونمساواتو کې اينسوول کيږي،
دا بياپه **x** پسې حل کيږي.

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

څلورم: د حل سټ وليکئ

پنځم: د اينسوولو له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

د حل پلونه(قدمونه) د اينوولو تلنلار لپاره

واريانت 2

مساواتسيستم

$$(I)\qquad 5x-2y=1$$

$$(II)\qquad 3x+3y=9$$

لومړی: مساوات**(II)** د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$(II)\quad 3x+3y=9 \mid -3x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3y=9-3x \mid :3$$

$$\Leftrightarrow \quad y=3-x$$

دويم: دبنی لور ميندل سوی ترم په مساوات **(I)**کې کيږدئ او په **x** پسې يې حل کړئ.

$$y=3-x \text{ eingesetzt in } (I):\ 5x-2y=1$$

$$5x-2(3-x)=1$$

$$\Leftrightarrow 5x-6+2x=1 \mid +6$$

$$\Leftrightarrow 7x=7 \mid :7$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$$

3. دريم: د **x** لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساوتو کې اينوول کيږي، او دا بيا د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$x=1 \text{ eingesetzt in } (II):\ 3x+3y=9$$

$$3\cdot 1+3y=9$$

$$\Leftrightarrow 3+3y=9 \mid -3$$

$$\Leftrightarrow 3y=6 \mid :3$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: جلسټ ولیکئ

$$L = \{(1|\,2)\}$$

پنځم: ازمايښت د اېښوولو له لارې

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

ټولې درې تلنلارې د هغه د وارياننتو سره په يوه ټکلي مساوتسيستم وکارول شو. که ځوک يوګوني تلنلرې ټيک وګورې، پيژني، چې په واريانت ۲ کې لږ د شميرلو کار غوښتونى دى.

په يوه ټاکلي تلنلار د شميرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسيستم په واک کې دى. له دې امله دې لومړى پام وشي، چې کومه تلنلار د لږ کار سره سرته رسيدى شي. د دې لپاره نو يو ځو بيلګو ته اړ يو. لاندې بيګې دې د دې لپاره يوه کوچنۍ مرسته وي، چې مناسب د حل – يا ځواب تلنلار پيداشي.

د مناسب ځواب تلنلار لپاره بيلګې

بيلګه ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x1=-1 په (1) کې اینبوونه y=7x+8 $y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}}$ حل: L={(-1|1)} ازماېښت (I) $y = 7x+8 \Rightarrow y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8 \Leftrightarrow y = 1$ (w) (II) $y = -2x-1 \Rightarrow y = -2\cdot(-1)-1$ $\Leftrightarrow y = 2-1 \Leftrightarrow y = 1$ (w)	(I) $y = 7x+8$ (II) $y = -2x-1$ د برابر اینبوونې لار $7x+8 = -2x-1 \mid +2x$ $\Leftrightarrow 9x+8 = -1 \mid -8$ $\Leftrightarrow 9x = -9 \mid :9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}}$

بیلګه۲:

Y=3 اینبوونه په (1) کې 2x+4y=8 حل: $2x-12 = 8 \mid +12$ $\Leftrightarrow 2x = 20 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 10}}$ ازماېښت (I) $2x+4y = 8 \Rightarrow 2\cdot10+4\cdot(-3) = 8$ $\Leftrightarrow 20-12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8$ (w) (II) $2x-5y = 35 \Rightarrow 2\cdot10-5\cdot(-3) = 35$ $\Leftrightarrow 20+15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35$ (w)	(I) $2x+4y = 8$ (II) $2x-5y = 35$ د جمعي تلنلار: (II) $2x-5y = 35 \mid \cdot(-1)$ (I) $2x+4y = 8$ (II) $-2x+5y = -35$ (+) $9y = -27 \mid 9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ :

X=1 په (1) کې کیږدئ x+2y=5 $1+2y=5 \mid -1$ $\Leftrightarrow 2y=4 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$ حل: L= {(1|2)} ازماېښت $(I)\ x+2y=5 \Rightarrow 1+4=5$ $\Leftrightarrow 5=5\ (w)$ $(II)\ -x+y=1 \Rightarrow -1+2=1=35$ $\Leftrightarrow 1=1\ (w)$ wد رښتیا لپاره	$(I)\ x+2y=5$ $(II)\ -x+y=1$ د اینوونې لار; (II) په y پسې حل کړئ $-x+y=1 \mid +x$ $\Leftrightarrow y=x+1$ په (I) کې کیږدئ x+2y=5 $x+2(x+1)=5$ $\Leftrightarrow x+2x+2=5 \mid -2$ $\Leftrightarrow 3x=3 \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$

بیلګه ۴ : په لاندې: einsetzen اینوونه په (1)کې اوبیونه یا حل:Lösung ازماېښتProbe د زیاتون یا جمعې لار:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II) & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$

(II) $\frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$

Additionsverfahren:

(I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \mid \cdot 2$

(II) $\frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \mid : (-2)$

(I) $\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4$

(II) $-\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2$ } +

$-\frac{10}{y} = 2 \mid \cdot y$

$\Leftrightarrow -10 = 2y \mid : 2$

$\Leftrightarrow -5 = y$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$

$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 \mid -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \mid \cdot x$

$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x \mid \cdot \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$

Lösung: $L = \{(2 \mid -5)\}\ x, y \neq 0$

Probe:

(I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2\ (w)$

(II) $\frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$

$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4\ (w)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(I)} & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ \text{(II)} & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$$y=-5 \text{ eingesetzt in (I) } \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

يادونه:

مساواتسيستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چي مخرج دد صفر کيدو اجازه نه لري يا نه شي صفر کيدی، تعريفست بايد ورکړ شي. داسئ مساواتسيستم کرښنيز نه دی.

د رسمونې لار

$$\text{(I)}\qquad x-y=-2 \qquad L_I=\{(-2|0);(-1|1);(0|2);(1|3);\ldots\}$$

$$\text{(II)}\ \wedge\ -2x-y=1 \qquad L_{II}=\{(-2|3);(-1|1);(0|-1);(1|-3);\ldots\}$$

دواړه مساوات د y پسې حل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر مساوات لپاره ارزښتجوړې د حل سټ په ګوته کوي.

$$\begin{array}{ll} (I) & x - y = -2 \mid +y \\ (II) & -2x - y = 1 \mid +y \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (I) & x = -2 + y \mid +2 \\ (II) & -2x = 1 + y \mid -1 \end{array}$$

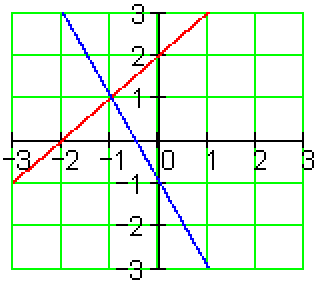
$$\begin{array}{ll} (I) & x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2 \\ (II) & -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1 \end{array}$$

کا دا په یوه کواوردیناتسیستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوخېدکي یا نقطه تقاطع کې د دواړو مساواتو حلسټ پروت دی.

حلسټ یا-دېرئ: L={(-1|1)}

په هر مساوات کې د x لپاره عددونه اینښول کېږي.

x	-2	-1	0	1
y_I	0	1	2	3
y_{II}	3	1	-1	-3



د رسموني لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي(ځمککچیزي) اړیکې لیدوړ کوي. د حل لار په حیث زیات وخت مناسب نه دی، چې د ګډغوخېدکي کواودینات په ګرفیک کې ناتیک لوستل کېدی شي.

برابرون – یا مساواتسیستم بې له یواځني حل خخه

رسمیزه حل یا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې ترمنځ هندسي اړیکې لیدوړ کوي.

- دوه کرښې کېدی شي چې نسبت یو بل ته مختلف پروتځایونه ولري.

- دا کېدی چې په یو ټکي کې سره غوخې کړي، لکه پورته بېلګه چې لیدوړ کوي، د دواړو کرښېز مساوات لپاره ټک یو حل شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دا کیدی شي یو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کرښې یې یو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کیدی شي یو په بل پرتې وي، یعنې کټمټ وي، نو هر ټکی د یوې کرښې به د بلې کرښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دااړونده مساوات ناپای زیات حلونه ولري.

$(I)\quad 10x + 4y = 4$ $(II)\quad 5x + 2y = 1 \mid \cdot(-2)$ $(I)\quad 10x + 4y = 4$ $(II)\; -10x - 4y = -2 \mid$ $\}+$ 0=2 نو دا ناټیک وینا ده، له دې لاس ته را ځي{}=L	**مساوات سیستم حل نه لري** چې دا د حل پیل مو یوه . لیدوړ دا په دې معنا دی، ې ځغلي او کوم ګډ ټکی نه لري.

دا مساواتسیستم ناپای ډېر ځوابونه یا حلونه لري

$(I)\quad 10x + 4y = 2$ $(II)\quad 5x + 2y = 1 \mid \cdot(-2)$ $(I)\quad 10x + 4y = 2$ $(II)\; -10x - 4y = -2 \mid$ $\}+$ 0=0 له دې لاس ته راځي ربنتیا وینا	د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمعه کونې یو بل سره پورته کوي یا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته یا ایدنتیک دي. هره د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي،دا مساوات (II)هم پوره کوي. لیدوړ دا په دې معنا دی، چې کرښې یو په بل پرتې دي.

پوښتنې

مساواتسیستم I

مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کرښیزمساواتسیستم، سیستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې(د متن سره پ،ښتنې)

لومړی: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف- $(I)\quad 5y - 3x = 1$ $\quad (II)\quad x = y + 1$

ب - $(I)\quad 4x + 5y = 32$ $\quad (II)\quad y = 5x - 11$

پ- $(I)\quad 15y - 4x = -50$ $\quad (II)\quad x = y + 7$

ت - $(I)\quad 3x = y + 15$ $\quad (II)\quad 2y - 10 = 2x$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $(I)\quad 2y = 2x - 40$ $\quad (II)\quad 3x = 10 - 2y$

b) $(I)\quad \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3$ $\quad (II)\quad \frac{x}{4} + y = 8$

c) $(I)\quad \frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3$ $\quad (II)\quad \frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20}$

d) $(I)\quad \frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3}$ $\quad (II)\quad \frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8}$

دریم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $(I)\quad \frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13}$ $\quad (II)\quad \frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6}$

b) $(I)\quad \frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6}$ $\quad (II)\quad \frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c)

(I) $\frac{4}{x}+\frac{8}{y}=\frac{5}{3}$

(II) $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-\frac{1}{6}$

d)

(I) $\frac{3}{2x-1}-\frac{8}{3y+2}=-\frac{1}{5}$

(II) $\frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3y+2}=\frac{8}{15}$

ځلورم: د لاندې مساواتسيستم حلسټ وټاکئ

(I) $\frac{7}{2x-5}-\frac{9}{7y+5}=\frac{10}{3}$ (II) $\frac{24}{2x-5}+\frac{15}{7y+5}=\frac{19}{3}$

پنځم: يو پلار په دې لحضه کې څلورواره دومره عمر لري لکه ځوي يې او په ۵ کاله کې به فقط درې واره دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخا کې به يو (اوبه) ساتونی (بيلر؟) له دوه نلونو څخه نيمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتوني د ډکولو لپاره ۱۸ دقيقې اودويم د دې لپاره ۲۲ دقيقو ته اړتيا ولري يا په کار ولري؟

اوم: د يوه مستيپل يا ولاړکونجيزچاپيريال يا محيط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخa څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتځاييزه پرته جمعه يا پروت زياتون عدد9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه ځا ارزښتونه څومره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

توان- يا پوتنخ توابع

توان توابع

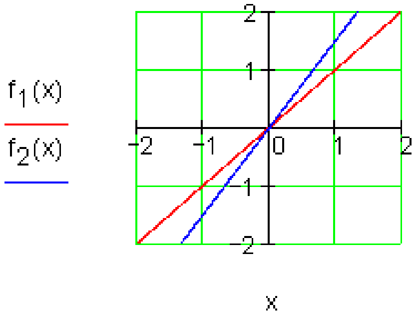
تعريف:

يوه تابع د تابع مساوات $f(x) = a_n x^n \quad ; n \in \mathbb{N} \quad ; a_n \in \mathbb{R}$ سره پوتنخ تابع بلل کيږي.

د n اکپوننت يا جګعدد د پوتنخ تابع درجه ټاکي او ضريب an د ګراف بڼه يا فورم او هغه د بڼې ضريب بلل کيږي.

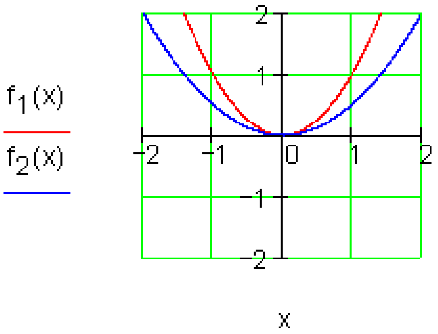
بيلګې:

$f_1(x) := x$ $\qquad f_2(x) := \frac{3}{2} \cdot x$



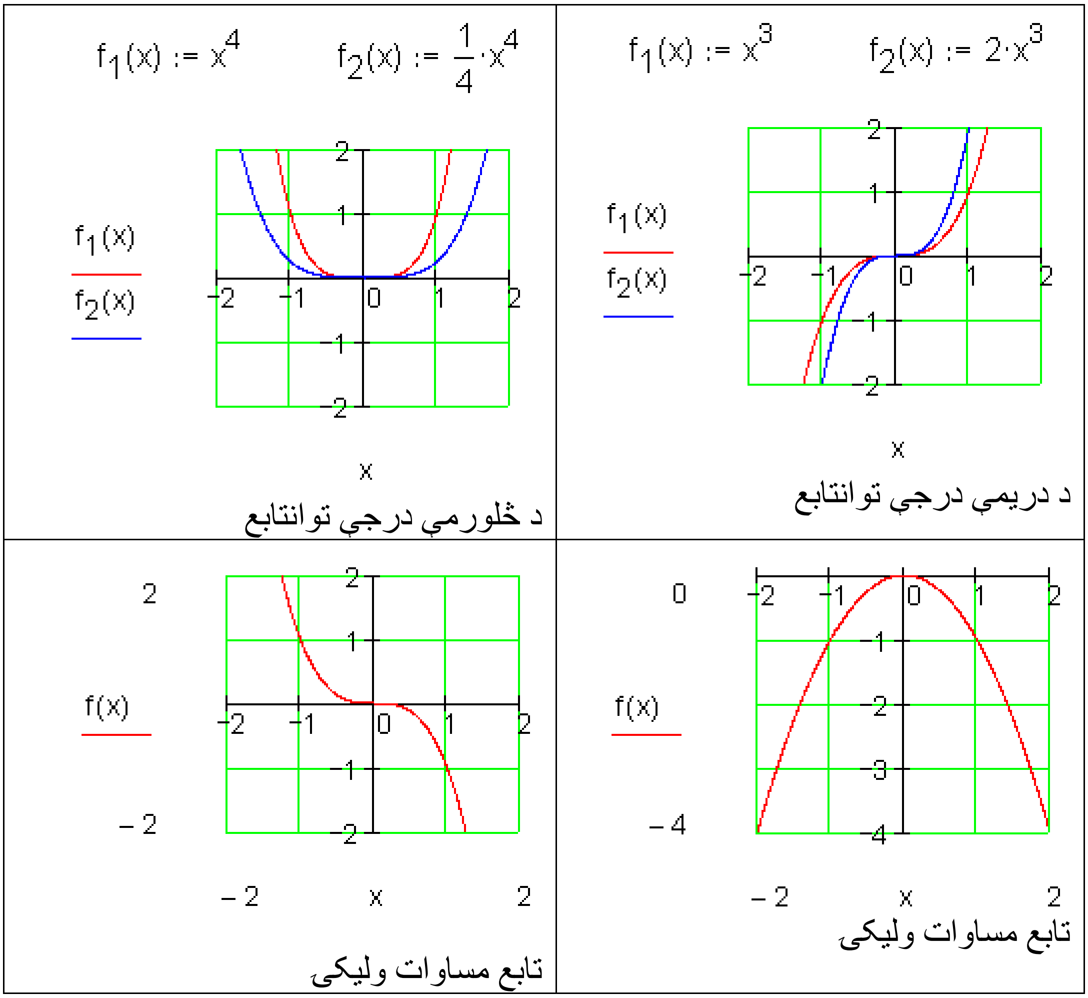
د لومړی دزجې توان تابع(کرښه)

$f_1(x) := x^2$ $\qquad f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2$



د دويمي درجې توان تابع (پارابول)

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ډريمي درجې توانتابع

د څلورمي درجې توانتابع

تابع مساوات وليکئ

تابع مساوات وليکئ

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

ب – دn درجه او د a_n مختخبنه د ګراف په تلنه کومه اغيزه لري؟

پ – د پوتنځ تابع n درجه د ګراف په سيومتري کومه اغيزه لري؟

ت – د پوتنځ تابع د n په واکولي او د a_n مختخبني له امله کوم ارزښتسټ(ارزښتډيرۍ) لري؟

ټ - د a_n مطلق ارزښت د ګراف په تلنه کوم اِيز لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه لړ. وروسته راځي.

سیومتري

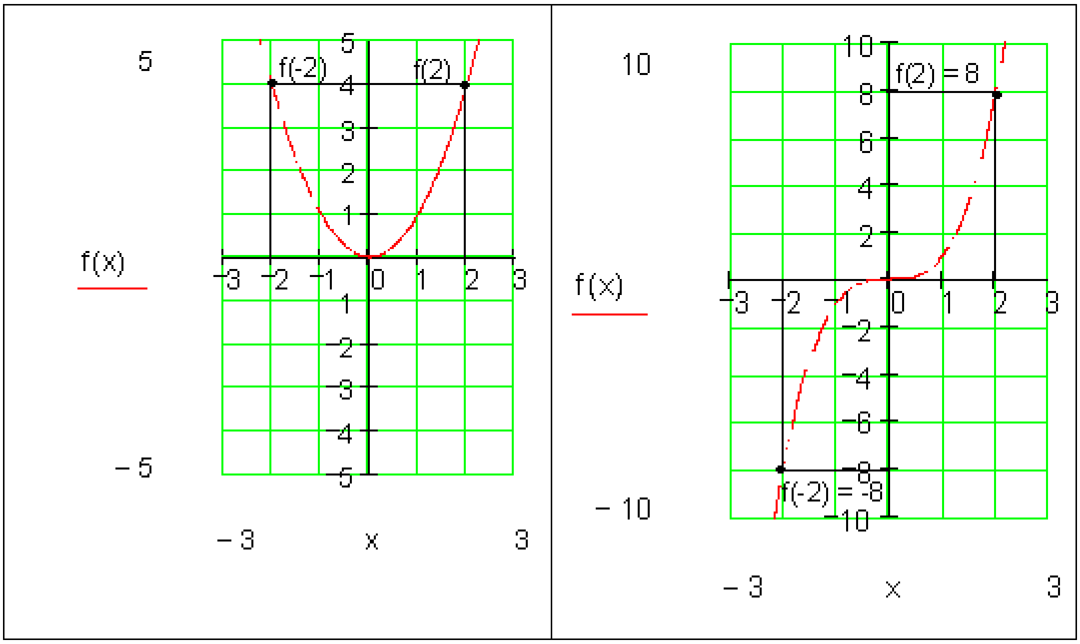
په سیومتري څنګه قضاوت کیدی شي، که څوک فقط د یوه توان(پوتنځ) تابع تابع مساوات پیژني؟

د دې لپاره د لاندې توابعو ګرافونه کاږو:

$f(x)=x^2$ او $f(x) = x^3$

او تابع د $x=-2$ او $x=2$ په ځایونو کې تر څیړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګومان مو نږدې دی چې لاندې باور لري:

د x د جوړه ځګعدد سره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چې :

محورسیمتریک، نو $f(-x) = f(x)$

د x ناجوړه(طاقو) ځګعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قیمت لري، مګر متضادي مخنخښي لري.

دا په دې معنا چې:

ټکی سیومتریک، نو $f(-x) = -f(x)$

دا اړیکي د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د یوه توان ـ یا طاقت تابع محورسیومتریک دی، که د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه توانتابع ګراف ټکی سیمتریک دی،که د ټولو $x \in D$ ؛ لپاره باور ولري f(-x)= - f(x)

ټولګه:

د $a_n > 0$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له II د I. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له III.او I. څلورمې(ربع) ته ځغلې(خوزي).

د ټولو 0 > لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له III د IV. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له II.او IV. څلورمې(ربع) ته ځغلې(خوزي).

تمرینونه:

د توان تابع خویونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکی، په سیمتریکي حالت، د ګراف په تلنه او او ارزښت دېرې يې یوه وینا وکړی د د هر ګراف يې په پروت ولاړسیستم (کواوردینات سیستم) کې رسم کړئ.

لومړی - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ دویم - $f(x) = \frac{1}{4}x$

دریم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^4$ څلورم - $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^5$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^3$ اتم - $f(x) = 2x^2$

نهم - $f(x) = \frac{1}{5}x^4$ لسم - $f(x) = -\frac{2}{5}x^4$

کرښيز ې توابع د ورکړشوو شرايطو سره

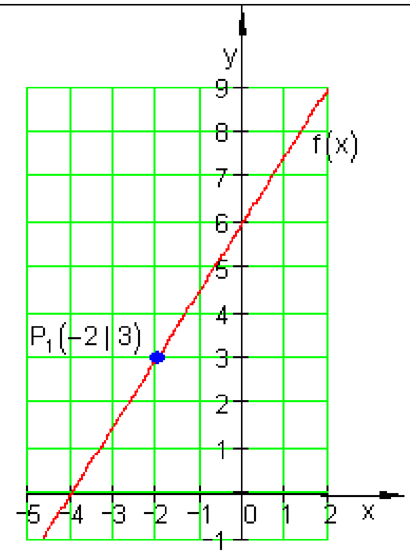
. لومړی حالت : د P تکي ځخه تيرې کرښې د a_1 جګوالي سره

بيلګه:

يوه کرښه د a_1 د جګوالي سره د $P_1(x_1 \mid y_1)$ په تکي کې ځغلي.

د $f(x) = a_1x + a.$ تابع مساوات دې پيدا شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



جګوالی: $a_1 = 1,5$ ټکی $P_1(-2|3)$

وتونمساوات $f(x) = a_1 x + a_0$

جګوالی ځای په ځای کړی

$f(x) = 1,5 \cdot x + a_0$

د a_0 لپاره دې ارزښت وشميرل شي.

د $P_1(-2|3)$ لپاره ازمايښت

$$
\begin{aligned}
f(-2) = 3 \;\Leftrightarrow\; 1,5 \cdot (-2) + a_0 &= 3 \\
\Leftrightarrow\; -3 + a_0 &= 3 \;|+3 \\
\Leftrightarrow\; a_0 &= 6
\end{aligned}
$$

د تابع مساوات $f(x) = 1,5 \cdot x + 6$

ازمايښت:

$P_1(-2|3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$

$f(-2) = 1,5 \cdot (-2) + 6 = -3 + 6 = 3$

بيلګه:

د حيواناتو ساتونکی د وښو اوتومات څخه د روځې 7,5 kg خوراک شته. دولس روځې، وروسته له هغې چې زيرمه له غذايي موادو ډکه شوې وه، 250 kg هلته نور پاتې دي.

الف - يو تابع مساوات وليکی، چې دا حالت تشريح کړي

ب - په څومره ستې يا ډېری به دا د وښو زيرمه دولس ورځې د مخه ډکه شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل و الف ته - دx محور: وخت په ورځو

y محور : د وښو زېرمه په کیلوګرام kg .

$$f(x) = -7,5x + a_0$$

$$P(12|250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7,5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 | +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow f(x) = -7,5x + 340$$

حل و ب ته- د ډکیدنې وخت $x = 0$ دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7,5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د وښو شتون دولس12 ورځې د مخه په 340 kg ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د یوې کرښې جګوالی او یو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن یا داتا Daten سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شمیرنه تویزه سرته رسیږي. دا مو بیا یو فرمول ته لاربنوده وي.

یوه کرښه دa_1 جګوالي سره د$P_1(x_1 | y_1)$ ټکي څخه تیرې.ي.

د کرښمساواتو تولیز فرمول دی: $f(x) = a_1 x + a_0$

$$P_1(x_1 | y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 | -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

دا د ټکی - جګوالي فرمول هم بلل کیږي.

بیلګه:

په $a_1 = -2; P_1(-3|4)$ $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$: کې ځا په ځای کړی

$$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x+3) + 4 = -2x - 6 + 4 = \underline{-2x - 2}$$

.

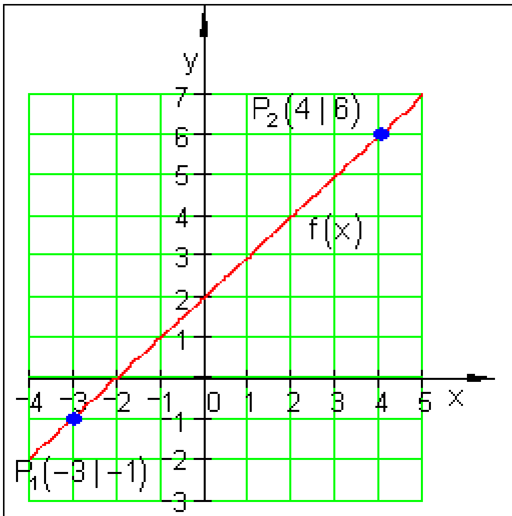
(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم حالت: کرښه له دوه ټکو تيريږي

بيلګه:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په يوه کرښه پراته دي.

د $f(x) = a_1x + a_0$ تابع مساوات غواړو پيداکړو.



$P_1(-3\mid -1)$ $P_2(4\mid 6)$

وتونمساوات: $f(x) = a_1x + a_0$

د جګوالي ټاکنه:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1)}{4-(-3)} = \frac{6+1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$$

جګوالی وضعه کړی $f(x) = 1 \cdot x + a_0$

وروسته له دې چې جګيدنه معلومه شوه، دا پوښتنه داسې حل کيږي لکه په لومړي حالت کې.

د ټکو ازمايښت لپاره بې پروا ده چې د دې لپاره کوم ټکي کارول کيږي، ځکه چې دواړه ټکي به په کرښه پراته وي.

د ټکو ازمايښت د $P_2(4\mid 6)$ يا P_1 لپاره

$$P_2(4\mid 6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بيلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فزیک څخه پوهیږو چې د حرارت معلومولو (ګرمی کچوني) لپاره مختلفي دد حرارت سکالا کارول کیږي. د څلزیوس سکالاCelsiusskala او د فارنهایټ سکالا Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښیزي اړیکي موجود دي.

$100\,^0C$ برابری دي د $212\,^0F$ سره . $0\,^0C$ برابر د ی په $32\,^0F$ سره.

د یوه تابع مساوات غواړو پیداکړو، چې د هغې په مرسته ^0C په ^0F اړول کیږي.

خپلواکه متحوله x په ^0C او بلواکه یا تابع متحوله $y = f(x)$ په ^0F .

جګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0 \mid 32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع x په C° کې کیږدی نتیجه یې ده.

د بیلګې په دول:

$$x = 20\,^0C : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20\,^0C \triangleq 68\,^0F$$

د دویم حالت لپاره هم کیدی شي شمیرنه په ټولیزه توګه مخ ته بوتلی شی:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په یوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بڼه ده:. $f(x) = a_1x + a_0$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګوالی:
$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0$$

$$P_1(x_x \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 =$$
$$= y_1 \mid -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کربنیزږومساواتو یو تولیزه بڼه ده .

په زیاتو ادبیاتو کې په لاندې ډول ده:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \;;\; x_1 \neq x_2$$
چیرته چې $y = f(x)$ باور لري.

د عملي کاروني لپاره لاندې بڼه مساعده ده:
$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

بیلګه:

په $P_1(2 \mid -1); P_2(-3 \mid 2)$ $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ کې ځای په ځای کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{2-(-1)}{-3-2}(x-2)+(-1)=\frac{2+1}{-5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}-\frac{5}{5}$$
$$=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

تمرين:

د ^0F په ^0C باندې شميرنې لپاره يو تابع مساوات وليکئ

2.2.3.تمرين: د تابعمساواتو شميرنه

يو کربنيز مساوات د a_1 جګوالی لري او د P له ټکي تيريږي.

د f(x) تابعمساوات معلوم کړئ او د محورونو قاطع ټکي يا غوڅټکي او ګراف انځور کړئ

اول - $P(2|-2)$ $a_1=\frac{1}{2}$ دويم - $P(-1|3)$ $a_1=\frac{3}{4}$

دريم - $P(3|-1)$ $a_1=2$ څلورم - $P\left(\frac{3}{2}\middle|4\right)$ $a_1=\frac{4}{5}$

يوه کربنه له ټکو P_1 او P_2 تيريږي.

د f(x) تابع مساوات پيدا کړئ او د محور قاطع ټکي او ګراف رسم کړئ.

پنځم - $P_2(5|4)$ $P_1(2|1)$ شپږم - $P_2(2|3)$ $P_1(-3|-2)$

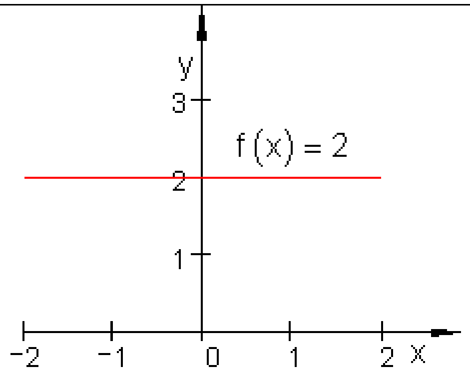
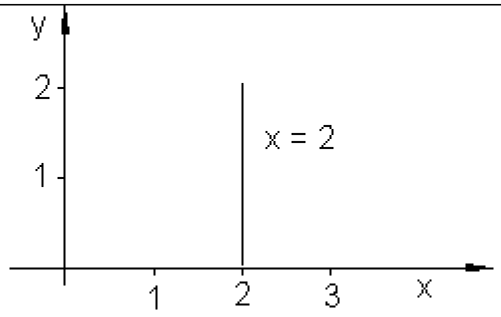
اوم - $P_2(4|-1)$ $P_1(-2|3)$ اتم - $P_2(3|1)$ $P_1(-4|-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $P_2(4\,|\,-1)$ $P_1\left(-3\,\middle|\,\frac{9}{2}\right)$

لسم - $P_2\left(\frac{7}{2}\,\middle|\,4\right)$ $P_1(-4\,|\,-2)$

. د کرښبرابروتو ځانګړی حالت:

د x- محور سره غبرګ کرښه: $f(x) = a_0\,;\ a_0 \in \mathbb{R}$ يو د 0 درجي تام راشنل تابع ده او ثابته تابع هم بلل کيږي. x- محور هم يوه ثابته تابع ده د تابع مساوات $f(x) = 0$ سره. د ثابتې تابع جګوالی تل صفر دی.	
د y- محور سره غبرګه. $x = a\,;\ a \in \mathbb{R}$ کرښه د محور سره غبرګه (موازي) ځغلي. دا د يوه تابع مساوات سره نه شي ليکل کيدی، ځکه چې يواځنۍ تنظيم نه شته يعني تابع نه ده. $x = 0$ دy - محور مساوات دي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

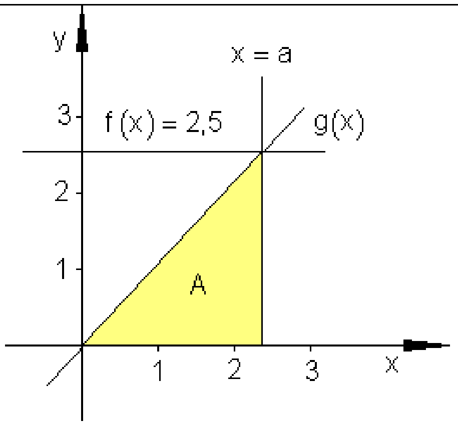
بیلګه:

یو f(x) = 2,5 ور کړ شوی او y- محور سره موازي دa واټن د a > 0 سره.

یوه سرچینییزه کربنه g د(P(a | f(x) تکي څخه تیریږي.

دا دx - محور او د y- محور سره غبرګې کربنې سره یو مثلث جوړوي.

a داسې وټاکئ چې وسطحه د سطحې څلور واحدونه (یوونونهFE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره دg(x) تابع مساوات څنګه دي؟

	$A = \frac{g \cdot h}{2}$ د g = a او h=f(x) = 2,5 سره د مثلث سطه $\Rightarrow A = \frac{2{,}5 \cdot a}{2} = \frac{5}{4}a$ $A = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4}a = 4 \mid \cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = \frac{16}{5}$ (ځکه چې د سرچینې کربنه $g(x) = a_1 x \; (a_0 = 0$ د جګېدو له مثلث څخه $a_1 = \frac{5}{2} : \frac{16}{5} = \frac{25}{32}$ د تابع مساوات : $g(x) = \frac{25}{32}x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين: د ^{0}F بدلون شميرنه په ^{0}C لپاره د تابع مساوات وليکئ

حل :

د ^{0}C اړونه يا بدلون په^{0}F د متحولې لپاره دا معنا لري:

x په ^{0}F مستقله يا خپلواکه متحوله ده او $y = f(x)$ په^{0}C بلواکه يا تابع متحوله ده.

$$212\,^{0}F \triangleq 100\,^{0}C \Rightarrow P_1(212\,|\,100) \quad \text{او} \quad 32\,^{0}F \triangleq 0\,^{0}C \Rightarrow P_1(32\,|\,0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ يوه کرښيزه ا ړيکه پرته ده، نو ټکي P_1 اوP_2 په يوه کرښه پراته دي.

د کرښې عمومي کرښيزه بڼه په دې ډول ده:.$f(x) = a_1x + a_0$

دلته ضريبونه a_1 او a_0 د ټاکلو دي.

ځګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100-0}{212-32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0$$

ټکي ازمايښت د $P_1(32\,|\,0)$ سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{8} + a_0 = 0\,|-\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x-32)$$

د ^{0}F اړونې په ^{0}C لپاره باور لري.

$$^{0}F \text{ in } ^{0}C \text{ gilt: } f(x) = \frac{5}{9}(x-32)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

xپه ^0F او y په ^0C .

پوښتنې:

کرښيزي توابع III

لومړی: د g کرښو مساوات وټاکی

الف: $P_1(-4|-2)$ او $P_2(2|0)$ په g پراته دي،

ب- g په $P_1(-3|1)$ او $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$ کي ځغلي

پ- $P_1(1|-2)$ او $P_2(-2|10)$ په g پراته دي

ت- g محورونه په x = 2 او y = 6 کي غوڅوي(قطع کوي)

ټ-g له (P(-6;1 تيريږي او له h سره غبرګ دی د $h(x)=-\frac{2}{3}x+2$ مساوات سره

ث- g جګوالی $a_1=-4,5$ لري او له P(1;1,5) څخه تيريږي.

ج- g جګوالی $a_1=3$ لري او له P(1;,1,5) څخه تيريږي

چ- g دx محور په x = 3 کې غوڅوي او د hکرښه د h(x) = 4x - 2 سره په x = -1 کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم: د دوه کرښو g او h کرښيز مساوات پيدا کړئ، چې له ټکی P(3;-2) تيرېږي.

دريم: يوه کرښه g د کرښيز تابع f(x) سره پيدا کړئ، چې له ټکو P_1 او P_2 تيريږي او تابع مساوات وټاکئ.

الف- $P_1(-3|5); P_2(1|2,5)$ ب - $P_1(1,5|3); P_2(3|2,5)$

پ- $P_1(k|3); P_2(2k|-1)$ ت - $P_1(4|0); P_2\left(-1|-\sqrt{2}\right)$

ټ - $P_1(1|0); P_2(-1|k+1)$ ث - $P_1\left(2\sqrt{k}|\sqrt{2k}\right); P_2\left(\sqrt{k}|0\right)$

ځلورم: د f(x) کرښيزې تابع مساوات وټاکئ.که معلوم وي:

الف-کرښه د $a_1 = \frac{5}{4}$ جګيدني سره له P(4;-1) ځخه تيرېږي.

ب-کرښه له ټکو $P_1(-5|-3)$ او $P_2(0|3)$ ځخه تيرېږي.
پ-کرښه له P(4,5;2,7) ټکي تيرېږي. او د x محور سره 45° مايله ده.

ت-کرښه له P(-1,5;0) تيرېږي او د h(x) = 2x+2 سره غبرګه (موازي) ده.

پنځم: کر ښه g و کاږئ او کرښيز مساوات وټاکئ.

الف- $P(3|-1) \in g$ او g دy محور سره غبر؛(موازي) ځغلي.

ب- $P(3,5|2,5) \in g$ او g دx محور سره موازي ځغلي.

پ- g له P(-5;1)تېرېږي او د $h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ سره موازي ده.

ت- g له $P\left(1|\frac{3}{2}\right)$ تېرېږي او د کرښو سره چې له ټکو $P_1(-2|-3)$ او $P_2\left(\frac{3}{2}|-5\right)$ تېرېږي، موازي ځغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

کرښيز مساوات VI

لومړی –

د لاندې کرښيزو توابعو ګرافونه و کاږی او د ارزښت سټ يا – دېرې W و ټاکی

الف- $f(x) = -2x + 2;\ D = \{x | -3 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4};\ D = \{x | -4 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3;\ D = \{x | -2 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = 3x - 6;\ D = \{x | -1 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$

دويم –

ټکی P_1 او P_2 ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د f (x) تابعمساوات پيدا کړی او ګراف يې وکاږی

الف- $P_1(3 | 4);\ P_2(7 | -1);\ D = \{x | 0 \leq x \leq 7\}_{\mathbb{R}}$

ب - $P_1(-8 | 1);\ P_2(2 | -3);\ D = \{x | -8 \leq x \leq 2\}_{\mathbb{R}}$

پ - $P_1(4 | 3);\ P_2(-7 | -1);\ D = \{x | -7 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $P_1(-4 | -4);\ P_2(4 | 2);\ D = \{x | -4 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$

دريم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې مساواتو حلسټ يا حلډېرۍ پيداکړئ. مساوات چې کسرى راشنل ترمونه ولري، بايد د هغو تعريفورشو هم ورکړل شي.

الف- $x-5=9$ ب - $8+x=25$ پ - $x-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ ت - $\frac{5}{9}=x-\frac{1}{3}$

ټ - $88=4x-16$ ث - $a+bx=3b+a$ ج - $8-(x+5)=2$

چ - $9+(5-x)=6$ ح = $(x-6)(x+3)=(x-5)(x-2)$ خ -

خ - $(x+3)(x+7)=(x+2)(x+9)$ $\frac{x}{4}+\frac{5x}{6}+\frac{5}{6}=\frac{x}{2}+x$

ځ - $\frac{3}{2x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{9}+\frac{7}{3x}$ د - $\frac{ax}{b}-\frac{b}{ac}=\frac{a}{bc}-\frac{bx}{a}$ ډ - $\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=a$

ذ- $23a-\{5ax-[9ax+(12a-6ax)]-(3a-8ax)\}-15a=5ax-7a$

څلورم:د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پيدا کړئ.

الف- $f(x)=2x-7$ ب - $f(x)=-2x+6$ پ - $f(x)=3x-3$

ت - $f(x)=2x+\frac{2}{3}$ ټ - $f(x)=\frac{3}{4}x+2$ ث - $f(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}$

ج - $f(x)=3,5x+\frac{1}{2}$ چ – $f(x)=-2,5x+2\frac{1}{2}$ ح - $f(x)=1\frac{3}{4}x-3\frac{2}{3}$

پنځم: د يوې کرښې دوه ټکي P_1 او P_2 ورکړ شوي د لاندې توابعو له I تر IV لپاروه وټاکئ:

I. $P_1(3\mid 4);\ P_2(7\mid -1);\ D=\{x\mid -2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

II. $P_1(-8\mid 1);\ P_2(2\mid -3);\ D=\{x\mid -8\le x\le 2\}_{\mathbb{R}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III. $P_1(4 \mid 3); P_2(-7 \mid -1); D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

IV. $P_1(4 \mid 2); P_2(-4 \mid -4); D=\{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

الف- د جګیدني ضریب m.

ب - د کرښې تابعمساوات

پ - د y محور سره د تقاطع ټکی P_y

ت - د تقاطع ټکی P_y د x محور سره

ټ - په W باندې ارزښتډېری W.

ث - په D کې د تابع ګراف

شپږم: لاندې مساواتسیستمونه حل کړئ:

الف- $\begin{cases} I & 5y-3x=1 \\ II & x=y+1 \end{cases}$

ب - $\begin{cases} I & 4x+5y=32 \\ II & y=5x-11 \end{cases}$

پ - $\begin{cases} I & 15y-4x=-50 \\ II & x=y+7 \end{cases}$

ت - $\begin{cases} I & 3x=y+15 \\ II & 2y-10=2x \end{cases}$

ټ - $\begin{cases} I & 2y=2x-40 \\ II & 3x=10-2y \end{cases}$

ث - $\begin{cases} I & x+y=a+b \\ II & x-y=a-b \end{cases}$

پوښتنې

کرښیز مساوات IX

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:کرښه g له ټکو P1(4;-3,5) او P2(2,5;-1) تیریږي.

کرښه h له ټکو $P_3(5|2{,}5)$ او $P_4\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{25}{3}\right)$ تیریږي.

ګرښې یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرتې دي؟

دویم:د f(x) کرښیزي تابع د تابع ترم او ارزښتساحه(ارزښتورشو) و ټاکی، که صدق ولري:

الف- $f(0) = 20\,;\, f(12) = 32\,;\, x > 0$ ب- $f(-3) = 6\,;\, f(2) = -8\,;\, x \in [-3\,;\,3]$

دریم:

د f(x)کرښیزې تابع ګراف په 3 LE اوږدوالی واحده کیڼ لور

ته خوزیږي. د راکښل شوې کرښې د f*(x) مساوات څنګه دي؟

$$f(x) = \frac{5}{3}x - 2 \quad D = \mathbb{R}$$

څلورم: د f(x) او g(x) توابع ورکړ شوې دي. د کوم ارزښت لپاره f(x) > g(x) صدق کوي؟

$$f(x) = 2x - 3 \quad ; \quad g(x) = -0{,}5x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

پنځم: یوه g(x)کرښه ورکړ شوې.. دا د یوې کرښې h(x) له خوا قطع کیږي. د h(x)مساوات وټاکی، که باور ولري: $g(x) = -3x + 2$

الف- قاطع یا غوڅی دx محور سره . ب - قاطع(غوڅی) په x = -5 کې

شپږم:

یوه د پیل کرښه د $a_1 = -0{,}125$ جګوالي سره و داسی کښول کیږي. چې کرښه h د مساوات	$h(x) = -1{,}5(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره دx په محور قطع کوي. راکښنه تشریح کړئ او د راکښل شوې کرښې ګراف و کاږئ.	

اوم: یوه $f(x)$کرښیزه تابع ورکړ شوې. کرښه د $x = u$ مساوات سره د $f(x)$ ګراف په P کې قطع کوي او د x محور په Q کې قطع کوي. یوه سکیڅې ترتیب کړئ.

الف- د P او Q کواوردینات وټاکئ، که $f(x) = 0,75x + 2$ وي.

ب- دu د کوم ارزښت لپاره P دx محور پورته لور ته پرته ده.

ت- $P(u \mid f(u))$ په 1 څلورئ یا ربع کې پروت دی. $R(0 \mid 0)$, Q اوP د یوه مثلث رآسونه (ککرټکي)جوړوي. د دې مثلث د مساحت A لپاره ترم وټاکئ. u (محیط) داسې وټاکئ، چې $A(u) = 10$ صدق وکړي.

اتم: دg کرښې ته موازي او عمود مساوات داسې وټاکئ، چې له P ټکي تیر شي.

الف- $g: x + 2 - 3y = 0 ; P(0 \mid 3)$ ب- $g(x) = \frac{2}{3}x - 3 ; P(1 \mid 4)$

پ - $g(x) = -1,5kx ; P(1 \mid 0)$

نهم: کرښه g له ټکوP_1 اوP_2 تیریږي. دh کرښې ته یې ځای مطالعه کړئ او د امکان په حالت کې یې د قاطع ټکئ معلوم کړئ.

$$P_1(-1 \mid 1,5) ; P_2(-2 \mid -2,5) \qquad h: \; -x - 6 - 4y = 0$$

لسم: و ښایئ: کرښه g او کرښه h عمود دي.

$$g: \; y - \sqrt{2}x = 1 \qquad h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$$

$$g(x) = -3x + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يولسم:

د A, B او C ټکي د يوه مثلث د رآس ټکي دي. د$k>0$ د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قايم الزاويه (ولاړګوډيز) دی؟ (ښی رآس په C پروت دی)	$A\left(\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right); C(0\mid k)$

پوښتنې

کرښيز توابع **XI**

لومړی-

$$f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4};\ f_2(x)=-4x-2;\ D=\{x\mid -9\le x\le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره د دويمې کرښې د تابع$f_2(x)$ سره غوڅيږي. وټاکئ:

الف – د کواوردیناتونو x_s او y_s سره غوڅټکی S .

ب – د دواړو کرښو غوڅټکي د y محور سره .

پ – د دواړو کرښو غوڅټکي دx محور سره .

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې .

دويم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4\,;\, D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(3 \mid y_s)$ کې د تابع $f_2(x)$ سره له کرښې څخه غوڅیږي.

وټاکئ:

الف-د S پوره کواودینات

ب-تابع .$f_2(x)$.

پ-د دواړو کرښو غوڅټکي د کواوردینات محورونو سره.

ت-په D کې د دواړو توابعو ګراف.

دریم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1;\, D = \{x \mid -7 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(-4 \mid y_s)$ کې کې له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې پروتمحور په 7- کې غوڅوي، غوڅیږي.

وټاکئ:

الف – د S پوره کواوردینات.

ب – تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کرښو غوڅټکي د کواودینات د محورونو سره.

ت – د واړو توابعو ګراف په D کې..

څلورم –

د یوه دربېکوډي یا مثل ټکي P_1, P_2 او P_3 ورکړ شوي دي. د دربېګوډي د اړخونو تابع وټاکئ. پخوا له دې یو پلان نقشه ترتیب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(-6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(-2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(-4 \mid 3)$$

ب –

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(4 \mid 3)$$

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3 ; P_2(-2 \mid -3) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع f_1 (x) سره د دويمې کرښې څخه د تابع f_2 (x) سره ، چې له ټکيP_2 تيريږي ، په ټکي S کې ولاړکونجيزه غوځيږي.

وټاکئ:

الف - دf_2 (x) جګوالی m_2 .

ب- تابع f_2 (x) .

پ – د دواړو کرښو غوځټکی S .

ت - د دواړ کرښو محورغوځټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښیز توابع XII

لومړی -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3\,;\, P_2(2\,|\,-3)\,;\, D = \{x \,|\, 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له یوې دویمې کرښې د تابع $f_2(x)$ سره، چې له ټکي P_2 تیریږي په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوڅیږي.

وټاکی.

لومړی:

الف – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ب – تابع $f_2(x)$.

پ - د دواړو کرښو غوڅټکی S .

ت - د دواړو کرښو د محورغوڅټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

دویم –

د کرښې تابع $f_2(x)$ وټاکی، چې پروتمحور په P_{x2} کې غوڅوي او له کرښې څخه د تابع $f_1(x)$ سره په S کې غوڅیږي. د واړو کرښو غوڅټکي وشمیری او د دواړو کرښو ګراف په D کې رسم کړی.

الف- $f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6\,;\, P_{x2}(-6\,|\,0)$ ، $S\left(x_s \,\middle|\, \frac{3}{2}\right);\, D = \{x \,|\, -6 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3\,;\, P_{x2}(4\,|\,0)$ ، $S(3\,|\,y_s)\,;\, D = \{x \,|\, -1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

دریم -

$$P_1(-5\,|\,5)\,;\, P_2(-1\,|\,-1)\,;\, S(x_s\,|\,2)\,;\, D = \{x \,|\, -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 او P_2 تیریږي او په ټکي S کې ولاړکونجیز له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره غوڅیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وټاکئ:

الف- د $f_1(x)$ جګوالی m_1 .

ب – تابع $f_1(x)$.

پ – دS پوره کواوردینات.

ت – د$f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ – تابع$f_2(x)$.

ث – د $f_1(x)$ او$f_2(x)$ ګرافونه

څلورم -

$$P_1(5\,|\,5);\ P_2(1\,|\,-1);\ S(3\,|\,y_s);\ D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 اوP_2 څخه تیریږي او په ټکي S کې ولاړکونجیزه له کرښې د تابع $f_2(x)$ سره غوڅیږي.

وټاکئ:

الف – د $f_1(x)$ جګوالی m_1 . ب - تابع $f_1(x)$.

پ - د S پوره کواوردیناتونه ت – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ - تابع $f_2(x)$. د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ګرافونه.

پنځم -

$$f_2(x)=3x-3;\ S\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\ D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجیزه غوڅیږي.

وټاکئ:

الف - تابع $f_1(x)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅتکي.

پ – د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پوښتنې

کرښیزې توابع برخه XIII

لومړی -

$$f_2(x)=\frac{4}{5}x+\frac{9}{10};S\left(2\left|\frac{5}{2}\right.\right);D=\{x\,|\,-1\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع$f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجیز(قایم الزاویه) غوځیږي.

وټاکی:

الف: تابع $f_1(x)$.

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅتکي.

پ – د دواړو توابعو ګرافونه په D کې.

$$g:\quad y-\sqrt{2}x=1\qquad\Rightarrow g(x)=\sqrt{2}x+1$$

$$h:-2y-\sqrt{2}x+6=0\Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}x+3$$

د اورتوګونالیتي شرایط: $a_{1g}=-\frac{1}{a_{1h}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ \text{q.e.d}$$

دويم:

د دوه کرښنو توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ورکړشوي او د يوې دريمي کرښې جګوالی د m_3 د تابع $f_3(x)$ سره. تابع $f_3(x)$ داسې وټاکئ، چې ګراف يې د نورو دواړو کرښنو غوښتکي ځخه تير شي. د دريواړو کرښنو محور غوښتکي وټاکئ او د دريواړو توابعو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2;\ m_3 = \frac{1}{4}$$
$$f_2(x) = 2x + 4;\ \ D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب –

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4};\ m_3 = -4$$
$$f_2(x) = 2x + 4;\ \ D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

دريم: کرښه دتابع $f_1(x)$ سره له ټکي P_1 تيريږي او له يوې دويمې کرښې چې له ټکي P_2 تيريږي په ټکي S کې غوځيږي. توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ وټاکئ د هغو محورغوښتکي اوپه D کې يې ګراف وکاږئ.

$$P_1\left(-2 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right);\ P_2(3 \mid 5);\ S\left(2 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right);\ D = \{x \mid -8 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right);\ P_2\left(-3 \,\middle|\, \frac{11}{2}\right);\ D = \{x \mid -9 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره محور په 8- کې غوځوي. $f_1(x)$ ته غبرګه یوه دویمه کرښه د تابع $f_2(x)$ سره پروت محور په 4- کې غوځوي. دواړه کرښې له یوې دریمې کرښې چې تابع $f_3(x)$ لري او له ټکو P_1 او P_2 تیریږي په ټکو P_3 او P_4 کې ولاړکونجیزه(قایوم الزاویه) غوځوي. وټاکئ:

الف- تابع $f_3(x)$ ب - تابع$f_1(x)$

پ – تابع $f_2(x)$ ت – د دریواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2}\,\middle|\,-\frac{3}{2}\right); B(3 \mid 2); D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د یوه قایوم الزاویه مثلث(ولاړکونجیز دریګودي) څخه، چې ولاړ کونج(قایم الزاویه) یې په C کې پرته ده، ټکي A او B ورکړ شوي. د مثلث اړخ یا ضلع [BC] د تابع $f_3(x)$ سره د اوردینات یا ولاړ محور په 3 کې غوځوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع $f_1(x)$ ب- د اړخ یا ضلعې [BC]تابع $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع $f_2(x)$ ت- د ټکي C کواوردیناتونه

ټ په D کې ګرافونه.

پوښتنې

کرښیزې توابع **XIV**

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: $A(-8|-6); C(-1|5); D=\{x|-8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

له یوه قایمالزاویه مثلث، چې قایمه زاویه یې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ)[BC] د اوردینات محور (ولاړمحور) په 3کې قطع کوي.

دا وټاکئ:

الف-

$[AB] = f_1$; $[BC] = f_2$; $[AC] = f_3$ د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواودینات یا وضعیه قیمت کې د ټکي B محورونه

پ -په D کې ګراف.

دویم:

$A(-4|-1); B(2|-4); D=\{x|-4 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

د یوه مثلث ټکيA او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع دy محور په 12-کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکئ:

الف-تابع $f_1(x)$ ضلع .[AB] قطع کوي

ب - تابع $f_2(x)$ ضلع [BC] غوڅوي.

پ - تابع $f_3(x)$ ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعیه قیمتونه

ټ - د D ټکي وضعیه قیمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: توابع $y = f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = ax + 3$ ورکړ شوي.

د دواړو توابعو ګرافونه په ټکي $S(3 \mid 5)$ کې غوڅوي.

د $h(x)$ تابع مساوات داسې وکاږۍ، چې ګراف په ټکي S عمود څغلي. په یوه وضیه قیمتسیستم کې دریواړه ګرافونه رسم کړۍ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4};\ f_2(x) = -4x - 2;\ D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$$

د $f_1(x)$ تابع سره کرښه د دویمې کرښې د $f_2(x)$ تابع سره قطعه کوي.

دا وټاکۍ:

الف- د S قاطع ټکی د x_s او y_s کواودینات سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د x محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د x محو سره.

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

د $g(x)$ تابع ، چې په $f(x)$ عمود ده پیدا کړۍ. د $g(x)$ ګراف د y محور په $P_y(0 \mid 3)$ ټکي قطع کوي. دواړه کرښې په یوه وضعیه قیمت سیستم(پروت ولاړ سیستم) کې رسم کړۍ.

الف - $f(x) = -2x + 2$ ب - $f(x) = 3x - 6$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ت - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوڅټکی (نقاط تقاطع) و ټاکۍ او ګراف یې وکاږۍ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\, f_2(x) = -4x - 2\,;\, D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = -2x + 2\,;\, f_2(x) = 3x - 6\,;\, D = \{x \mid -2 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4\,;\, f_2(x) = \frac{3}{2}x - 2\frac{1}{2}\,;\, D = \{x \mid -1 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1\,;\, f_2(x) = \frac{5}{6}x + 5\frac{5}{6}\,;\, D = \{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

n -مه درجه ټول مات- یا راشنل توابع

n -مه درجه ټول راشن لفنکشن

یو تابع د $f(x)$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

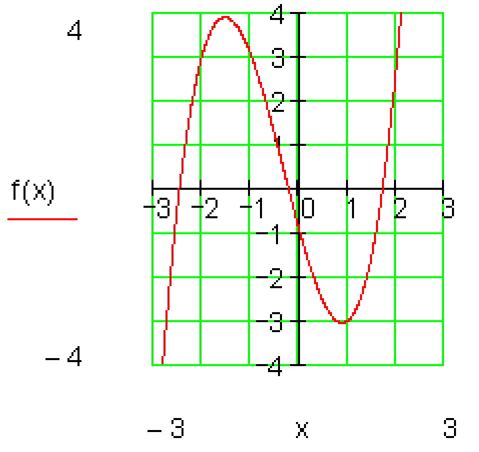
سره n -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کیږي.

عددونه $a_n\,;\,a_{n-1}\,;\,a_{n-2}\,;\,\ldots\,a_2\,;\,a_1\,;\,a_0$ ضریبونه بلل کیږي.

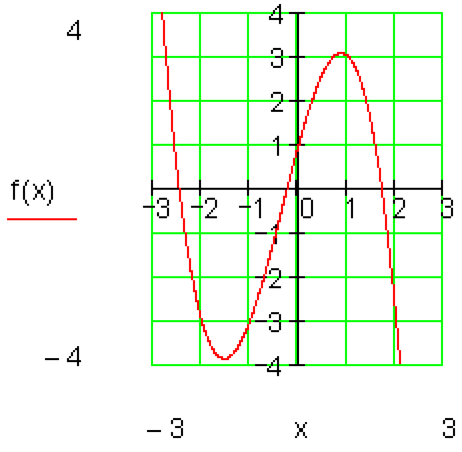
ټول راشنل یا هوښیار توابع د توان توابعو یوځای ایښوولو له لارې لاس ته راځي.

بیلګې:

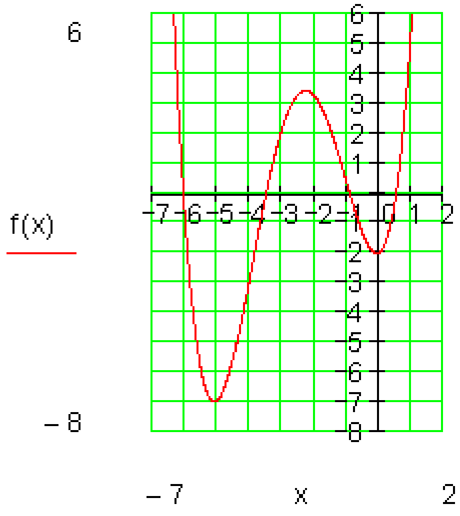
(c) ketabton.com: The Digital Library



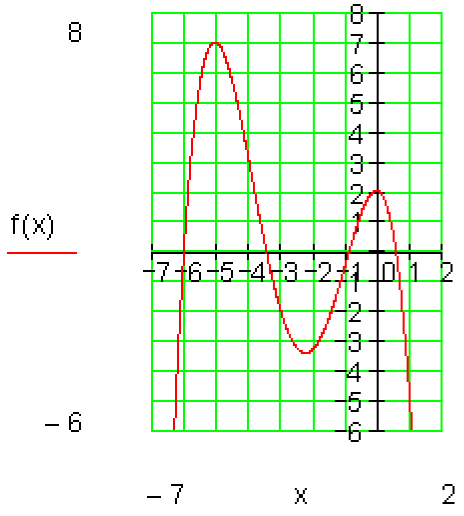
$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$



$f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 1$



$f(x) = 0,2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 2$



$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$

د ګراف تلنه

جمله:
د ټول راشنل تابع ګراف تلنه د خورا جګ توان زياته ووني (د جمعي غړي) سره تاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	n جوړه	n ناجوړه(طاق)
$a_n>0$	تلنه له II و I ته.	تلنه له III و I ته.
$a_n<0$	تلنه له IV و III ته.	تلنه له II و IV ته.

بیلګه: د الماي پېنتو: ناجوړه(طاق) جوړه (جفت) ناجوړه

$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \quad n = 3\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$

$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \quad n = 4\ (\text{gerade}) \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$

$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \quad n = 5\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$

سيومتري

ګومان مو نږدې دی،   هغه توابع، چې فقط د جوړه جګعددونو توانونو څخه یوځای شوي وي، محور سیومتریک دي او توابع چې فقط د ناجوړه(طاقو) جګعددونو توانونو څخه یوځای شوي وي، ټکی سیومتریک دي.

جمله

د یوه ټولراشنل تابع ګراف ټیم هلته محورسیومتریک دی، که تابع مساوات فقط جوړه جګعددونه ولري.

د یوه ټولراشنل تابع ګراف ټیک هلته ټکیسیومتریک دی، که تابع مساوات فقط ناجوړه (طاق) جګعددونه ولري.

بیلګه:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$$

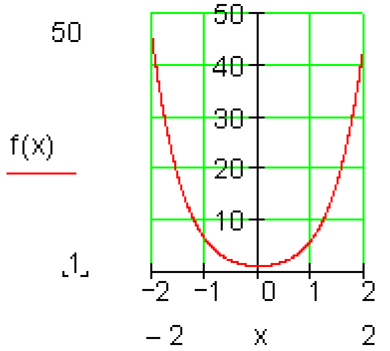
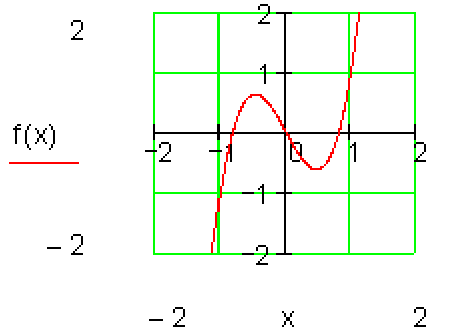
(c) ketabton.com: The Digital Library

محورسیومتریک

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -\left(3x^3 - 2x\right) = -f(x) \Rightarrow$$

تکی سیومتریک

 $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$ yمحور ته سیومتریک دی (محورسیومتریک)	 $f(x) = 3x^3 - 2x$ سرچینې ته سیومتریک دی (تکی سیومتري)

تمرینونه:

د ټول هوښیارو توابعو خویونه.

د لاندې تاوبعو په سیمتری، تلنه او د صفرځایونو تعداد یا ګنون باندې وېناوې وکړی.

لومړی - $f(x) = 2x^2 - 1$ دویم - $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ریم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2$ ځلورم - $f(x) = -x^5 - x^3 + x$

پنځم - $f(x) = x^6 - x^4 + 1$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2x$

اوم - $f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$ اتم - $f(x) = \frac{1}{100}x^{10} - \frac{1}{50}x^6 + \frac{1}{10}x^2$

نهم - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x - 1$ لسم - $f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x$

پە یوه خوښه ټکي ته سیومتریک

که د یوه ټکي سیومستري تابع ګراف پە خوښه راکښل شي، نو سیومتري سرچیني ته ځي، چې موږ یې ټکی سیومتري بولو له منځه ځي. نسبت و موخښتکی ته دا ساتلې پاتې کیږي.

بیلګه:

د $f(x)=0,5x^3-1,5x$ تابع ګراف ټکی سیومتریک دی، یعني سرچینې ته سیومتریک.

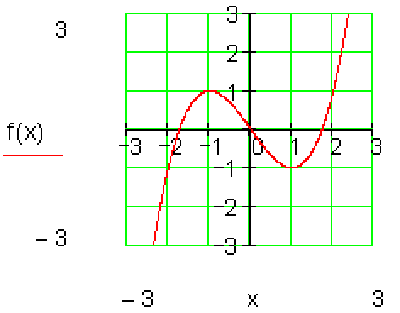
دا ګراف دې پە ۲ واحدونو یا یوونونو کیڼ لور ته او پە ۳ یوونونو یا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

د راکښلشوي ګراف تابع مساوات دي:

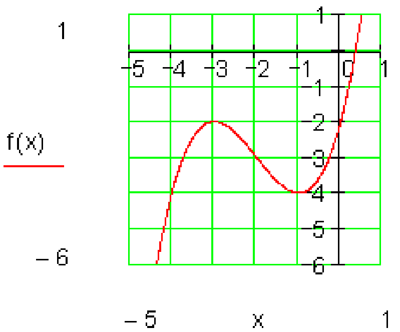
$$g(x) = 0,5(x+2)^3 - 1,5(x+2) - 3 = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$$

$g(x)$ و ټکی $P_0(-2|-3)$ ته سیومتریک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = 0,5x^3 - 1,5x$



$f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$

کواوردینانسیستم د ګراف په بڼه کوم رول نه لوبوي. تنها تابع مساواتوتغیر خوړلی.

د حالت بیلګه: باید وازمایل شي، چې ایا د دریمې درجې د یوه ټول هوښیار تابع ګراف یوه ټاکلي ټکی ته ټکی سیومتریک دی.

ترمخ راوړنه.

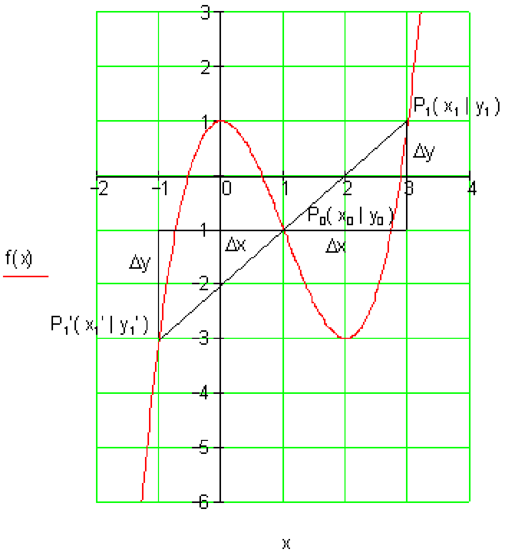
چمتووالی:

د ټکو کواوردینات لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$
$$x_1' = x_0' - \Delta x$$
$$y_1' = y_0' - \Delta y$$
$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-یا منعکس شوي ټکو کواوردیناتونه:

$$x_1' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$
$$y_1' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دي قاعدې يا لار سره تل کېدی شي په P_0 و P_1 ته يوه هندارونه يا انعکاسونه کې اړونده هندارونه P_1' وټاکل شي.

بيلګه:

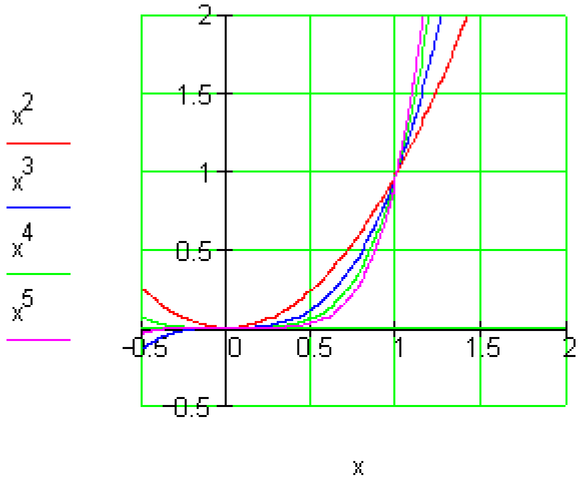
که هنداورنه په ګراف نه وي پرته ، نو ګراف و P_0 ته ټکی سيومتريک نه دی.

پوښتنې

تول مات- يا راشنل توابع I

د توانتوابعو خويونه

لومړی –

	دا ترخنګ په 1 . ځلورمه کې ګراف تر ځيرنې لاندې ونيسی د x ارزښتونو لپاره د 0 او 1 ترمنځ دجګو درجو يو د توان تابع ګراف پروت دی د يوه توان تابع د ګراف لاندې يا کښته د ټيټې درجې. د $x > 1$ لپاره دا ټيک برعکس کېدونکې دي. د دې حالت لپاره لايل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – د دریمې درجې توان تابع کراف دې په دوه واحده کینې لور ته او تړلی په درې واحده پورته لور ته و کښل شي.

د دې راکښل شوې تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات ورکړ شي.

دریم –

د څلورمې درجې توان تابع ګراف دې په درې واحده ښی لور ته او پسې تړلی دې په دوه ضربیه وغزول شي.

الف – د راکشل شوي ګراف لپاره تابع مساوات ورکړئ

ب – وښایی، چې ګراف نه محور – او نه ټکی سیومتریک دی.

څلورم –

په کوم توان تابع $f(x) = x^n$ کې ټکی په ګراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات ورکړئ.

الف - $P(-3 \mid -27)$ ب - $P(-2 \mid 16)$ پ - $P(0{,}5 \mid 0{,}25)$ ت - $P\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{27}\right)$

ټ - $P(0{,}1 \mid 0{,}0001)$ ث - $P(-1 \mid 1)$ ج - $P(-2 \mid 8)$ چ - $P\left(\frac{3}{4} \mid \frac{81}{256}\right)$

پنځم –

د لاندې توان توابعو سیومتري او د ګراف تلنه وټاکی او د هر یوه ارزښتډېرى(ارزشتست) او درجه ورکړې.

الف - $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = -160x^2$ پ - $f(x) = -1500x$

ت - $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ ټ- $f(x) = 5$ ث - $f(x) = -25x^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم –

لاندې تابع مساوات د پولینوم په بڼه انځور کړی.

هر ځل يې درجه ورکړی.

الف - $f(x)=(x-2)^2-4x^3$ ب- $f(x)=4(x+5)^3+(x-2)(x+2)$

پ- $f(x)=2x^3-(x-1)^2$ ت - $f(x)=(x-4)(x+1)^2$

ټ - $f(x)=(x^2-4)(x^3-x^2+4)$ ث - $f(x)=\frac{x-5}{8}(x-2)+\frac{3}{4}x^2$

اوم -

دليل راوړی:

د يوه ناجوړه(طاق) درجې تولراشنل تابع ګراف دx محور لږ ترلږه په يوه ځل غوڅوي.

دا هلته هم باور لري که درجه جوړه يا جفتوي؟

پوښتنې

ټول راشنل توابع II

سيومترى او تلنه

لومړی – و څېړی، چې ايا f(x) يو تولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کې د تابع ګراف، درجه او د ضريبونو $a_0; a_1; a_2; \dots an$ ارزښتونه ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f(x)=2$ ب - $f(x)=4x$ پ - $f(x)=2^x$ ت - $f(x)=\frac{x^3-4x}{8}$

ټ - $f(x)=\sqrt{3}x^4$ ث - $f(x)=\frac{1}{x}$ ج - $f(x)=\sqrt{x}$ چ - $f(x)=\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

ح - $f(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ خ - $f(x)=16x^3-2x^2+5x^2-4$

دویم – د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم یې محور سیومتریک او کوم یې ټکی سیومتریک دي؟

الف - $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=x^3+3x+1$ پ - $f(x)=(x-2)(x+2)$

ت - $f(x)=x^6-6x^2+\sqrt{3}$ ټ - $f(x)=(x-2)^3(x-1)$ ث - $f(x)=x^4-\sqrt{5}x^2$

ج - $f(x)=\left(2x^4+2x^2+5\right)x$ چ - $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)(x+1)(x-1)$

ح - $f(x)=1-3x^2+x^6$

دریم – د c متحوله داسې وټاکئ، چې د تابع ګراف ټکی سیومتریک او همداسې محورسیومتریک شي.

الف - $f(x)=x^3+4x+c$ ب - $f(x)=(x-c)(x+4)$ پ - $f(x)=x^5+x^c$

ت - $f(x)=x^3\left(x^2-cx\right)$ ټ - $f(x)=c+x^3$ ث - $f(x)=4x^3+x^2+cx^2+5x$

څلورم : د لاندې توابعو د ګراف تلنه معلومه کړئ.

الف - $f(x)=2x^5-6x^3$ ب - $f(x)=-4x^4+3$

پ - $f(x)=2x-5$ ت - $f(x)=-2x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x)=4x^4-3x^2+4x-5$ ث - $f(x)=-6x+3$

ج - $f(x)=4x^4+3x^3-6x^5$ چ - $f(x)=-2x^5+6x^3$

پنځم - د لاندې توابعو د ګراف تلنه او سیومتري ورکړی.

الف - $f(x)=\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x^4-2$ ب - $f(x)=x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(8-\frac{1}{2}x\right)$

پ - $f(x)=5x^6-4x^4+5$ ت - $f(x)=x^5+x^3-2x$

ټ - $f(x)=5$ ث - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(x^2+6x+9\right)$

ج - $f(x)=x^5+4x^4+4x^3$ چ - $f(x)=\left(4x^2-4\right)\left(x^3+8x^2+16x\right)\left(x^3+27\right)$

ح - $f(x)=-3$ خ - $f(x)=-x^5+x^3-2$

شپږم : د لاندې تابعو صفرځیونه وشمېرئ:

الف - $f(x)=(x-4)(x-2)(x+1)$ ب - $f(x)=(x-4)(-x+2)$

پ - $f(x)=x(x+5)^2$ ت - $f(x)=3(x-4)^3(x+2)$

ټ - $f(x)=(2x-4)(x+3)x^3$ ث - $f(x)=x^3-2x^2$

د ټولراشنل توابعو محور غوځېټکي (د محور د تقاطع نقطی)

د ټولراسنل توابعو محور غوځېټکي (د محور د تقاطع نقطی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y محور سره غوڅټکی $P_y(0|y_s)$: $P_y(0|y_s)$ شرط: $y_s = f(0)$

بېلګه : د يا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$\Rightarrow P_y(0|-3) \text{ oder } P_y(0|f(0))$$

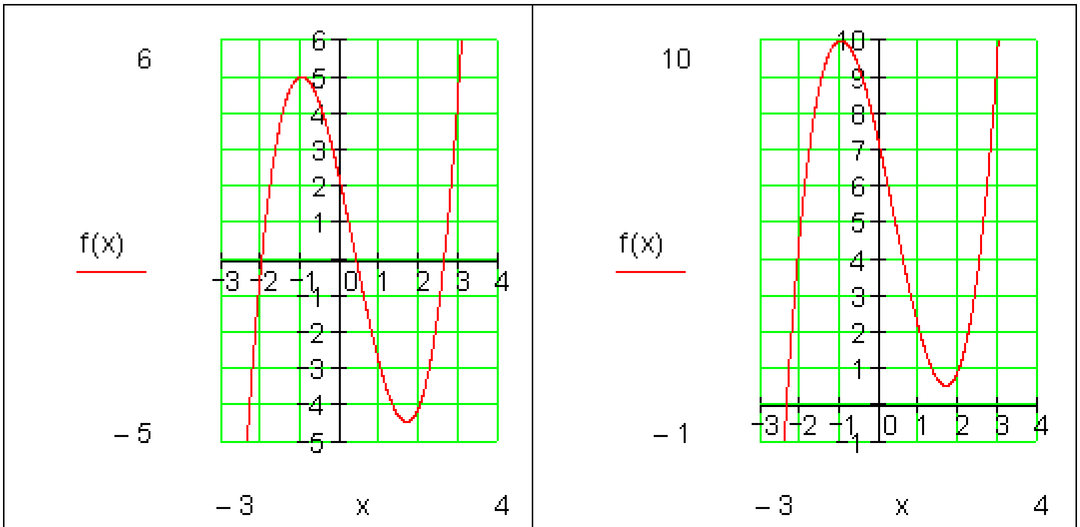
د P_y د y کواوردينات تل د ضريبونو a_0 سره کټمټ ده.

دا تل د تابع مساوات څخه لوستل کيدی شي.

د x-محور سره غوڅټکی $P_y(x_s|0)$ صفرځای : شرط: $f(x) = 0$

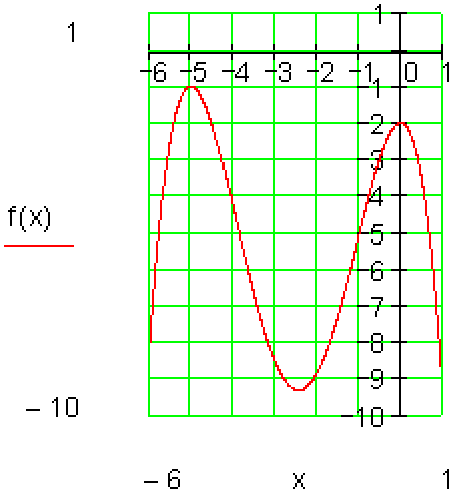
د مربع تابع (د دويمې درجې ټولراشنلتابع) څخه بوهيږو، چې دا دوه ، يو ، يا هيڅ صفرځايونه لرودی شي. دا د څګ درجو ټول راشنلتابع سره څنګه دی؟

بيلګه:



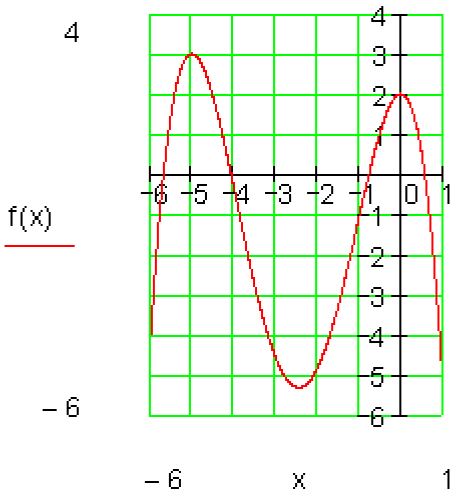
$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$	$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$
دري صفرځايونه لري	صفرځای نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x - 2$$

د صفرځای نه شتون



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x + 2$$

خلور صفرځایونه لري.

جمله:

یو د n -مي درجي تولراشنل تابع زیات له زیاته n صفرځایونه لري.

که n جوړه وي، نو دا لرترلږه یو صفرځای لري.

د صفرځایونو شمیرني لار(تګلار)

د فکتوري کونو یا صریبونو تګلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاکتور x له نوکانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x\left(2x^2 - 2x - 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوکانو کې افاده یا وییته صفر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \,|\, : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1;\ q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

صفرځایونه :

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -1$$

د x محور سره غوځتکی

$$P_{x1}(0|0);\ P_{x2}(2|0);\ P_{x3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کرښیز ضریبونو ضرب

د بدلون قانون substitution:

یادونه: په دې معنا چې د یوې اووښتونې یا متحولې لپاره بله متحوله ځا په ځای کوو.

$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ بې مربعیز(بي ځلوریز) مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

بدلون په څټ- يا بيرته ګرځوو:

$$x^2 = z_1 = 9 \,|\, \sqrt{\ } \qquad x^2 = z_2 = 4 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{9} \qquad |x| = \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \qquad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

د x محور سره غوڅټکی

$$P_{x1}(3|0); P_{x2}(-3|0); P_{x3}(2|0); P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

د کرښيز ضريبونو ضرب

پوښتني

محور غوڅټکي او د ټولراشنل يا ماتتوابعو ګرافونه II

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د درېمې درجې يو ټولهوښيار يا –راشنل تابع سرچيني سره سيومتريک ده، که

الف- له ټکو $P_1(1|2)$ او $P_2(3|-2)$ څخه تېره شي.

ب- که کربنهg د g(x)=3x سره پارابول په P(0|0) کې لمس کړي.

دويم: تابع f(x) د پېژندورشو يا تعريف ساحې D = IR سره ورکړ شوې ده. تابع f(x) په سيومتري وڅېړی، صفرځايونه وشميری او ګراف وکاږی.

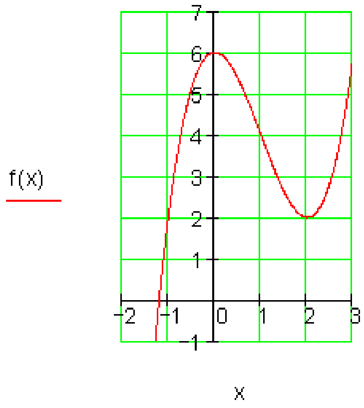
الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2$ ب – $f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

پ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$ ت - $f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$ ث - $f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

ج - $f(x)=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$ چ = $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

دريم: تابع $f(x)=x^3-3x^2+6\,;\,D=\mathbb{R}$ ورکړشوې ده.

	الف - وښايی: د f(x) صفرځای د (1- ; 2-) ترمنځ پروت دی مدلل کړی، چې f(x) ټيک يو صفرځای لري، دا ګراف بايد څنګه راکښل شي، چې له هغې سره دا ټيک دوه صفرځايونه ولري؟ ب- کربنه x = u د f(x) ګراف په ټکي Q او د x محور په P کې غوڅوي. د لاندې درېګوډي يا مثلث 0PQ سطحه د u = 2 لپاره وښايی. د مثلث د (خوندي) سطحې ترم د u په واکوالي کې د u > 0 لپاره ورکړی. g(x) څومره صفرځايونه د g(x)=3.f(x) سره لري؟ دلايل يې راوړی.

څلورم: تابع $f(x)=5x^3-10{,}8x+4$ ورکړ شوې ده. وښای: x=0,4 يو صفرځای دی. پسې نور صفرځايونه وشميری.

$f(x)=5x^3-10{,}8x+4\,;\,D=\mathbb{R}$

پنځم: د اووښتوني يا متحولي c په واکوالي کې د صفرځايونو تعداد وټاکی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx \,;\, D = \mathbb{R}$$

$$x^2 + 2x + 2c = 0 \Rightarrow p = 2\,;\, q = 2c \Rightarrow D = 1 - 2c$$
$$\text{für } D > 0 \Rightarrow 1 - 2c > 0 \Leftrightarrow c < 0{,}5$$
$$\text{für } D = 0 \Rightarrow 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0{,}5 \Rightarrow x_{2/3} = -1$$
$$\text{für } D < 0 \Rightarrow 1 - 2c < 0 \Leftrightarrow c > 0{,}5$$
$$\text{für } c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0\,;\, x_3 = -2$$

اړيکې:

د $c > 0{,}5$ لپاره $f(x)$ تيک يو صفرځای لري:$P_x(0 \mid 0)$

د $c = 0{,}5$ يا د $c = 0$ لباره$f(x)$ تيک دوه صفرځايونه لري.

د$c < 0{,}5$ او c د صفر سره نامساوي لپاره $f(x)$ تيک درې صفرځايونه لري.

پوښتنې

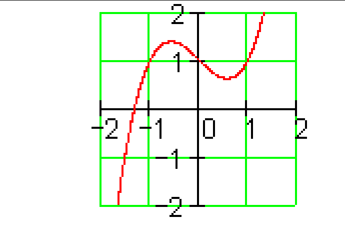
د ټول راشنل توابعو محور غوښتکي او ګرافونه III

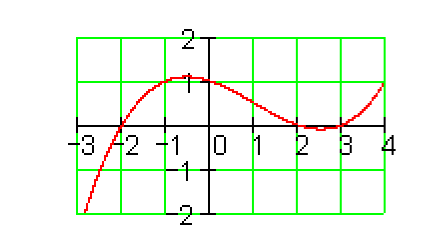
تابع په يوه ګراف تنظيميږي.

لومړی: هر د يوه تابع ترم سره تنظيم کړی او خپله پريکړه په دليل کلکه کړی.

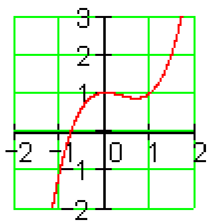
$$f_1(x) = x^3 - x + 1;\; f_2(x) = x^3 - 2x + 1$$

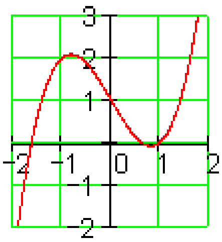
$$f_3(x) = x^3 - x^2 + 1;\; f_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$





(c) ketabton.com: The Digital Library





دويم: هر هغه څوک چې د لايسنس اخستلو لپاره ځان چمتو کوي، بايد وپوهيږي، چې د يوه بريک وهونکي موټر تمکيدني واټن په يوه وچ پاخه سرک)چې طبعأ بايد هوار وي) د عکسالعمل لار او د بريک لار څخه يوځاى جوړه ده. د لاندې د موټې قانون يا لار(د درې ګوتو) څخه کيدی شي د چټکتيا v په km/h د عکسالعمل لار r او د بريک لار b په متر وشميرل شي.

د بريک لار: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ همداسي $b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2}$ ، د عکس العمل لار: $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

د المان د3.3.04 راين اخبار د اول له جولاى1. Juli 2004 په وچ سره د تمځاى لار په بل بريکلار شميرل کيږي.(په افغانستن کې به داځنګه وي ؟نه پوهيږم)

الف- تابع مساوات $s = f(v)$ وټاکى، د کوم سره چې د هرې تلنې د چټکتيا يا سرعت تملار شميرل کيدی شي.

ب – د لاندې تلل شوى چټکتيا $v = 0, 10, 20, 30, \ldots 50$ km/h لپاره په يوه ارزښت جدول کې د هغه هر يوه تمځاى s سره يوځاى کړى

پ – له دې سره د (60 ... 100 km/h) لپاره د s يو څونور ارزښتونه وشميرى او د دې تابع ګراف وکاږى.

ت – د نوې بريک نيولو قانون(المانى) سره دا تراوسه شميرل شوي ارزښتونه وشميرى او دا په همغه کواوديناټ سيستم کې وکاږى او توله نتيجه په شننه يا کومنتار سره روښانه کړى.

دريم: داتابعوکړ شوي: $f(x) = x^3 - 0,5x^2 - 3x + 1,5\,;\, D = \mathbb{R}$

الف- وښايى: $f(x) = 0,5(2x-1)(x^2-3)$

ب –ګراف د شوونتيا تر پولې ټيک وکاږى.

پ – د x د کوم ارزښتونو لپاره $f(x)>0$ باور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شننیزه څمککچپو هنه یا تحلیلي هندسه:

تحلیلی هندسه(وکتورهندسه هم) د هندسي یوه برخه ده، چې د هندسي پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په تولیزه توګه له کربنیز الجبر) څخه جمتو کوي. دا په ډېرو حالتونو کې ممکن کوي، چې څمککچیزې پوښتنکوني سوچه شمیرنیز حل کړی شو، بې له دې چې لیدوني یې مرستې ته راوبولي یعني چې شکل څنګه برېښي یا دی.

۱۶ - د سطحې شننیزه (تحلیلي) هندسه

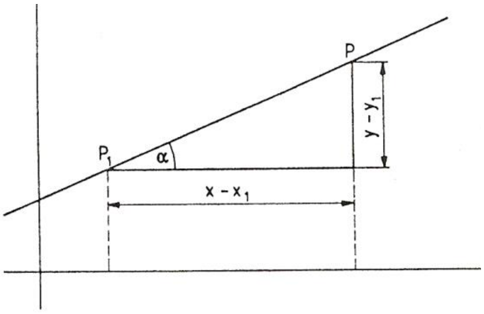
په دې برخه کې یوڅود تحلیلي (شننیزې یا سپړنیزې) څمککچپوهنې یا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کیږي.د تحلیلي هندسي بنسټیزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننیزې یا تحلیلي څرګندونویی د هندسي خویونو جوړښت بنایي.

۱۶ . ۱ کربښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې یوه کربښه یواځنی کره تعین کړای شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو یا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. یوه کربښه د یوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کیدي شي . (ټکی او د ټکی میلان معلوم دی) .

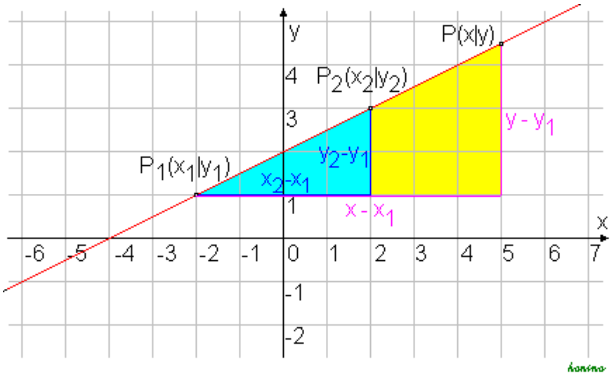
دلته دې(P1(x1 , y1 دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګیدو کونج،وي، چې د کربښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کربښه یو اووښتونی (واریابل) ټکی دی٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو د کربنی د میلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ځیره دې وکتل شي(لاددې ځیره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې ځخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1);.....................(16,1)$$

پورته د کربنی تکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: y - b = m (x - 0) په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کربنمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کیږي

یوه کربنه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (ځيره ش ۱۶ . ۲) د جګيدونکی يا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x \ - x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکيزبرابرون

ځيره ده

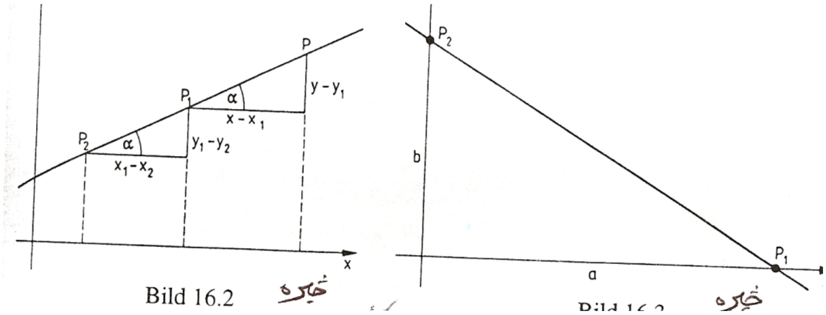


Bild 16.2 ځيره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردينات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردينات x1= 0, y2 = b|= 0 سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابرون

ځلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاينيز دي.د مساوات عمومي فورم)يا ټوليزه بڼه (داسی دئ:

Ax + By + C = 0 (16 . 5)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)
دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي
y = y0 (A = 0 ,B|=0)
او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښې دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څیړل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تیریږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ یی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی لیکل کیږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم یي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیزبرابرون یا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(**اته** ناسم، په ځای یې شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او
جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت
په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ښیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

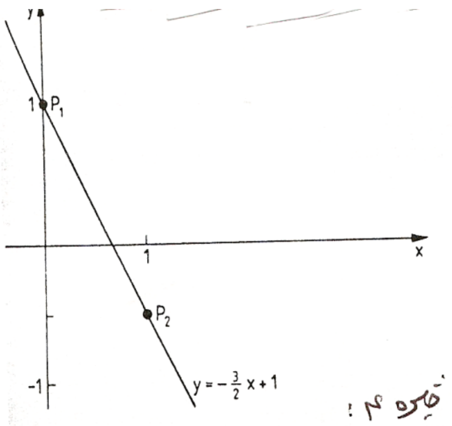
بیلګه ۱۶ . ۴ :

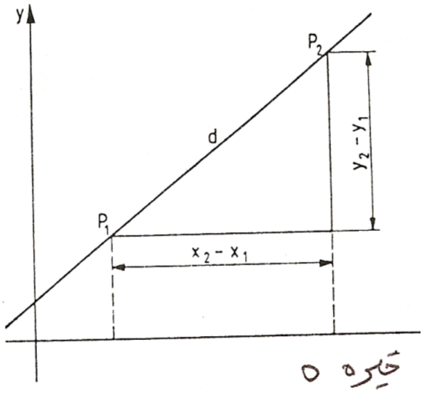
د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي٠
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ښیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};.........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ښیرې ۱۶ . ۴ او - ۵





بیلګه ۱۶ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېګوړي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجټکي یی دادي(A(3,1),B(-1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2+(5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2+(5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2+(1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کربښي (نه کږمتی) چی (یو د بلی سره) غبرګي نه وي ټیك یو غوځټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواوردیناتو برابرون باید پوره کړي . په دې حالت کي د غوځټکي کواوردیناتو، د دوه لاینیزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې یا

ناپيژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابرونسیستم چی د دوه کربښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کربښي یو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډيرې اوبیونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه یوه کربښه ښایي، که کوم اوبی ونه لري، نو کربښي یوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بېلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کربښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کربښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څیرو
اوبیونه : د g1 برابرونونو څیره داسی بدلیږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سیستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټیك یوه اوبونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګندیږي چی ټکی(S(3 , 7 د کربښو g1 او g2 غوځټکی دی .
ب) د برابرونونو سیستم

$$3x - y = 2$$

$$3x - y = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کربنی يو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سيستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

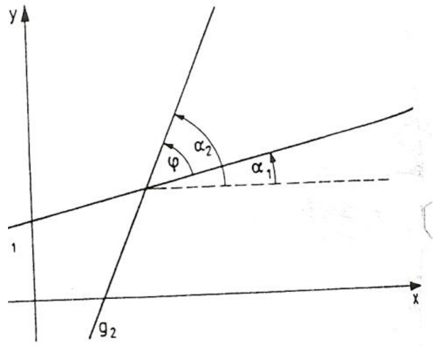
ناپای ډير ې اوبيونې يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کربنو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کربنو ځګيد کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کربنی له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنسټيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

د کوم څخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کربنو غوڅکونج دير.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $0 < \phi \vee \phi > 0$ د پورته ځېرې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دئ.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4}-1}{1+1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښی یوبل سره غبرګی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

ګورو چی د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m - m)/(1 + m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

یعنی د m2= -1/m1 لپاره (m1|=0,m2|= 0)

په کرښه(y=y0 (m1=0 باندې کرښه(x=x0(m2=oe نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

m2 = m1 (16, 8)

د اورتوګونالیتی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

m2 = -1 / m1   (16 . 9)

بیلگه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تیریږي، او له کرښی g1 : y = -2x +1 سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نیغه) ځغلي اوبیونه:
الف) د g2 کرښی میلان (جګوالی m2 = m1 = -2)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : (y+1=-2(x-2 همداسی y = -2x +3
ب) د g2 کرښي میلان یاجګیدنه ده m2=-1/m1=1/2 د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2

بیلگه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د(P1(1/3,-1/6 ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تیریږي، ولاړه وي.
ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تیریږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري (y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:
y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بیلگه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوځټکي S واټن له ټکي(P(6,13څومره دی او د کرښي برابرون څنګه دی چي د کواوردینات له سرچینی تیریږي او د S او P څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟
ځواب : د غوځټکي کواوردینات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي
2x-y=1
3x+2y=5
یعنی: xS=1 , yS=1
د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \sqrt{(1-6)+(1-13)^2} = 13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تیریږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: m = 12 / 5)

له S او P ټکو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي میلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0 څخه تیریدونکی کرښه د m2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30^o$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45^o$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120^o$, d) $P_1(4,4)$, $= 0^o$

e) $P_1(0,0)$, $=150^o$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90^o$

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅي(لنډ : محورغوڅي) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره چې یو له بل یې لري وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – یو دریګوټی دا لاندې ګوټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوټیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوټي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برخټوټینه یا –فورم څنګه دئ؟

a) $3x -5y +15 = 0$, b) $4x -3y -18 = 0$

c) $-4x +2y -10 = 0$, d) $-3x -4y +15 = 0$?

۶ – د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتځای د کرښو

a) $y+2,4x - 6 = 0$, b) $28x +10y = 0$, c) $8x + 5y =2$,

d) $5y +12x -10 = 0$. e) $y +(12/5)x = 3$, f) $6x +2,5y = 5$

سره وڅیړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د لاندې کرښو د غوڅېدو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) 2x +3y = 7 b) y = (1 / 2)x +1 c) y -x = 7

3x -y = 5 , y = -2x+ 6, y = 7,

d) x/3 - y/2 = 1 e) 6x -2y +10 = 0 f) y = 4x-1

-x/2 + y/3 = 1 , y = 3x +6 , y = -3x +5 !

۸ – کومه کرښه د کرښې x - y = 4 ، کرښې 3x + y = 8 او برسیره پر دې له غوڅېدنکي P(0,5) څخه تیرېږي ؟

۹ – د لاندې ګوټ A(-4,-1), B(2,-2), C (1,3) سره د دریګوټي دننه کونجونه څومره لوي دي ؟ (پیلونه: دریګونجي وکاږئ) یا (درګوډي)

۱۰ – د ولاړپېړيوتې کرښې یا زوړندې مساوات له ټکی P(2,0) څخه په کرښه y = 2x + 1 څنګه دي؟

۱۱ – د ولاړکرښې مساوات په کرښه y = 2x +1 باندې په ټکي P(-1,-2) څنګه د

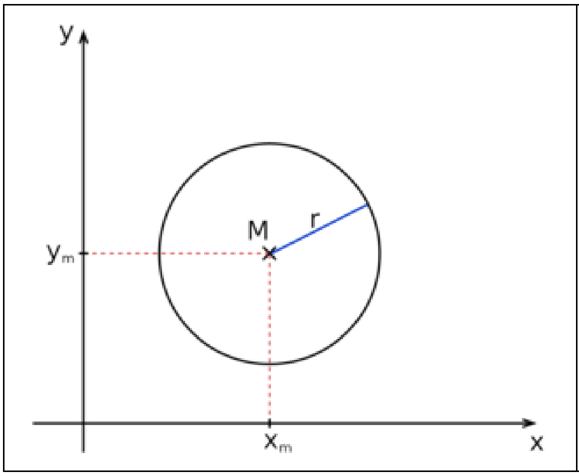
۱۲ – د کرښې y = 2x + 1 سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي P(-1,-3) تیرېږي، څنګه دي؟

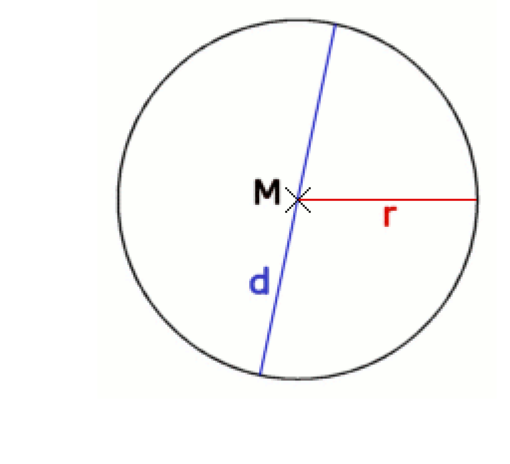
۱۶ . ۲ ګردی (دایره)

دایره(ګردی) د ټولو هغو ټکو ډیری(سټ) ده، چې د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په rیی په نخښنه کوو. فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې دایره (ګردی) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیری(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





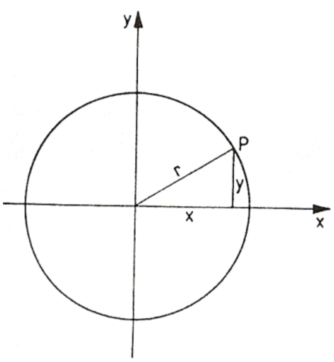


Bild 16.7

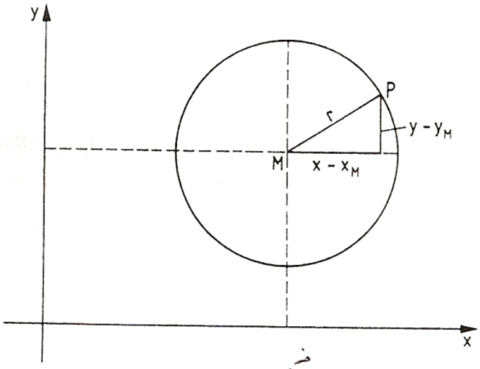


Bild 16.8

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې ګردی ځانګړي حالت او د کواوردیناتسیستم سره، چې منځټکی يې د کواوردينات په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د ګردی منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (خیره ۱۶ . ۷) په سرچينه پروت وي، نو د
) پیوتاګوراس د جملی له مخی (د ګردي په خوبنه ټکي (P(x,y لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردئ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردينات (xM,yM) ولري (څيره ۱۶ . ۸) نو د ګردئ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بينوم مربع وې شميرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغير ومومي) ، پس پيژندل کيږي چی د ګرديبرابرون د څلورئ يا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاينيز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی يوه غړي په څيري سره يوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټوليز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټوليز فورم يا ټوليزه بڼه ٠
که د ګردي برابرون په ټوليزه بڼه يا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه يی څرګنده کوو يا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو يا را اړوو. دا د څلورئ پوره کولو يا مربع تکميلولو په بنسټ صورت نيسي . دوه څيرې پورته وګورئ

بيلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردئ برابرون دې په ټوليزه - يا عمومي توګه وي:

$$2x^2+2y^2 +4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د څلورئ پوره کونه يا مربع تکميلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y +9 = 3+4+9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$
ګردۍ منځټکی($M(-2,3)$ او وړانګه $r=4$ لري.

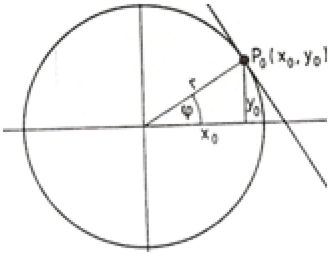
بیلګه ۱۶ . ۱۲ :
د ګردۍ برابرون ولیکی چی منځټکی یی($M(2;0)$ وي او په کوم چی ټکی($P(6,4-3)$ روت دی؟
اوبیونه : د($M(2,0)$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دی
$(x-2)^2 + y^2 = r^2$
د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2 + (4-3)^2 = r^2$
له دې ځخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د کردۍ برابرون:
$(x-2)^2 + y^2 = 64$
ګردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي
۱ - کرښه ګردی غوځوي، نو له دې امله غوځی ده(سیکانتې)
۲ – کرښه ګردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)
۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردۍ تیریدونکی، لنډ : تیرېدونې)
د غوځټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی بږدي(y یا x پسی حل یا اوبۍ شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلوری برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هیڅ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:
کوم پروت ځایونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ اولاندې کرښی و یو بل ته لري؟
$g1 : 2x+y=4 , g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردیبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 \iff 5x-8x=0$
ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به g1 د ګردي غوځوونی یا (Sekantسکانت) وي.
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 \iff x^2-8x+16=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېل اوبوني 4 = x1,2 , 4 = y1,2 سره g2 یو تانجنت دی.
که g3 : y=2x+6 د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 \Leftrightarrow 5x^2+x+8=0$
دا څلوری برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه g3 له ګردۍ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.



په ګردي ($x^2+y^2 = r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P_0(x_0,y_0)$ د مساوات $x_0^2+y_0^2 = r^2 > 0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی
د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او
له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت
$$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0; ....(16,13)$$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:
$y-y=-(x_0/y_0)(x-x_0) \Leftrightarrow xx_0+yy_0=x_0^2+y_0^2=r^2$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16 . 14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه($P_0(\pm r,0)$او($P_0(0,\pm r)$ په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

(c) ketabton.com: The Digital Library

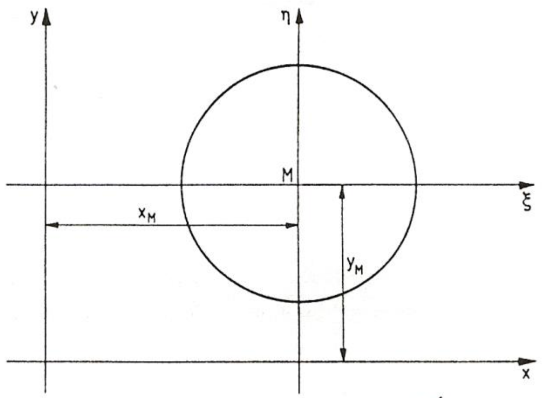


Bild 16.10 شکل

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x0,y0 یا xM,yMاو x_0, y_0 یا x_M, y_M ګورو نو کټمټ دي

بیلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداکوو. دا باید دګردی برابرون پوره کړي . ټکی P1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) باید پوره کړي.
نو باور لري

$x_0^2+y_0^2 = 16$ او $-12x_0 + 4y_0 = 16$

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي یو څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبیونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پوري اړه لري

$y_{01}=4$, $y_{02}=-16/5$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو(P01(0,4او(P02(-12/5,16/5-)د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$

او

$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځنګي (M(xM,yM سره د η,ζ -کواوردینات سیستم کی ، چی سرچینه يي په M کی پرته ده)(؟ څیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري.

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;...................................(16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي .

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;...........................(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بیا دا دy,x -کواوردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي(کشوي یا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي(Po(x0,y0کی د ګردۍ تنجنت برابرو په ګردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بیلګه ۱۶ . ۱۵:

په ګردۍ چی برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، دx - محور باندې، په ټکو

$$x_1 = x_2 =-5$$

سره تنجنت وکا ږو(کیږدو). برابرون یی څنګه دي؟

اوبیونه : د ګردۍ برابرون د منځنکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدلیږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8 , y_M = 2 , r = 5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګردیبرابرون کی ځایوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې داسی لاس ته راغلي دy لپاره ځلوری‌برابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو
مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6$, $y2 = -2$
د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \iff 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \iff 3x-4y=-7$$

تمرینونه:

۱۳ – د لاندې مساواتو سره گردیمنځټکی او وړانگه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$　　b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2\ 9y = 0$,　　d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$,　　f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې گردیو مساوات وڅیړئ

الف) چې منځ ټکی $M(-2,-1)$ لری او له سرچینی تیریږي

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5,\ 5\ -3)$, $P_3(\ 5\ {:}3,-1\ )$ یې د غاړو ټ

پ) چې وړانگه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11)$,$P_2(5,5\ )$ څخه تیریږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي $P_2\ (\ 4,3)$
لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث) چې د هغي منځټکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2\ )$
او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتخایونه گردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې
یو له بل سره لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,
d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتنخاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی
الف) په ټکي $P_0(5, y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،
ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګردیو منځتکي پیداکړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومې چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکي $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

فنکشنونه(بلواك يا تابع)

د فنکشن کليمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پيل کی دی کليمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کليمه کله د يواځنی ځيرونی، چی په هندسه کی خورا ډيره کارول کيږي يا استعماليږي ، کله د بلواك او بيا زياته د فنکشن په نامه ځمونږ په دې کار کی بلل شوي چی موږ ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلد يو، ځما په اند يا فکر که دا موږ ځيرونه وبولو، نو موخه ور يا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبې له هغې بلواک دی. په لاندې کي به وګور چی څيلواکی او بلواکی ناپيوندونکی ځموږ د ځيرلو متن جوړوی

پيژند ۱۵ . ۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې ریېلي واریابلي (اووښتوني یا متحولي) Rرییل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن یا څیرونه) د رییلو ګڼونو ډېری باندې ، د یوې ډېری $D \subseteq R$ یوه یواځنی څیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .

د ټولو ارزښتونو ډېری چې y یې د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژندډیری یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .

د دي قانونمندی f له مخی هرx $\in$ Mیواځني یوه y $\in$ W باندې تنظیمیږي یا څیره کیږي :

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي، له دې امله تابع، چې موږوایو، د څیرونې هغه څیره شوې خوا ده. (د فنکشن یا څیروني او تابع یا بلواک توپیر)

د فنکشن مختلف انځورډولونو په منځ کې سړی توپیروي. د دې کلیمه انځورونه کې له ماتماتیکي یا شمیریز سوموبولیك څخه تیرید شوځو ، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چې

په لاندې کې به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل یا څیره کیدل..

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګڼ او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهنی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته :
$y=|x|$ لپاره $x<0$ د
$y=x^2$ لپاره $x>0$ د
دلته $D=R,W = [0,oe)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي چې په داسې حالت کي له کيڼ و ښي لور ته يا ګډوډ لوستل کيږي يعنې داسې لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی، که چيرې x له 0 کوچنی وي.

داسې ليکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چې له اشتباه سره به نه مخامخ کيږو) . تحليلي(شننيزه) انځورونه اکسپليځيت(واضح)روښانه و ځرګند) explizit نوميږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بيلګو ۱۵ ، ۱ ۱و ۱۵ . ۲ چی په يوه د y په لور حلکيدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y = f(x)$
که چيرې داسي نه وي نو د تحليلي - يا شننيزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ايمپليځيت (ورسره ځای شوي يا وراسره تړلی implizit) بلل کيږي يا نوميږي . د بيلګی په توګه به $2y-x-1=0$, $D=R, W=R$ فنکشن د بيلګي ۱۵ . ۱ يو ايمپيليځيت انځورونه وی. ديوه فنکشن نه هره ايمپليځيت شنينيزه بڼه (ايمپليځيت تحليلي فورم) کيدی شي په اکسپليځيت شننيزه يا سپړنيزه بڼه (تحليلي فورم) واړول شي.
د بيلګی په توګه:
که $x + y + y^5 - 1 = 0$ وي، نو دا د y په لور اکسپليځيت حل کيدونکی نه دی.
د يو فنکشن تحليلي يا شننيزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری ځرګندونه ده. دلته تنظيم د يوه مرستندوي اووښتونې يا واريابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لارښوديږي. هر پارامتر (له يوه پارامتر ساحی څخه)

$$x = \varphi(t), \; y = \Psi(t)$$

په يو ارزښتجوړې x,y تنظيميږي.

بيلګه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t, y=t+1; -oe< t <oe$ به يوه پارامتري انځورونه وی او $x = t, y = t/2 + 1$ به يوه بله پارامتري انځورونه وي.
زيات وخت فنکشنونه د جدول په څير ورکول کيږي

بيلګي ۱۵ . ۱ته:

X	-2	-1	0	1	2	....
Y	2	0,5	1	1,5	2	.....

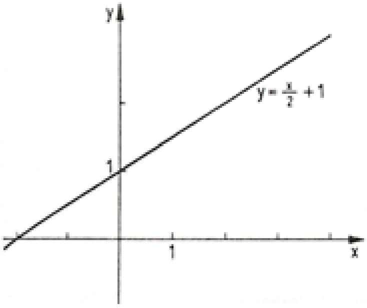
بيلګي ۱۵ ، ۲ ته:

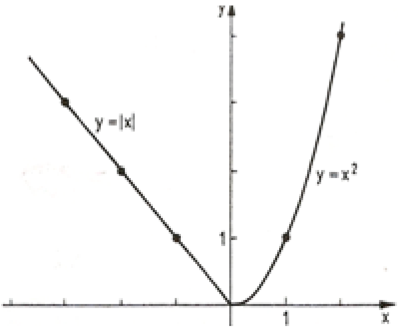
X....	-3	2	-1	0	1	2	3 ...

(c) ketabton.com: The Digital Library

Y....3 2 1 0 1 4 9 ...

د فنکشن گرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کړې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y- هواره یا سطحه کی یواځني او دواځني ټکي باندې تنظیمیږي . ځیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲ بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته





۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال] a,b [کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی (مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو $x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:

$f(x1) \leq f(x2)$ $(f(x1)>f(x2))$

که د برابرونښنه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دی

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره

او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره

په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټیدونکی یا -لویدونکی

او په اینتروال (oe,0] کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په يوه اينتروال [a,a-] کی يو تعريف شوی فنکشن (y = f(x هلته او هلته جوړه (جفت) يا سيومتريك symetrisch,(ناجوړه (طاق) يا نا- يا انتيسيومتريكantisymetrisch بلل کيږي چی باوري وي

$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$

د جوړه فنکشنونو ګراف يا محوري سيومتريك او y - محور ته ځغلي) دلته هم خيره شته ، نو تل به همغه څه ليکم؟ ۱۵ . ۳) ، طاق فنکشنونه و سرچينى ته منحني يا مرکزي سيومتريك ځغلي) بيا هم خيره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بيلګه ۱۵ . ۴

فنکشن $y= x^3 ,D= R$

يو ناجوړه يا طاق فنکشن دی :

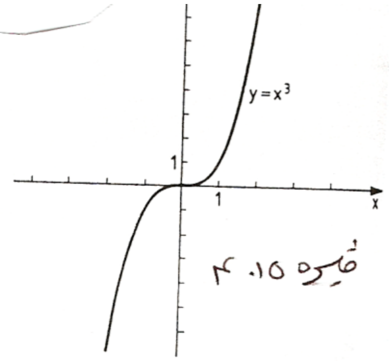
$(-x^3) = -x^3$

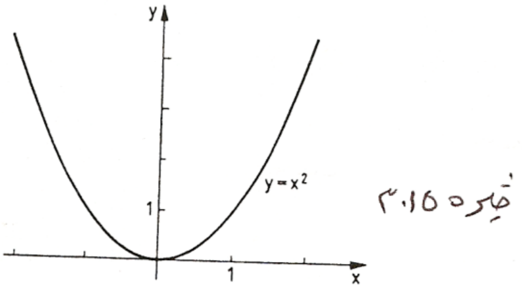
بيلګه ۱۵ . ۳ :

فنکشن $y=x^2,D=R$

يو جوړه يا جفت فنکشن دی:

$(-x)^2 = x^2$





د بيلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه يا جفت او نه ناجوړه يا طاق دي

پيژند ۱۵ . ۴:

(y = f(x تيك هلته په D (پيژندديرى ده) بند يا رابند(محدود)بلل کيږي که يو k >0 داسی شته وي چي دا باور ولري:

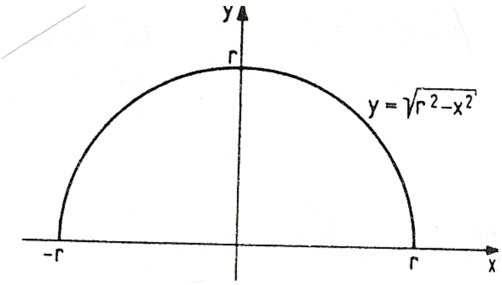
$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بيلګه ۱۵ . ۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r , r]$
رابند یا راګیر(محدود» زه به دا له دې وروسته
بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی څیره ده(

ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$



پیژند ۱۵ . ۵:

$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p)= f(x)$$

د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي٠

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f (x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\ x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (څیره ۱۵ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$x^2 - 4 = 0 \iff x_1 = 2 , \quad x_2 = -2$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم څیر ۱۵ . ۶ (

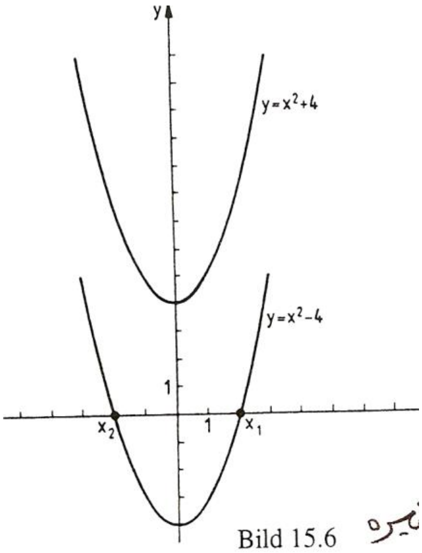


Bild 15.6

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي

یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (= y

f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ښتکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا

یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا

واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا

د فنکشن روښنۍ یا وسره بده یا که غواړۍ مروجه څیره ده، چی x خپلواك

اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیزندونکی دي د y=f(x) په

څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په څټ فنکشن سره کتمټ(- ورته) identic دی۰د په څټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

كرافيكی څيره $y = x$ په كرښه د $y = f(x)$ هندارونه) يعنی په هنداره كی څيرونه او لنډ يی: هندارونه) ده٠

بيلګي ۱۵ ، ۱ ته :

د فنكشن $y = f(x)= x/2 +1$ چپه يا په څټ فنكشن داسی دی
$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$
سړی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی كوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(څيره. ۱۵ ۷ الف)
ړ

بيلګي ۱۵ . ۳ ته : فنكشن

$y = x^2 , x \in D$
څيرره ش ۱۵ . ۳) په ښتکيدونکی دي يا په ښتکيدونکی نه دی.
هر $y \in W$ $=[0,oe]$ پوري دوه $= [-oe,oe]$ $x \in D$ اړه لري، يعنی $x=+y$ او $x=-y$
مګر $y= x^2$ كلك مونوتون جګيدونکی دی (او په دې ډول يواځنی او يواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او كلك مونوتون لويدونكی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2,x\geq0$
ته چپه- يا په څټ فنكشن $y=+ x$ دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- يا په څټ فنكشن $y = -x$ دی. (څيره ۱۵ . ۷ ب) .
په ټوليزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

كه $y = f(x)$ كلك مونوتون جګيدونکی) لويدونكی (وي ،نو په څټ فنكشن $y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم كلك مونوتون جګيدونکی (لويدونكی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټيز فنكشنونه

په دې برخه كي بنسټيز فنكشنونه تعريفيږي. دا ټول راشنل فنكشنونه، مات راشنل فنكشنونه، پوتنځ يا په توان فنكشنونه، ايكسپوننشل فنكشنونه او لوګاريتم فنكشنونه، تريګونومتري فنكشنونه او څيكلومتري فنكشنونه دي. دا بنسټيز فنكشنونه به د خپلوځانګړډوله خويونو له مخی وڅيړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ كه به دفنكشن فنكشنونه (ځنځيری - يا تړلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنونه) وڅېړل شي. د فنکشنونو څېړل به د هغو ځانګړېوله يا کرکتريستيکي خويونو له مخې هلته هم دوام ومومي، که د ديفرنشل شميرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پيژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N;\ a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15\ .1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعريف دی او n - مه درجه ټولريشنلفنکشن نوميږي.دي ډول فنکشنونو ته پولينوم فنکشنونه(يا لنډ : پولينوم) هم ويل کيږي

يو ساده ټول ريشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) يالايني فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15\ .\ 2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لايني فنکشنونو څېره(ګراف) يوه کربنه ده چي په $y = n$ کیyد - محور غوڅوي $(x = 0)$ او جګوالی $m = \tan\alpha$

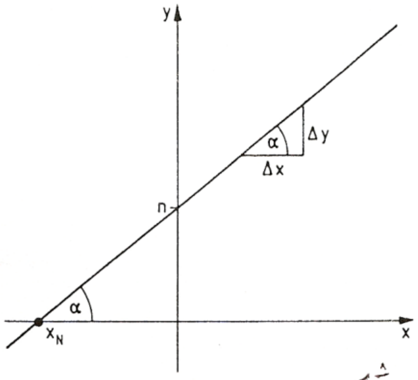


Bild 15.8 ګاره

لري (څيره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغيرد x - ارزښت تغير سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

کربنه جګيږي که $m > 0$ او لويږي يا ټيټيږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که 0 =|m نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (= y 0 لري: $x_N = -n/m$

که را په غاړه شي چې د یوې کرښی برابرون، چې له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرېتکی یا نوره ښه غوښتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c \text{ , } a \ |= 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو ځیره) ګراف (پارابول دی چې د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله ونني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیړني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0$, $y_s = 0$

(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q) (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د ځلورۍ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px \ (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل) رابنکل-یا راکش - (شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چې په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$x_s = -p/2$, $y_s = q - p^2/4$

بیلګه ۱۵ . ۷:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=x^2+6x+10,\ x_s=-6/2=-3, y_s=10-6^2/2=1$
(خ،۱۵ . ۹)

3. $y = ax^2$ ($a|=0, b=0, c = 0$)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د a $0 >$لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

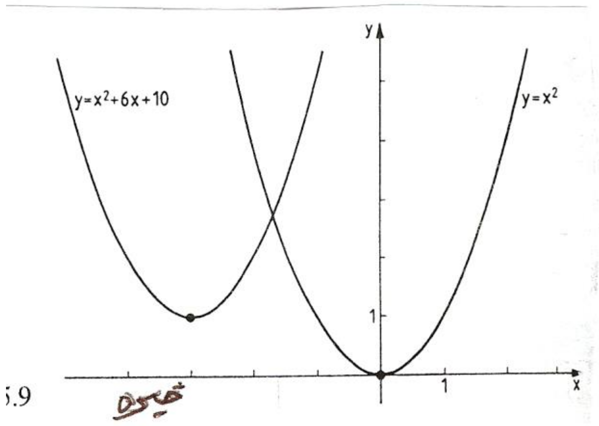
بیلګه ۱۵ . ۸:

$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$
(خ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,($a=-1/2$, $b=1$, $c=4$)

دککرۍ کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4-12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

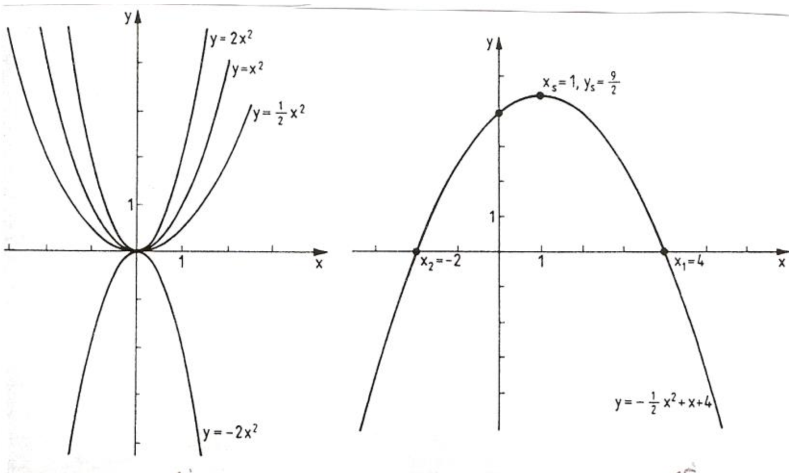


Bild 15.10 Bild 15.11

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1=4, x_2=-2$ دي٠

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته:
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-10}=-3\pm\sqrt{-1}=-3\pm i$ څخه لاس ته راځي
چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري.

فنکشن $y=x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2}=0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Hornerschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$y=[a_3x^2+a_2x+a_1]x+a_0=[(a_3x+a_2)x+a_1)x+a_0$ $x_{4,5}=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2i$

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1=f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یې له x1 سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلونه یا ضریبونه	a_0	a_1	a_2	
منحنی خلونه	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	$(a_3x_1+a_2)x_1$	a_3x_1	
منحنی زیاتون	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$a_3x_1+a_2$	a_3

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دئ او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دئ.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.

اوبیونه) :

که چېرې ددریمی درجی ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګې ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:
$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$
د ویش پولینومونو څلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دئ. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او $f(x1)=0$ چی د $(x-x_1)$ سره د څلوني له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د ځلوری – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجي فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلوني په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل ړرزرنړ ړړطړتظداغظطافنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، ریيل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیځینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :

5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن

$y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$

لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	2	0	-6	-20	-8	80
x_1 = 2		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
x_2 = 2		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
x_3 = -2		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $(2\ x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$

لپاره لاندې د حل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول ليکل کيږي
$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$

ددې لپاره چی د دريمي او جګو درجو د ټول ريشنلفنکشنونو يوه ځيره يا تصوير ولرودی شو، نور کرکتريستيکی يا د خويونو ټکی يی د ديفرنځيالشميرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفيرنځيالشمير له مرستي کار واخلو ، کيدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وينا وي وکړی شو. موږ په ليديدونکی ډول د فنکشن د پولی کليمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټيك تعريف شي. دا د بيلګي په توګه دا مانا لري
چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره ($f(x$تل ارزښت g ته نزدې کيږي، که x د oe يانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی
xn -> oe

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي
او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
(کږه له oe - څخه oe د په لور ځي) .
که n جوړه او a_n کمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_n کمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که n ≥ m ، نااصل مات فنکشن کیدی شي چې د پولینوم ویش له لارې تجزیه
(توټه) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه ريښتونی ماتی برخی د زياتون په څير
وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن
باندې دماتباندې فنکشن ويش څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$پاتي (باقي) سره. پس لرو:

$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$.

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، که $x = x0$وي نو باور لري:

$P_n(x_0)=0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x = x_L$لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$

د $x = x_P$لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x$ د ماتباندي- او ماتلاندي فکشنونو توټي کولو وروسته په لاندي فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندي صفر دی، مګر مات لاندي صفر نه دی (صفرځای)مات لاندي- او مات باندي فنکشنونه د $x = x; L = -2$ لپاره صفر دي (تشځای)

د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندي صفر او مات باندي صفر نه دی (قطب)

که x سره د قطب ځاي ته نزدي شي، نو y د ناپاى په لور ځي چی د قطبځای (تيك ناپاى ځاى بللکيږي) xpکی کره داسيمپتوتي کربني $x = xP$ ته نزدي کيږي.د يوه تشځاى xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادي $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دي امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپاى کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندي او ماتلاندي د ويش څخه لاس ته راځی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوټنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه تولریشنل برخه.
د نااصل مات فنکشن ځیره د x -> ±oe سره ، ځان خپل تولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

الف: $y = x/(x^2+1)$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول د $x0 = 0$ یا قطب نه لري رییل اوبیونه نه لري) او د $x -> \pm oe$ لپاره د x- محور ($y = 0$) د اسیمپتوتی په څیر لري (ځیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دي مانا چی- $x = 2$ اسیمپتوتی دی، او د $x \to \pm oe$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

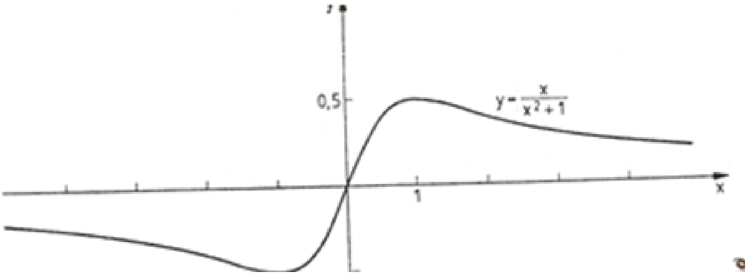
موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو: فنکشن

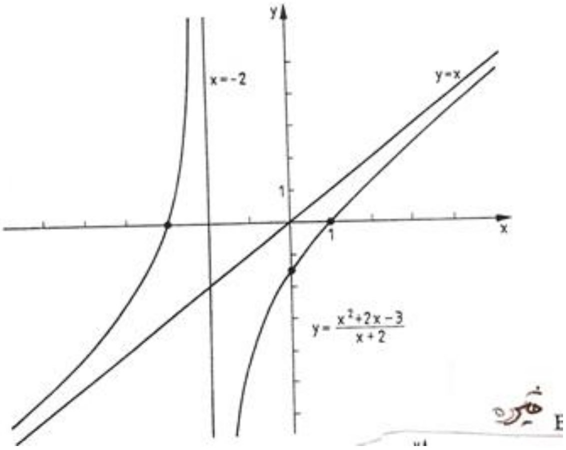
$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوټنځفنکشن دی(د پوټنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیږ اتز یز زیاتیز یا مثبت تولګڼ n لپاره یو تولرشنل فنکشن دی. د جوړه تولګڼ nلپاره تولریشنل فنکشن دی. د تولګڼ n لپاره تولی کږې د تعریف ډیری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oe او ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري.
(ځیره ١٤ الف ١٥) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (ځیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library





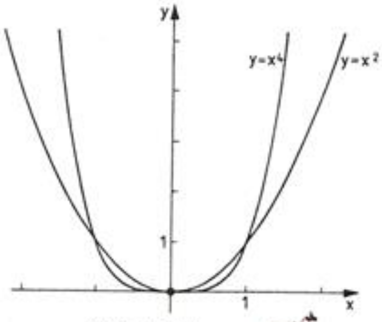


Bild 15.14a

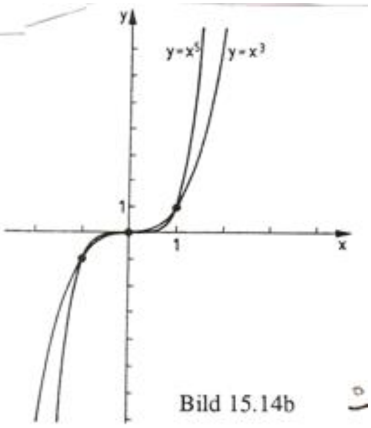


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپتوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز) nلپاره ټولی کرېږ د پیژند دیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ارزښت ډېري(W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (1,1-) D = (-oe,oe)\{0}

؟؟؟ ښيره ش. ۱۵/۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون (کميز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0 او W=(-oe,oe) او(1-،1-) (1,1)

ګډ ټکی دی (ښيره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه ښيرې دي

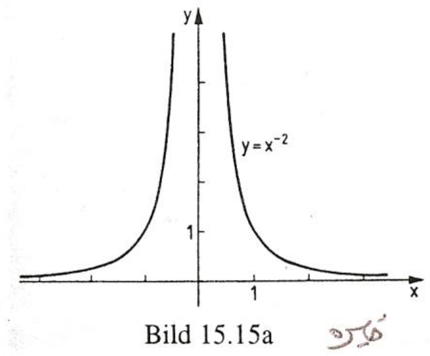


Bild 15.15a

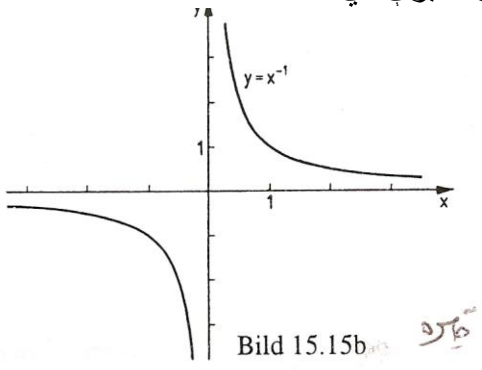


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)

د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- يا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N \setminus \{1\}$, $D = [0,\infty)$,$W = [0,\infty)$...............(15,8_b)

او ريښه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و

ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$y = x^n$, $a \in Q$, $x > 0$ (15 . 8c)

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په ښير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرښت بيرته پوتنځ فنکشن دی.

ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د رييل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رييلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \ , x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نوميري

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} , x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښت فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} , x \geq 0$

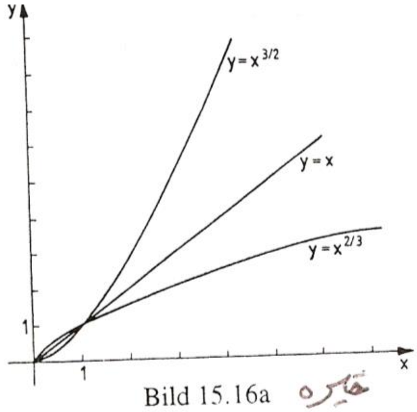


Bild 15.16a خیره ب)

(خیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

(خیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2 , x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په پام کی وي.

د بیلګي په توګه فنکشن $y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی دی او له دې امله ټول په ښت کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژندیری ($D = [0,oe[$ کی پر ښت فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د $y= x^3$ پرښت فنکشن د $D= (-oe,0$ سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) ۰

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=a^x, a>0, a\neq 1 \qquad (15,9)$$

ايکسپوننشلفنکشن يا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کيږي٠

(د ايکسپوننت يا »جګ« کليمی لپاره دی پيژند ۴ . ۱ وکتل شي)

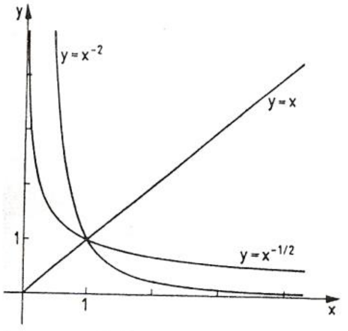


Bild 15.16b

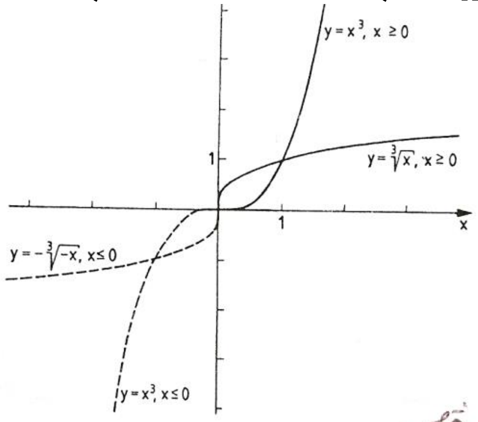
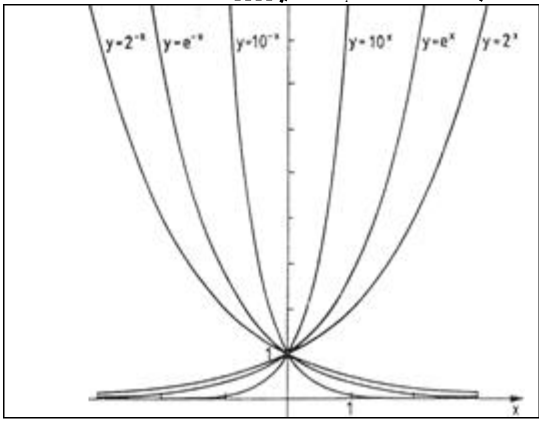


Bild 15.17

پورته دوه څيرې دې پام کې ونيول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پيژنددېرى(D=(-oe,oe او ارزښتدېرى(W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له امله تکی(0,1 () د ټولو کرو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) په کلکهمونوتونجګيدونګی دی اود x->oe سرهد x - محور ته اسيمپوتيك ورنزدې کيږي.د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لويږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسيمپتوتيك نزدې کوي.



کسپوننشل فنکشنونو يو څو بيلګګي (a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/1(څيره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ايکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$$y = \log_a x \, , \, a > 0 \, , \, a \neq 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاريتم فنکشن بلل کيږي

د لوګاريتم کليمي لپاره پيژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پيژندديرى $D = (0.oe)$ او د ارزښتديرى $W=(-oe,oe)$ لري.

د $y = \log_a x$ کرښ د ګرو $y=a^x$ هنداورنه ده، په کرښه $y=x$ ، تکی $(1,0)$ د ټولوکړو ګډ تکی دی (څېره شته دی)

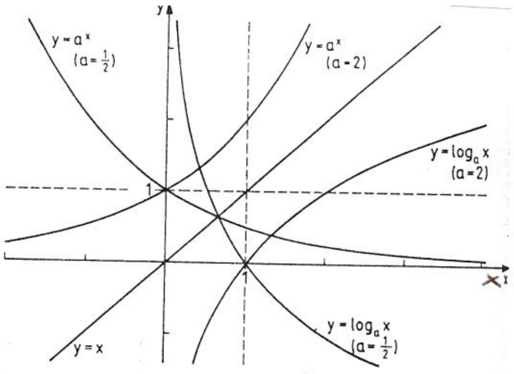


Bild 15.19

د $a>1$ لپاره(۱۵ . ۱۰) كلك مونوتونجګيدونکی اود $x\to 0$ لپاره اسيومپتوتيك د کميزو - y محور ته نزدې کيږي. د $0<a<1$ لپاره (۱۵ . ۱۰) كلك مونوتون لويدونکی دی او د $x>0$ لپاره اسيمپتوتيك د زياتيز - y محور ته نزې کيږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر يی يعني $y = \log_a x$

د $a=2$ او $a=1/2$ لپاره انځورېږي.

په ځانګړې توګه ليکل کيږي $y = \log_{10} x = \lg x \, , \, y = \log_e x = \ln x$ ۰

پيژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تريګونومتري فنکشنونو يا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کيږي يا راوړل کيږي.

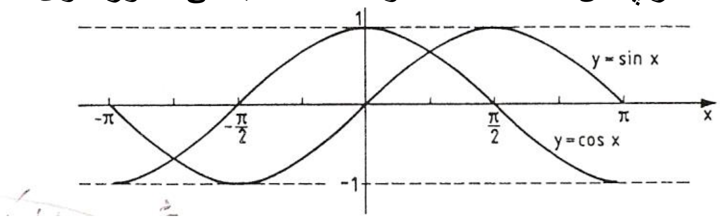
$$y=\sin x ;D=R,W=[1,1] \quad (15,11_a)$$

$$y=\cos x; D=R, W=[-1,1] \quad (15,11_b)$$

$$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z \quad (15,11_c)$$

$$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z \quad (15,11_d)$$

د دې کږوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تريګونومتريکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x   يو جوړه فنکشن يا – بلواک دی.

تريګونومتريکي فنکشنونه پريوديکي فنکشنونه دي(مقايسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosx پريودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$$\sin (x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi) = \cos x , k\in Z$$

لاندې فنکشنونه پريود π

(c) ketabton.com: The Digital Library

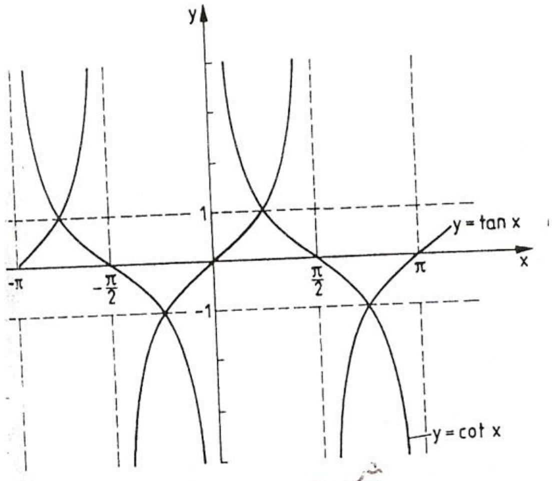


Bild 15.20b

لري $y=\tan x$, $y=\cot x$.دا په دې مانا چي

$$\tan(x+k\pi)=\tan x,\ \cot(x+k\pi)=\cot x,\ k\in Z$$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k=k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x$, $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y=\cos$

$y=\cot x$, xلپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري

یعني $y=\tan x$ په $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ او $y=\cot x$ په $x_k=k\pi$, $k\in Z$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

فنکشن $y=\sin x$ په ایتروال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ کي مونوتون جګیدونکی دی او په

ایتروال $]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$

کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $y=\sin x$ لپاره جګیدونکی یا پورته کیدونکی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی٠

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونکی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی ځیل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي.فنکشن

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کیږي.

یادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پیژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی یا ځنځیري فنکشن دی. موږ ترخیرني لاندې نیسو چي د سا ین فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واریابل t او زیاتوونکی د ساین فنکشن په خپلواك)Argoment(د کرښخیره باندې څه تاسیر اچوي.

۱ ـ د فاکتور a تاثیر په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول یا راکشول دی که (|a| > 1)او یا پرسول دي که |a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a ـ ځله د فنکشن ارزښت y = sin t دی، چیرته چی برسیره پردې د a < 0 لپاره په t ـ محور یوه اینه ځیرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2 په فنکشن کی a امپلیتودې Amplitude(جګوالی(نومیږي او د شوینګنګ Schwingung رپیدنی پراخوالی یا بنه : سور باندې تاثیر اچوي.
ځیره شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

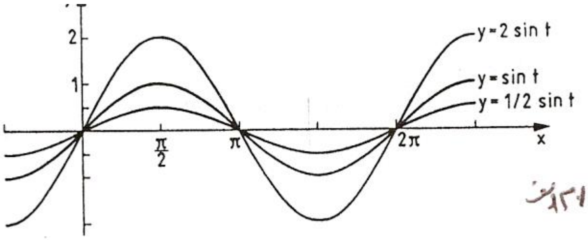


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې یو وختني غزول که $|\omega|<1$ یا پړسول که $|\omega|>1$ وي تاثیر اچوي.چیرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسیره پردې یو په y- محور اینونه هم ده.

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ یوه فنکشن ارزښت، د $y = \sin t$ خپلواك ω-ځله ، یعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (ځیره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کیږي، دا په پریودې تاثیر اچوي
او $y = \omega t$ پریودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

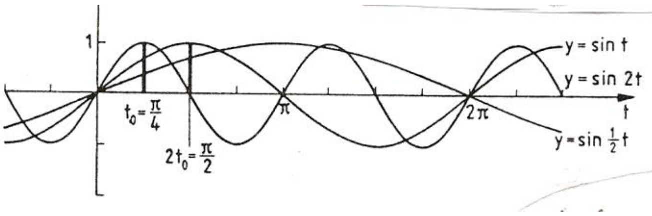


Bild 15.21b

۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور $\varphi>0$ او یا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ لپاره۰

د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)
$(\varphi = \frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2})$

په فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a . \sin\omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی φ چی فازې نوميږي يو د راکښلو تاثير په کړه $y = a.\sin\omega t$

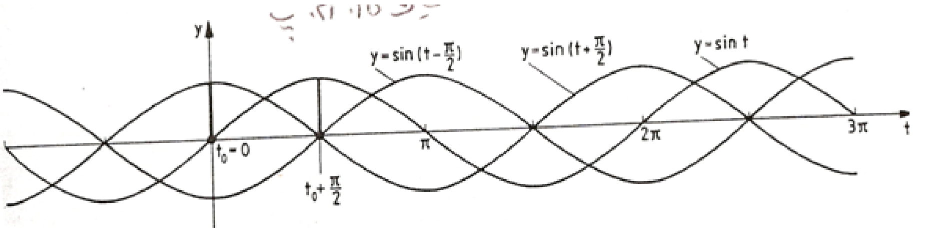
د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.

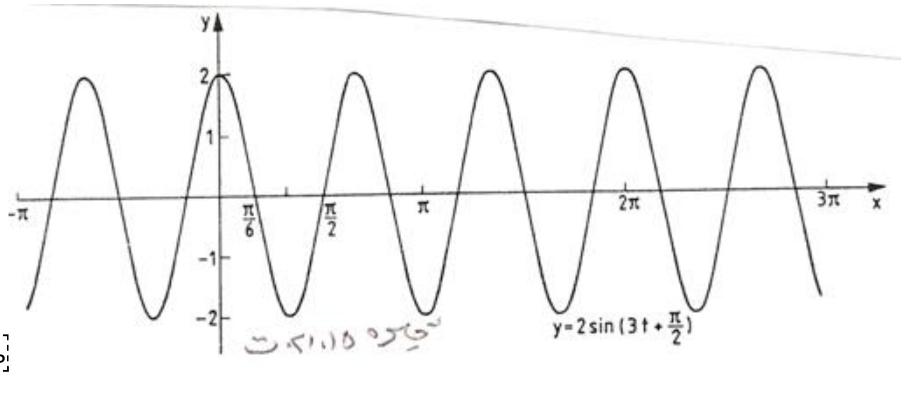
په شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ انځوردی.

هغه امپليتود $a = 2$ لري، پريودې يی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کې

د $\sin t$ و کيڼ لورته راکښل شوی دی.

ځيره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$





د تريګونومتري فنکشنونو(يوائخني) په معکوسوالي يا په څټوالي کی موږ په ځانګړو يو غړيزو يا مونوتوني اينترو الونو تکيه کوو، د لاندې تعريف سره مناسب

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند ۱۵. ۱۴ : د لاندې فنکشنونو

$$1.\ y = \sin x, \quad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad W = [-1, 1] \qquad (15.12a)$$

$$2.\ y = \cos x, \quad D = [0, \pi], \quad W = [-1, 1] \qquad (15.12b)$$

$$3.\ y = \tan x, \quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad W = \mathbf{R} \qquad (15.12c)$$

$$4.\ y = \cot x, \quad D = (0, \pi), \quad W = \mathbf{R} \qquad (15.12d)$$

پرخڅ یا چپه فنکشنونه لاندې څیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

$$1.\ y = \operatorname{Arc}\sin x, \quad D = [-1, 1], \quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (15.13a)$$

$$2.\ y = \operatorname{Arc}\cos x, \quad D = [-1, 1], \quad W = [0, \pi] \qquad (15.13b)$$

$$3.\ y = \operatorname{Arc}\tan x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (15.13c)$$

$$4.\ y = \operatorname{Arc}\cot x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = (0, \pi) \qquad (15.13d)$$

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په څیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

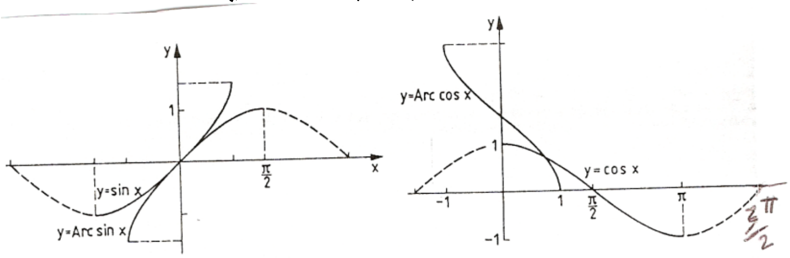


Bild 15.22 Bild 15.23

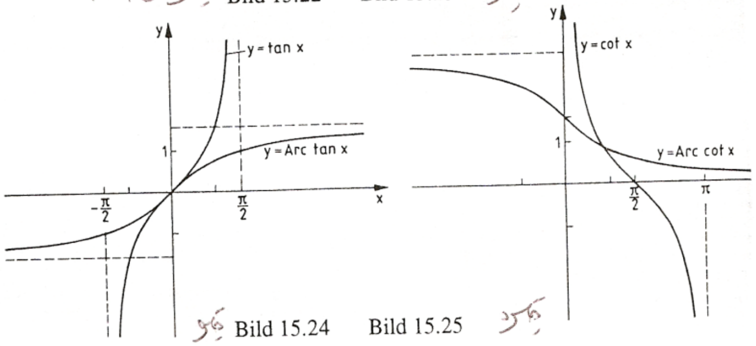


Bild 15.24 Bild 15.25

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ . ۴ ځنځیري (ترلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د x ∈ Dلپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره

پر دې د z ∈ Wلپاره یو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x ترلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي٠

یادونه : یو ترلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي

په توګه $z = f(x)$

دx ∈D, z∈ Wلپاره او $w=h(z)$ دz ∈W,w∈ W*لپاره

او$y=f(w)$ د W*∈W لپاره لرو،

نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو ترلی فنکشن دی

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره ترلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.

ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کې $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی. په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کې $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی

پ : د

$z = 2x + 4$, $w = \sqrt{z}$, $y = \cos w$,

سره ترلي فنکشن $y = \cos\sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په ترلي فنکشن $y=\operatorname{Arctan}1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\operatorname{Arctan} w$ دباندنی فنکشن دی.

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی له » دننه « پیل کیږي.

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته:

ب) د x = 0.5 لپاره دی

$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942; y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د 2 = x لپاره دی $z=x-1=2-1=1$; $w=1/z=1/1=1$

$y=\mathrm{Arctan}w=\mathrm{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشريح:

y=f(x) تحليلي(شننيزه) وينا بلل کيږي، که(f(x له رييل ګڼونواو بستيزو فنکشنونوځخه د زياتون، کمون،ځل، ويش، له لارو تړلی يا ناتړلي(ځنځيري يا نا ځنځيري) جوړيږي

د بيلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنخ بنسټ او همداډول راديکاند منفی نه شي کيدلی، او يا بايد مثبت وي، چی د لوګاريتم نومروس بايد مثبت وي او(Arc sin f(x همداډول(Arc cosf(x تيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پيژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفډيري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq 3 \; (x \geq \sqrt{3} \;\; v \;\; x \leq -\sqrt{3})$

نو لرو $D =(-oe , - 3]\cup[3 ,oe]$

ب)($y=\lg(x+2)+1/(3+2x-x^2$ له لمړي زياتونی کی بايد Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 \Leftrightarrow x >-2$ ،

پس($D1=(-2,oe$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2 \;\; x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2, x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن تعریفېدیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفېدیري وي یعنی د
D1 او D2

غوڅېدیری: $D = D_1 \cap D_2 = (2, oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = \text{Arc sin}\,(x-1)/5$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفېدیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$-1 \le (x-1)/5 \le 1 \Leftrightarrow -5 \le x-1 \le 5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 6 \Rightarrow D = [-4,6]$

ت) $y = 1/\sqrt{(x^2 - 4)}$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x > 2$ یا $x < -2$

نو دی $D = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x - 10y = 15$ ب - $x + y/3 = 5$

پ - $2x^2 - 3y + 3 = 0$ ت – $x^2 - 4x + 2y - 8 = 0$

۲ – لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x = 2t$ $y = -t^2 + 3t$ b) $x = \sqrt{t}$ $y = 2t+1$

c) $x = 1/t$ $y = 2(t-3)$ d) $x(/2)t - 1$ $y = t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y = f(x)$

۳ – لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونو اینتروالونه په تعریفېدیریو بیل (تجزیه) کړی؛ یا لو ته کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 / 2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$, d) $y = x^3 / 2$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x - 1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرځایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ - د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګڼل شي. فنکشنونه ډ ګې د خلفورم باندې انخور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1 , x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x \quad ; x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 \; 32x + 40 ; x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6 ; x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه وړکړی شي :

a) $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

b) $y = \dfrac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y = \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$

d) $y = \dfrac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y = \dfrac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وګڼل شي، پول. تشځایونه او د $x \to \pm 8$ لپاره ځان نیونه!

۱۲ - لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) $y = \ln(x-1)$, D =(1,œ), W = R

۱۳ - لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشنونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ - تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y = f(w) \; , w = h(z) \; , z = g(x)$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف-او ارزښتډیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = (e^{x+1})^2$ c) $y = \lg \sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan \sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan \sqrt{x} - 3$ i) $y = \text{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\text{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln \sin \frac{x}{3}$ l) $y = \sin \ln (x + \frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$

p) $y = \text{Arc}\cot e^{2x+1}$.

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دتنه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w),\ w = (g(z)),\ z = k(x)$

بیل کړی(د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\text{Arc}\cot(e^x+1)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\text{Arc}\cot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln(x^2-1)+1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x+1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې شننیزویا سپړنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \text{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريګوډيکچ يا تريګونومتري Trigonometrie

تعريفونه

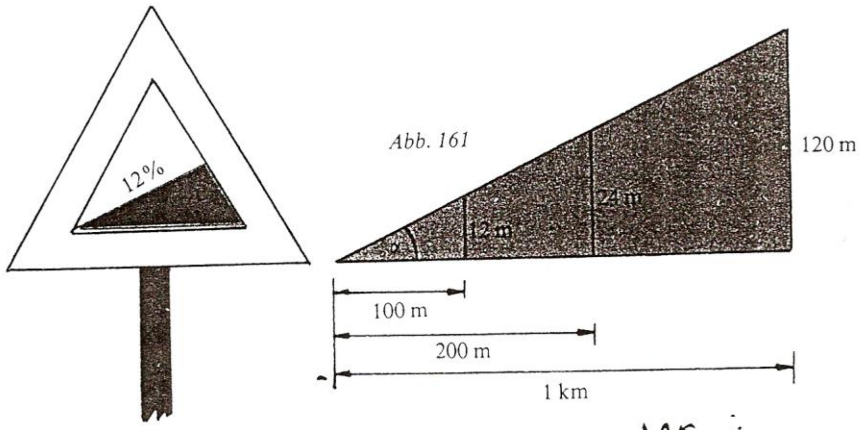
د دريګوډيکچ يا تريګونومتري دنده ده چې په هواره يا په هوا کې دريګوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تريګونومتريبلواکو. برسيره پر دې د دې په مرسته پريوديکې يعنې په منظمه فاصله پرلپسې تکراريدونکې پيښې(موږ يې تل راګرځيدوني بللې شو) ځيرل کيږي.
تريګونمتري تر هيپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پورې تعقيبيدې شي، وروسته له مصري پتوليمويس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بيا له هندې او عربو شميرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پيل دا د کاروني يا عملي کيدو د ستونځو سره مخامخ وه. دريګوډيکچ خپل کارونه په استرنومي او فزيك، د ځمککچ يا اندازه کولو، د ځمك اندازونې، نقشو علم، او ابادۍ او نوتيك Nautik (د کيشتيو د لارو نقشه ويستلو پوهنه) کې مومي.
د تريګونومتري مانا يا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ريښتينوالی يا واقعيت کې نغښتی، چې د دې په مرسته د پايکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شميرپوهينيز مفهوم لري).

پيلبيلګه: د په مانايا مهم جګوالي يا لويدکرښو نخښنه لوحی يا په بله عبارت د زوړي او پيچومی ليکتختی(دې ته دې پام وي چې ما دا کليمی هر چيرې د زوړي او پيچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیږي یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځانیونه و هوارې فاصلې ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځانیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

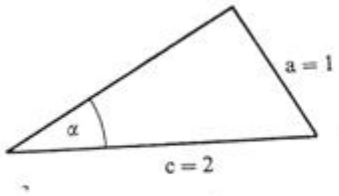


خیره۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې یې بلواک څیره ده، چې دې املـه یې څیره نمونـه سمه ده اوکارونـه یې څیرونـه ده.

ساینبلواک sinusfunktion بلیګه:

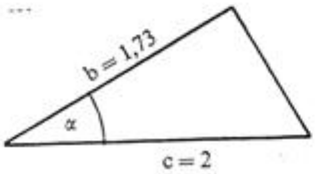


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

څیره ۱۹۶

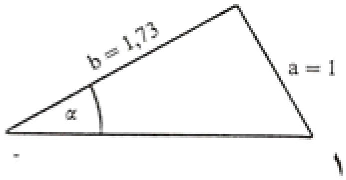
کوسایبلوک Cosinusfunktion بیلګه:



$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

تنجنتبلواک Tangensfunktion بیلګه:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

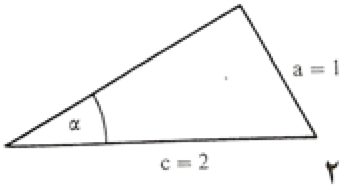
څیره ۱۹۸

$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

د کونجونو د پینونومونې (دا ټول شته، خو بیاهم اړیین دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواک Kosekansfunktion بیلگه:



$Cosec\alpha = \frac{c}{a} =$ هیپوتینوزي / مخامخ کاتیت

خیره ۲۰۱

$$\cos ec\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

موږ به زیات وخت لمړنی دري یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

په ښونه دریګوډیو کی شمیرنه

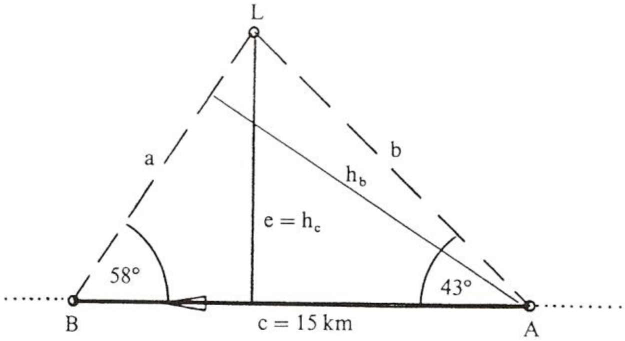
سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه

یوه کیښتی د رڼاډزکړي (کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکربښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ړز کی کیبنتی له ړز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیبنتی نږدې واټن e د ړزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$

$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ \text{km}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونو a او b په شمیرنه کی مرستندوي لوبی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کی د اړخونو ځانتیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځانتیونه یا تناسب دی.

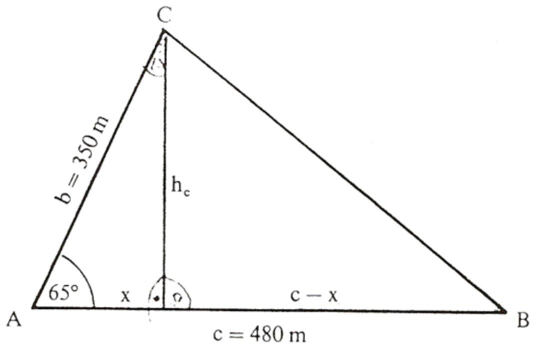
$$\sin\alpha / \sin\beta = a / b \qquad \sin\beta / \sin\gamma = b / c$$

$$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دي وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سرې بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کې دوه ستنې $b = 350\ m$ او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B ځخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



ځیره ۲۰۳

اوبی یا حل :

جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.

دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،

ځکه چې $\cos\alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی

لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$

او

$$a^2 = h_c^{\ 2} + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

په هر یوه دریګوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوډي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوډیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

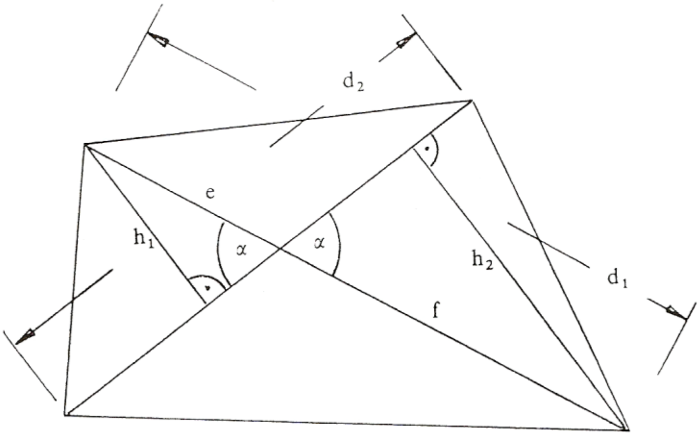
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي.

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin \alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin \alpha$$
$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2 (e + f) \sin \alpha$$
$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2\, d_1 \, \sin \alpha$$



څیره۲۰۴

د په خوبنه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواک، نه یواځی د دننه لورته تیرو درېګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

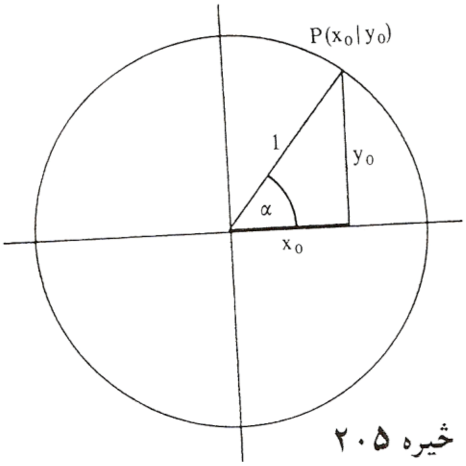
دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم
کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته
یوونګردی ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د
پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی
د هغی یو کونج د ګردی ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ځنتر
پروت دی، (ځیره ۲۰۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا
د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.
لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ځخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ځلورمه یا
کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په
ګردی ،د کونجټکی $P(x|_0 y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د
یوه ټالوهونکی مروند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا
لاندې راشی.



ځیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی
کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله
وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$
په مانا دی.

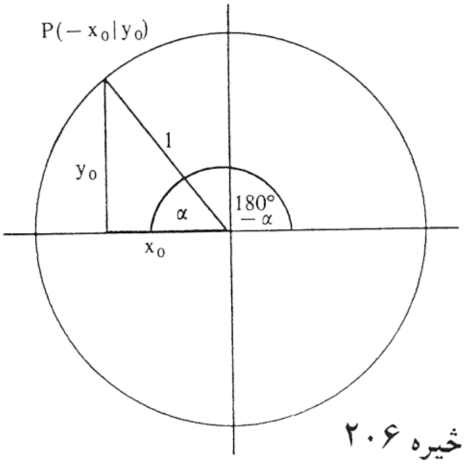
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاټیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج α جوړ کړي، یعني ځنتریکونج یی $180° - \alpha$ وي.
د « سیوروځیرو» ځخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.



ځیره ۲۰۶

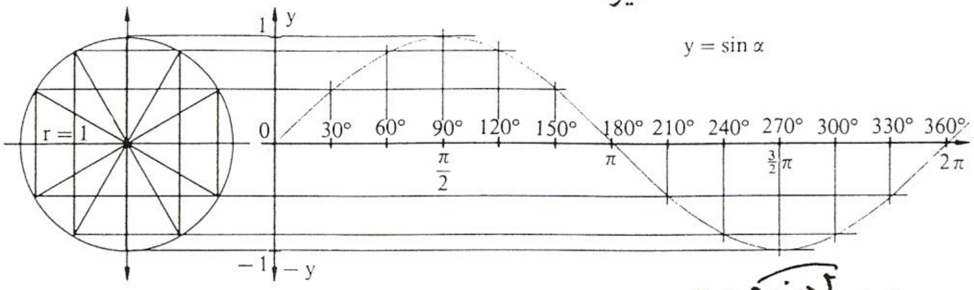
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج $\alpha+360°$ لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د $\alpha+720°$ لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ |۵|) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

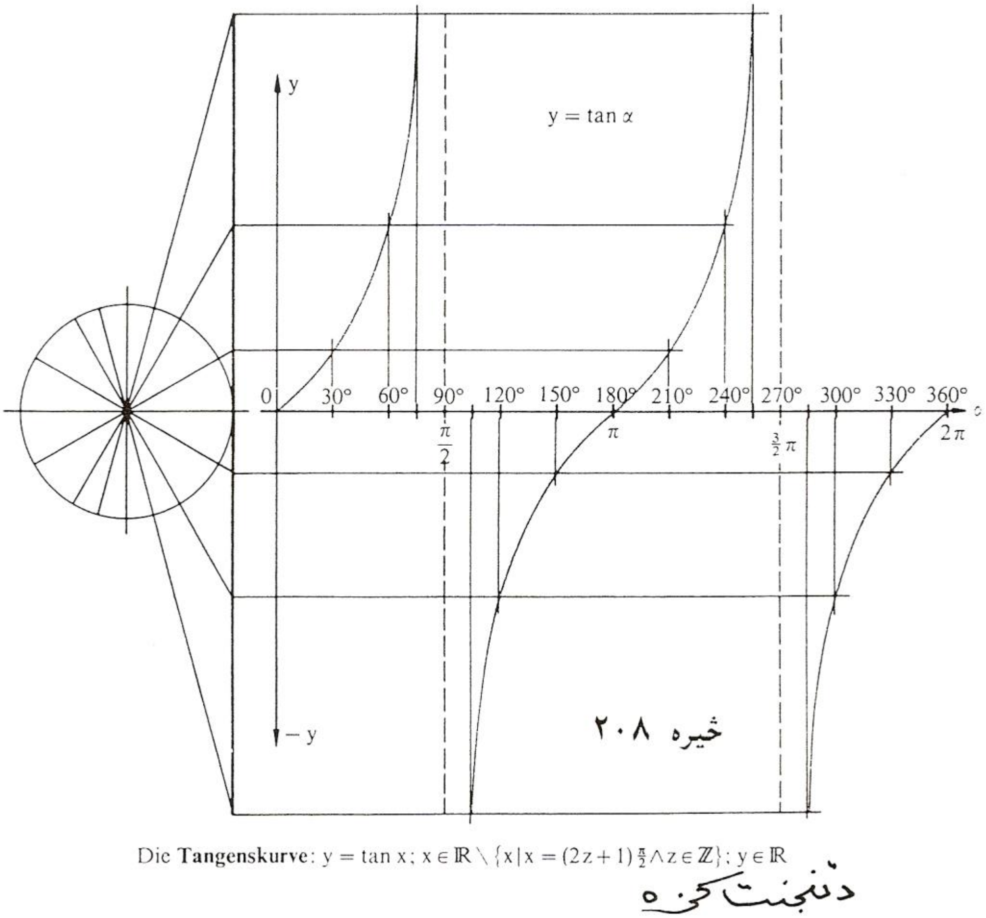
(c) ketabton.com: The Digital Library

شیره ۲۰۷



د ساین کږه

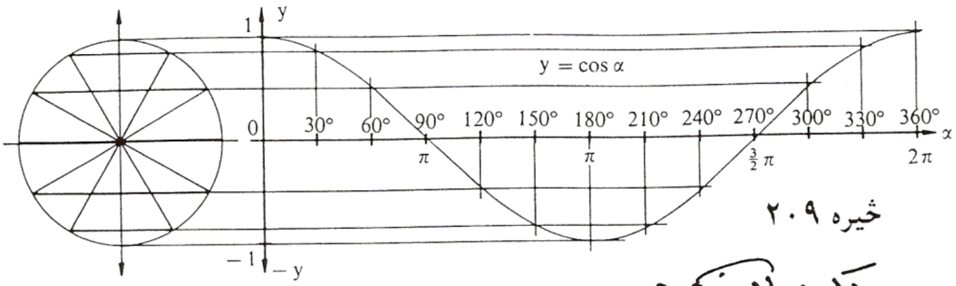
Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$



Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

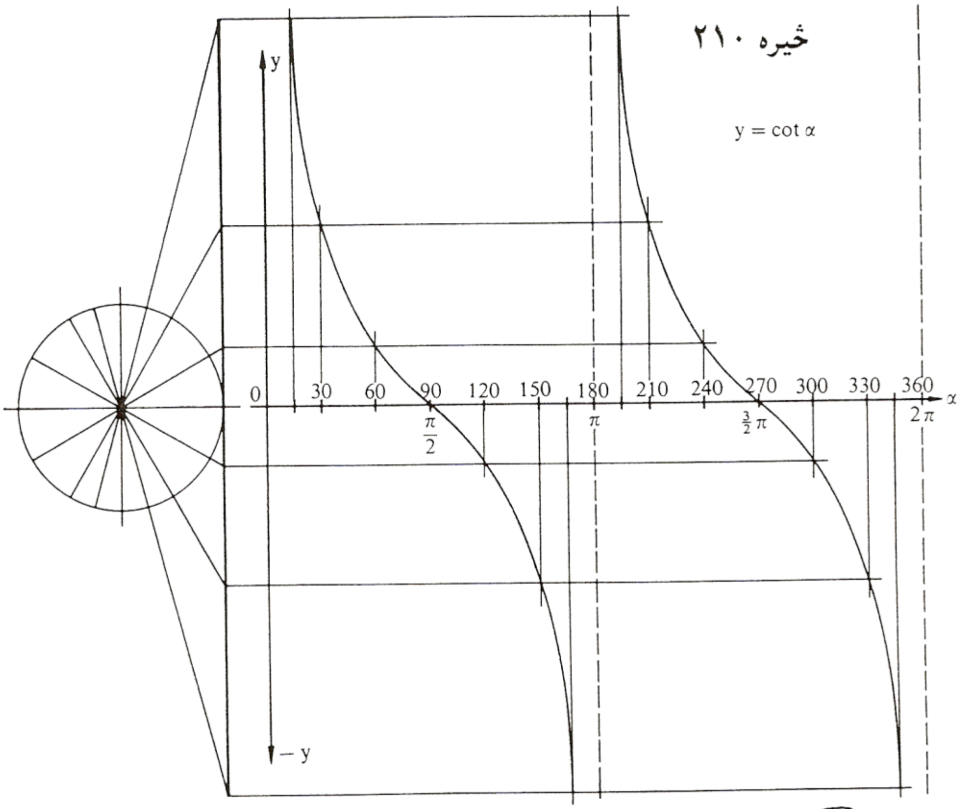
د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1;\ 1]$

دکوساین گراف



Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

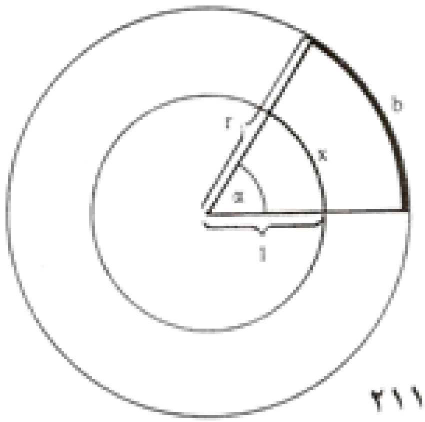
دکوتنجنت گراف

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چې ۳۶۰ درجې پوره ګردی بنایي. هغه، چې لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چې ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دوارو کچیوونونو یا کچواحدونو کې ګډ دي، چې په ګنونو اندازه کیږي، بې له کچ یوون ارزښتدیری ریبلګښونه دي، په داسې حال کې چې وتل ګنونه (= د تعریف ډیري ګنونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کې مونږ زیات وبنت د ختډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لوبي په واقعیت کې یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کې کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راځوي. دا کونجکچونه چې د کونج لپاره په تریګونومتریکي بلواکو کې ایښودل کیږي (د بیلګې په توګه sin)



ځیره ۲۱۱

ارګومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کې کیدی شي چې نوې درجه ، زره درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چې په جیښمیري کې همغه مودوس په کار اچول شوي دي(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پوري يوه ګردبرخه يا ګردۍ لينده اړه لري، نو ټولی ګردۍ پورې ۳۶۰ درجی کونج يا $2\pi r$ اړه لري، يوه کونج α پوري بيا يوه لينده b اړه لري، کومه چی په چاپيرۍ کی ځانګړی همداسی نيسي لکه په پيل کی α و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردېګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پيلبيلګه:

کونج $60° = \alpha$ له ګردۍ د ۱۰ سانتيمتره وړانګي سره يوه په لاندې ډول ګردۍ لينده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي يا بيلوي. د ګردی چاپيری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج α د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلينده

$$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$

غوڅوي. دا ګردۍ لاندې چاپيری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردۍ د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څټ يا برعکس کونج ګرديلينده

$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047 \text{ cm}$$

غوڅوي» د دې ګردي چاپيری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بيلګي څرګنديږي، چی لينده اندازه په همغه اندازه زياتيږي لکه وړانګه. له دې امله کيدی شي خپله شميرنه په يوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده يا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعريف: په يوونګردي د ګرديلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتريکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې څیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180°).\pi \quad <=> \quad \alpha = (x/\pi)\ 180° = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه رییلګڼونه پرېښوول شوي.

بیلګی :

$$\alpha = 1° \Leftrightarrow x = \frac{1°}{180°}\pi = 0{,}0175\ (rad) \qquad \alpha = 180° \Leftrightarrow x = \frac{180°}{180°}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30° \Leftrightarrow x = \frac{30°}{180°}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360° \Leftrightarrow x = \frac{360°}{180°}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45° \Leftrightarrow x = \frac{45°}{180°}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720° \Leftrightarrow x = \frac{720°}{360°}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad usw.;$$

$$\alpha = 60° \Leftrightarrow x = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90° \Leftrightarrow x = \frac{90°}{180°}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75° \Leftrightarrow x = \frac{-75°}{180°}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځاننیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفېدیري ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا ، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

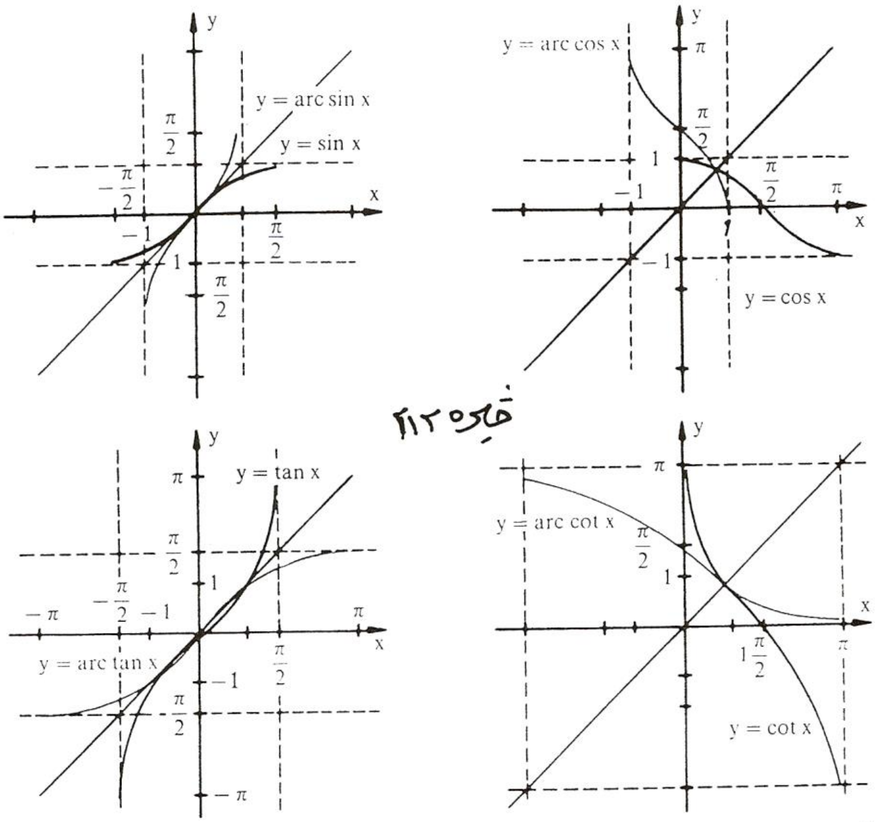
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکراريږي. د دې لپاره چې په څټکيدنه ممکن شي، نو بايد د خپل تعريف ډيرى په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

> **تعريف** : د يوه (رابند يا محدود) تريګونومتريکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کيږي يا څيکلومتريکي بلواك (لاتين :ارکوس Arcus = Bogen = لينده)

دلته (arc sin(x لوستل کيږي »د x ارکوس ساين. د کونجبلواك تعريفډيرى دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډيرى دى او په څټ ارګومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو رييلګڼ دى.

Trigonometrische Function تریګونومتریکي بلواك	Arcusfunktion ارکوسبلواك
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \text{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۲۱۲

Beispiele: بېلګې :

1. $\arcsin(0{,}8) = 0{,}9273\,(\mathrm{rad}) = 53{,}13°$

2. $\arccos(1) = 0\,(\mathrm{rad}) = 0°$

3. $\arctan(-100) = -1{,}5608\,(\mathrm{rad}) = -89{,}43°$

4. $\operatorname{arccot}(-70) = -0{,}0143\,(\mathrm{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك یو د بل په څټ بلواك دي نو باور لري·

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \qquad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \qquad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \qquad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\operatorname{arccot}(y)) = y; \qquad \operatorname{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنې په لاندې توګه چې

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\operatorname{arccot}(\cot(60°)) = \operatorname{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشميري كاروني يا استعمال لپاره

داچې پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفېدېري او ارزښتېدېري شميرلو لپاره له كاره غورځول شوي دي او دنده يې ايلكترونيكي ماشينونو نيولې ده، غواړو چې د جبشميري استعمال په هكله هم څه ووايو

كوركمپيوتر زيات وخت داسې فنكشنونه يا بلواكي لري يا وظيفې په كلك اختيار كې لري، چې د درجې اوړون په لينده كچ او په څپ كوي، مګر شميردرځ په توګه بايد د شميرونكې په پروګرام كې ځاى په ځاي شوى وي.

پوره اسانتياوې او زياته كارونه د جبشميرې په غاړه پرته ده، دلته دې توكمې د < .... > سره په نخښنه شي:

په قاعده كې دريې بلواك وركړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > كوتنجنت بيا داسې شميرلكيدى شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توكمي سره سړى اركوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > اركوس ساين دى. په عمومي توګه كونج – بې پروا كه په لينده كچ او يا درجه كچ وركړ شوي وي – بايد د فنكشن له مخه وركړ.

بيلګې

١ لاندې جدول همغه د كاروني يا اتعمال لپاره د جبشميري چمتووالى ښاى :

Winkelmaß کونجونه	TR-Modus په نخښونه	Beispiel بېلګه
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لینده کچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0{,}7071$ $\sin 50^g = 0{,}7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin\frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < <-- DRG > سره سورت نیسي.

بیرته یا په ځتړ سړی داسی راځي- لکه چی لرل مو- د <INV > – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنی جشمیري په دې برسیره نور زیات امکانات هم لري ، نتیجی یی په ګراد دقیقی، ثانیي اویا لسیز سیستم ورکړ شوي دي. بدلون بیا د تکمی <DMS-Dd> سره صورت نیسی:

26°45′ 30.25°	⟨inv⟩⟨DMS − Dd⟩ ⟨DMS − Dd⟩	26.75° 30°15′

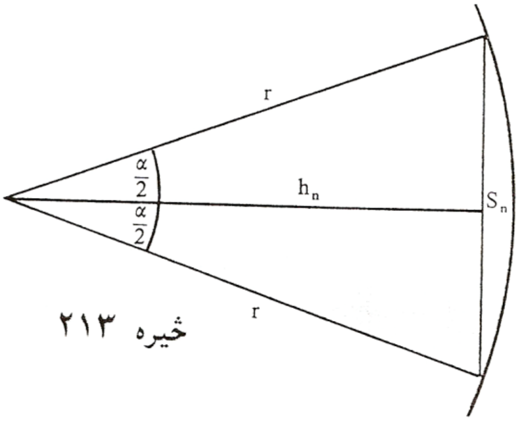
د " "15 °30 " ورکړه کیدی شي د جبشمیري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشمیری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (یادونه: زه پوهیږم چی داسی شیان موږ متآسفانه په خپل هیواد کي نه لرو ، خو په هر صورت یي لیکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پریښوولی)

پیلبیلګه: دلته دې S_n د یوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چی په یوه ګردی کی چی وړانګه یی r = 5 cm ده، راګیر دی.

الف) وښایي چی

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د یوه داسی n– ګوډي چاپیری U_n وشمیری ، چی n = 8;16;32;128 وي، او په نزدې توګه یا تقریبي د دې ګردي چاپیری د دې وړانګي r سره وښایی .



خیره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نږدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایی .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري ∝ = 360° / n . د جګی یا جګوالی h_c د کښلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\alpha}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\alpha}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin(180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړیپرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

```
180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩    8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩    8 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 30.614675
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   16 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.214452
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   32 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.365485
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   64 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.403312
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  128 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.412773
```

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

له دې سره د نرې [illegible]

```
360° ⟨STO⟩ ⟨:⟩   8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   8 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 70.710678
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  16 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 76.536686
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  32 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.036129
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  64 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.413712
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.508279
```

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چې پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتې هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګرامونو ماشین سره کیدې شي چې د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چې کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چې یوه کونج بلواك تعریفېدیری یا α او یا x وي. ددې لپاره چې د یوه بلواك خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.
د لاندې خویونو لمړۍ ډله یوائې له تعریفمساوات (د مخه راغلی) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعريف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتيت}}{\text{پرته کاتيت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتيت}}{\text{هيپوتينوزې}}}{\frac{\text{پرته کاتيت}}{\text{هيپوتينوزې}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) \quad = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسيره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تريګونومتريکي بلواکو کې هيله ده ، چې د پوتنځ ليکدود په پام کې ونيسي.
په لاندې پاملرنې سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben ورکړی / gesucht غوښتونی	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos x	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	cos x	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tan x	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	$\dfrac{1}{\cot x}$
cot x	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	cot x

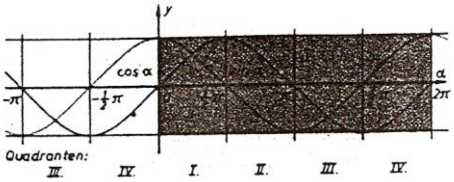
لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواک د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواک ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

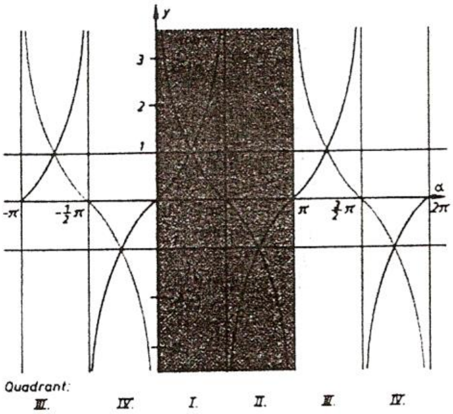
تعریف : تریګونومتریکي بلواک ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا ، چې د بلواک ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواک او د کوساین بلواک راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی) لري، کوتنجنتبلواک راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی (180°)) لري.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) = \tan x\end{array}\right\} \quad k \in N$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) = \cot x\end{array}\right\} \quad k \in N$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





شیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن پریود یاٸن راگرځیدنه

د تنجنت او کوتنجنت فنکشن پریود بیلګې :

$\sin 50^\circ$	$= \sin(50^\circ + 360^\circ)$	$= \sin(50^\circ - 720^\circ)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30^\circ$	$= \cos(-30^\circ - 360^\circ)$	$= \cos(-30^\circ + 1080^\circ)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35^\circ$	$= \sin(180^\circ - 35^\circ)$	$= -\sin(180^\circ + 35^\circ)$	$= -\sin(360^\circ - 35^\circ)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35^\circ$	$= -\cos 145^\circ$	$= -\cos 215^\circ$	$= \cos 325^\circ$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانیږي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګې:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

د دغه سطح د جدول په مانا دی او ښیدی تیږي یا څرګوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

sinx = cos (/2 -x)   cos x = sin (/2 -x)
tan x = cot (/2 - x)   cot x = tan (/2 -x)

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

sin   = a / c   او   cos ß = a / c

د   – 90° = ß له امله لاس ته راځي :

sin   = cos (90° -   )

په ورته توګه نور ي غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له څیرو   څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، څکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د 2/   = x کرښی ته یو بل سره محورسیومتري څغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

cos (x) = cos (-x)

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

sin (x) = -sin(-x), tan(x) = -tan(-x) ; cot (x) = -cot(-x)

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګې:

$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$

$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$

$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$

$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$

د زياتون قضيي يا تيورمونه

دا چي کونجبلواك لايني نه دي(د فنکشنګراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعريفېدېري پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.

لکه

$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$

د داسی په نامه زياتونمسئلی په مرسته ممکن کيږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو يا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زياتولو د يوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بيلګې :

1 . $\sin(x + y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $cis(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

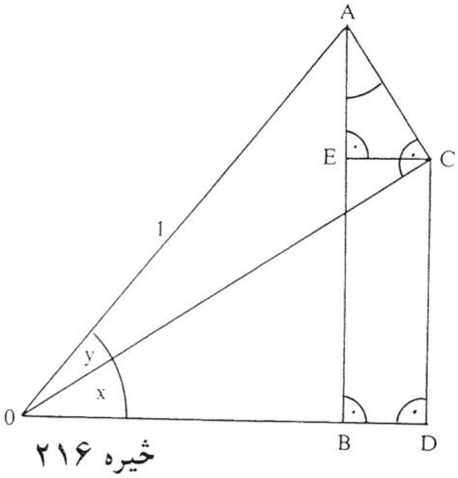
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



شیره ۲۱۶

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$

$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$

$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

پر بنسټ پر دې لرو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

دګام په ګام کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1′. 2′.:

3. ı 4.: $x = y$. ګام په ګام کېږي

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږي دې

$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$ پس کېږو

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ همدارنګه

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه په ورته توګه څخه راځي

7.: $x = y = z/2$ کېږي دې

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

دوهمه نیونې له لارې ښوونه کېږو

8.: $(*)\ \sin^2\frac{z}{2}$ durch $1 - \cos^2\frac{z}{2}$. په (*) کې و لیکه یا لیکېږي ده

9-10: دا د پرته له 1 او 2 او تنګښت د تعریف څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لكه چی په پيل کی مو وويل په طبيعت او تخنيك كي ډيرې پيښې شته دی چي تل بيرته راكرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱- او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلې لور داواقعي د كونج په واك کی نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه کی راښول شويدي، ګراف يی ورزياتی ځيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځې د ساينبلواك (په همدې توګه د هغې مخامخ د كوسا‌ين بلواك چي په $\pi/2$ سره راكښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستنې: له ښي لور څخه)

بيلګی	دکارونی ساحه	تاثير	بلواك
څېره ۲۱۷	ټولی تلبيرته راګرځيدونی تعامولونه		$y = \sin(x)$
څېره ۲۱۸	د ډوه مساوی او بدل ښيالونه يو په بل برلو ټل	د y-لور په لوري راكښنه	$y = \sin(x) + d$

y = sin(x+c)	د فاز تغیر یا ځای بدلون	په بدل برېښنا جریان کې د برېښنا او شیانو تخنیکي روښنانونه	څېره ۲۱۹
y = a . sin(x)	د امپلیتود د ځای بدلون فاکتور ـ 1 د 180° فاز ځای بدلون دی	د ویوه پندول څوځېدنه	څېره ۲۲۰
y = sin(bx)	د پریود تغیر یا بدلون b>1 سرعت 0<b<1 په تکرار کېدل b <0 په منفي توګه کېدل کم محور دی	د ویو بسته‌یو څېړنه په ډېره وخت داد چې له ... لنډه وخته دننه په دوه الو په او زونوکي	د څېره ۲۲۱
y = a . sin(bx+c)+d	عمومي حالت	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	څېره ۲۲۲

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره څیره بله کړی.

$4°6' = 4,1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) 6,75° = b = 120,48° = c) -75,65° =

d) 52°16' = e) 97°13' = f) 44°44' 44" =

۲ – په درجه کچ ي ولیکی

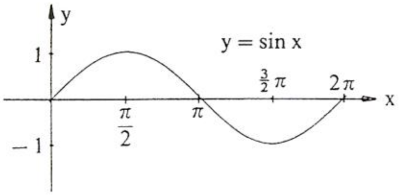
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x\ (2/3)\pi$

d) x = 4 e) x = -3 f) x = 4,7

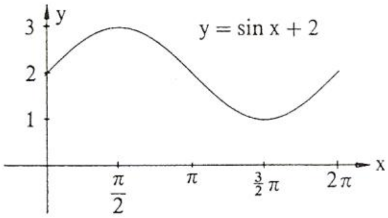
۳ – په لینده کچ یی ولیکي

a) 15° b) -60° c) 540° d) 20°15' e) 15,75°

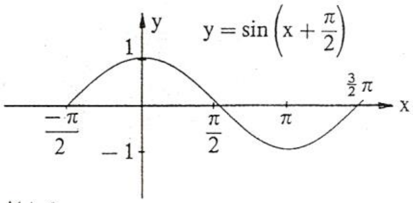
(c) ketabton.com: The Digital Library



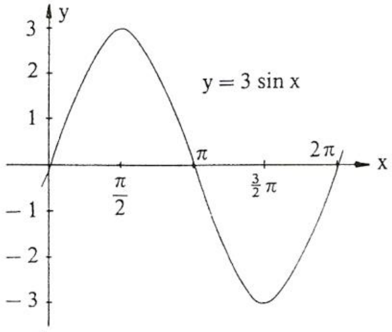
شیره ۲۱۷



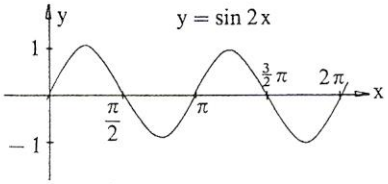
شیره ۲۱۸



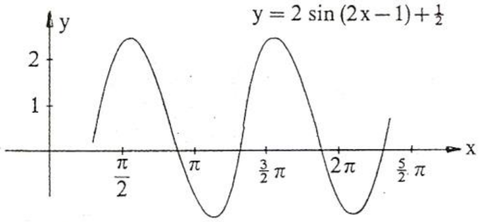
شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۰



شیره ۲۲۱



شیره ۲۲۲

د دې بلواک ګراف د ساین کږې $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

١ – د ارزښت دوه ځله کیدل

٢ – د نیمی راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

٣ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په $1/2$ پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8 s) cos α= 0,9 t) tan α= 2,5

u) cot α =-1 v) sin φ = 0,3 w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4 y) cot φ= 0,3 z) arcsin(x) = π /2

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټی وشمیری

۶ – په مساوي پښیز دریګوډي

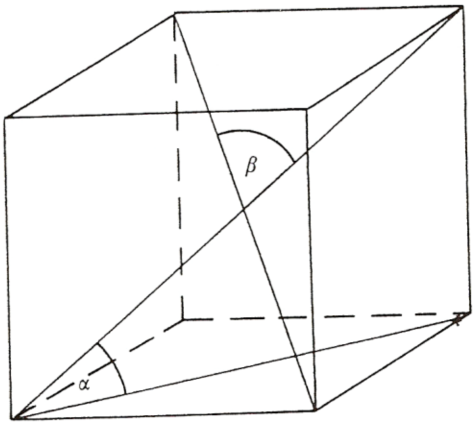
کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشمیري



شیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز (α > 90°)

دریګوډي لپاره ساین وشمیری

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز

دریګوډي لپاره وشمیری (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

$r_1 = 5$ cm , $r_2 = 4$ cm

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8$cm ورکړ شوی دی.

دد دواړو ګردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکی

او د کړې غوڅونی اوږدوالی .

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه

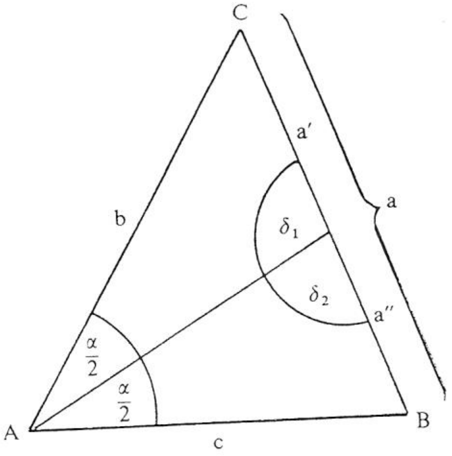
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

(اوبی) کړی(څیره۲۲۴).



څیره ۲۲۴

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،

چي ۰ ۵، ۱ متره جګ دی،

یوه زینه ورجګه شي

میلانکونج ⌐ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوځي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟

پ) د یوه زوړندې پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره

لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ – یو د اوبو بیلر (کتله = ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه دړه پورته خیژول کیږي، چې میلانکونج $\alpha = 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختې سره غبرګ او نورمال یعنې ولاړ زور (د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دي؟ (۱ کیلو ګرام = ۹، ۸۱ نیوټن 1 kg = 9,81N).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چې هره یوه یې ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج 60° دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګې ونې سیوری ۵، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګې په کوم جګوالی یوبل سره مخامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چې جګیدونکوج یې $\alpha = 18,5°$ او پښیتټکی یې $ß=8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی؟ د لیدټکي څخه یې پروت لریوالی څومره دی؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یې د پښې ټکي څخه ۵۰، ۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی؟

ب) د یوه جومات برج چې ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چې د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یې ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یې ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجې کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چې جګوالی یې ۱۴۳ متره وي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام (CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري

الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟

ب) د څنګهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟

۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی

الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟

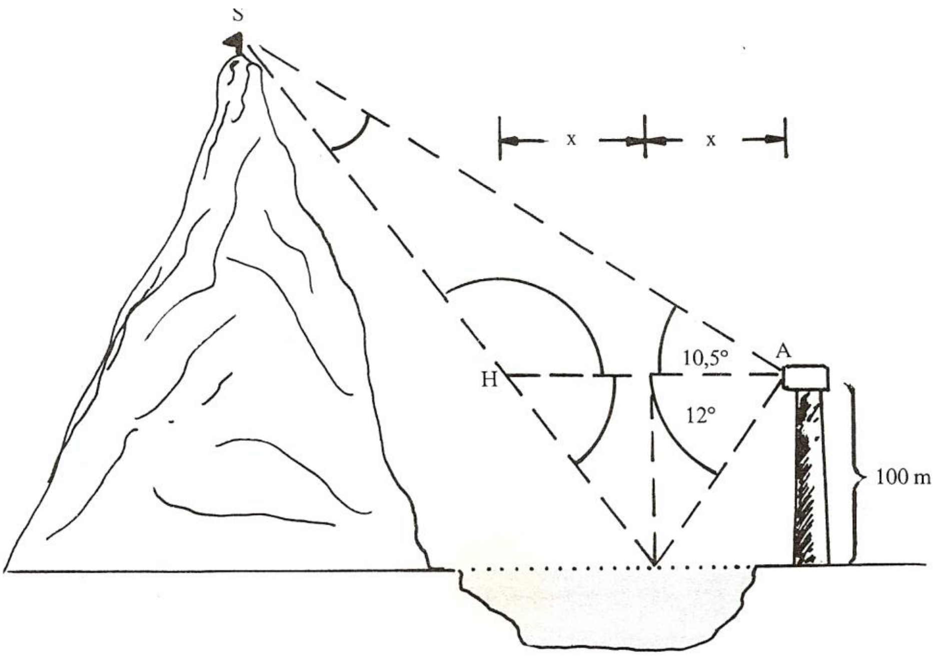
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

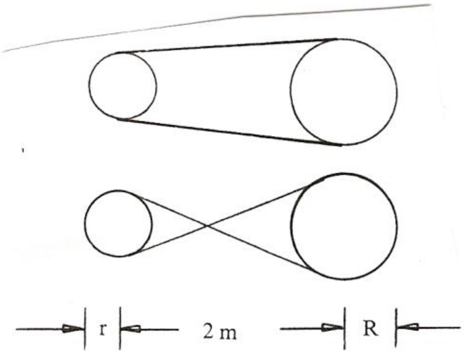
۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟

څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۲۵



شیره ۲۲۶

۲۳ – الف) یوه د کشولو کړۍ، چي په دوه دکښولو چیترو باندي راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندي اندازي ولري

$r = 22\ cm$, $R = 35\ cm$,

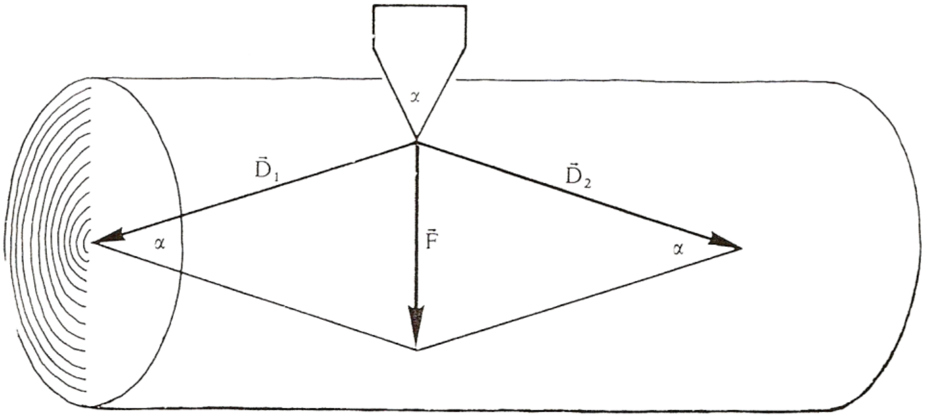
$|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړۍ به څومره اوږدې وي که د اتیران په څیر له چیتروګانو یا تیکلیو راکي څیدلی وي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

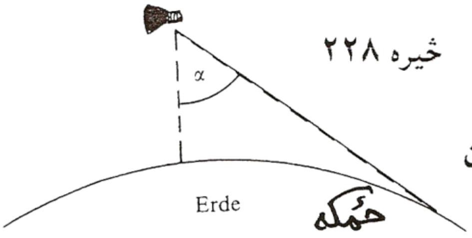
۲۴ الف) د ونی په ستهه یو کایل)موړی) په څنك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چې د ستهی درځونه ، که د کایل یا تېرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



ځیره ۲۲۷

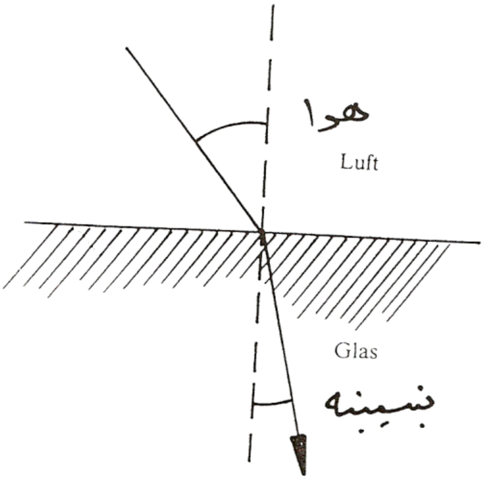
۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه α کونج لاندې لیدل کیږي (ځیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)



ځیره ۲۲۸

۲۶ – یو ګادی د $v_{\alpha} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۹

د چيترو (مطلب د ګاډې د اوسپنی ټير يا ګاډيل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لويدلو سرعت v_g وټاکی ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولوېږي، نو خپلی لور ته تغير يا بدلون ورکوي. د سنيليوس Snellius د ماتقاعدې له مخی کيدی شي چی د ماتيدو قانون وشميرل شي. دا قانون وايي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه يا عمود په بيليدونکی هوارې په يوه هواره پراته دي او برسيره پر دې لاندې اړيکي باور لري يا صدق کوي:

$$\sin \alpha \;/\; \sin \beta = n$$

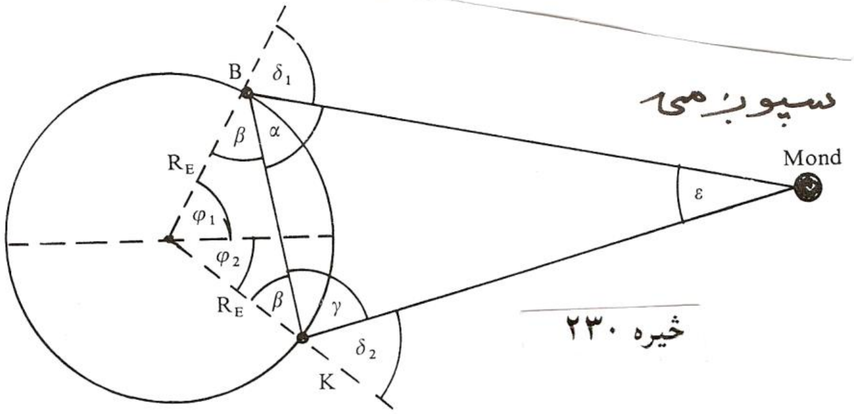
که د رڼاوړانګه په يوه ښيښه (اوبو) پريوزي، نو $n = 1{,}5\ (1{,}33)$ دی وښايي، چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ $10{,}5°, 15{,}8°, 27{,}3°\ , 41{,}2°, 67{,}6°,, 72{,}4°, 81{,}9°$

۲۸ – په ۱۸ ا–مه ميلادي پيړی کی د سپوږمی لريوالی تريګومتريکي وټاکل شو. په برلين کی (جغرافيوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52{,}52°$) او لکه د ښو هيلو په کونج کی ($\varphi_2 = -33{,}93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کيږي. له دې لاس ته راغلل: $\delta_2 = 55{,}72°$ او $\delta_1 = 32{,}08°$.

وشميری $|KM|$, β , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنی Schwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t ترواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin (2 \pi /T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2 \pi / T)\, t = x$ هغه کونج دی ، کوم چې په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګنډیرئ پر بله ګنډیرئ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرئ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرئ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7, 2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي حل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7, 4)$$

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a, \quad a > 0 \qquad (7,5)$$

کيدی شي په لاندې ډول وليکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a.i}, ...(7,6)$$

$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a.i}$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ايماجينار ګڼ يوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ايماجيناريوون(واحد)i =z يو ځانګړی ايماجينارګڼ b=1 دی

د توليزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

په لاندې ډول د څلوری پوره کولو يا مربع تکميلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

=>لاس ته راځی يالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x+p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$\pm\sqrt{p^2/4 - q} = \quad {}_{1,2} \quad (x+p/2)$$

نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4-q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي٠

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} = \sqrt{[q-\frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q-p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a,b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیری په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,14)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي٠ لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ...(5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ ایښول شوي

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:$i^2 = -1$

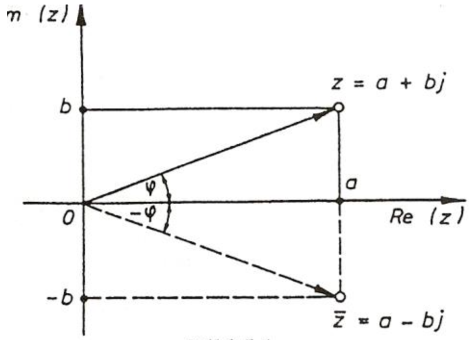


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته ځیره دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطحې ریيلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته یېایماجینار برخه وایې لکه څنګه، انځور شوي دي٠ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي٠(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیړو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

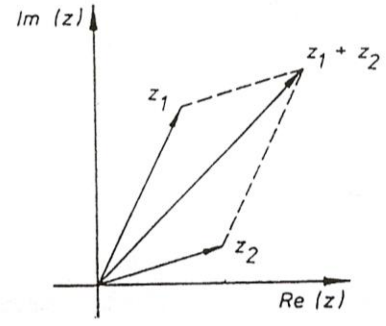


Bild 5.2

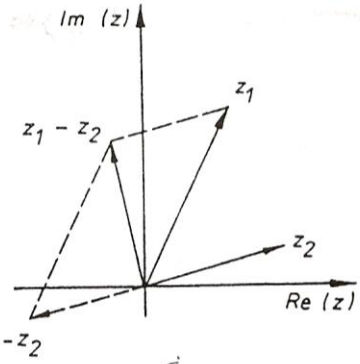
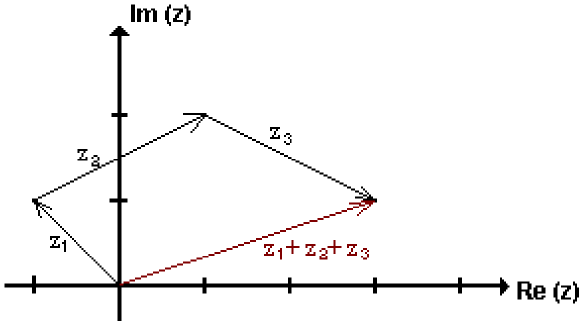
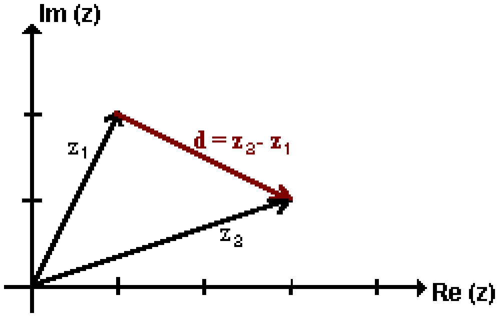


Bild 5.3

يا لاندې:



په پورته او لاندې ځيرو کې د کملپکس ګڼونو د زياتون او کمون انځور ليدلکيږي.



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کيږي.

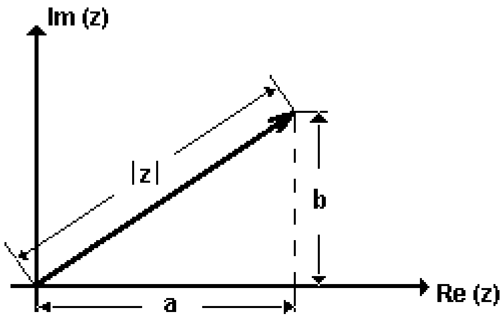
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د په |z| سره ښايو او د پيتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کيږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي٠ مخامخ څيره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښايي



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په دريږ ګوډي کې د اړخونو ځاننيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, ...(7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1+z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

٧ . ٢ د کمپلکس ګڼونو ځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$(a_1 +b_1i)(a_2 +b_2i) = a_1a_2 + a_1 b_2i +b_1 a_2 i+b_1 b_2 i^2$

$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i +b_1 a_2 i+b_1 b_2(-1)$

$\Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 +a_2 b_1)i \qquad (7, 20)$$

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi) (a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i =a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2 +b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{\overline{z_2}}}{z_1\overline{\overline{z_2}}} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسی لاس ته راځي

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلگه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلگه ۷ ۰ ٤ :د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توگه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په گاوس سیحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3} i)$ d) $z = -1 - i$

۱ . ۲ – د گاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a)(1+2i)+(2+i) b) (-2+i)+1-2i)

c) (1-2i)-(1-2i) d) (-1-2i)+(2-i)

۲ . ۲ - د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) (22 + 5i) + (2 + i) b) (3 + 2i) - (5+2i)

c) (1+2i) - (1+2i) d) i -(1-2i)

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i)\cdot(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i)\cdot(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i)\cdot(1-\sqrt{5}\,i)\cdot(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}\cdot\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x + y\,i)\,(2x + yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\dfrac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\dfrac{56+33i}{12-5i}$ d) $\dfrac{63+16i}{4+3i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

4.1. a) z_1+z_2 b) z_1-z_2 c) $z_1\cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1+z_2|$ b) $|z_1-z_2|$ c) $\bar{z}_1+\bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1-\bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1|\cdot|z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1\cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ایماجینار او کمپلکس ګنونه

Inhaltsverzeichnisخونديونه

- د ريیلو ګنونو بنستونه او نیوني یا فرضیي
- ایماجیارګنونه

کمپلکسګنونه

- په ګنونهواره کې د کمپلکس ګنونو انځورونه
- د کمپلکس ګنونو سره شمیرنه
- د کمپلکسګنونو زیاتون ، کمون
- د کمپلکسګنونو ځل
- د کمپلکس ګنونو ویش
- د کمپلکس ګنونو تولګنیز په توان
- د بینوم درسي جمله
- د موفري فرمول 5.6 Die Moivreschen Formeln
- د کمپلکس ګنونو ریښه 5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen
- توان د مختلفو جګګنونو سره
- 5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

د ريیلګنونو بنستونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریيلګڼونو ډیری لکه د مخه مو ، چې ګوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل ګڼونو له ډیریو جوړه ده (د ریيلګڼونو برخه دې وکتل شي).

ایماجینار ګڼونه Imaginäre Zahlen

د ریيل ګڼونو سیستم پوره نه دی، ګورو، چې د یوه ګڼ ځلوری یامربع، چې د کمیز ګڼ سره برابره وي، ریيله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو ریيل ګڼ نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1}\,,$$

چیرته ، چې $\sqrt{-1}$ ریيله اوبیونه نه ده.

دا ځلوری یا مربع ریښه د i سره په نخښه کوو، چې له دې پرابلم څخه ووتی شو او ځلوری یې په 1- سره په نخښه کوو.

د دې i لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i\,.$$

که ګڼ i د ریيلګڼونو سره زیات ځل یا ضرب کړو، نو د ګڼونو یوه د نوو ګڼونو ډیری ترې لاس ته راځي، د بیلګي په توګه :

$$2i,\ 3i,\ -i,\ 1+i,\ 2+i,\ 1+2i,\ -23+78i,\ 0.45-0.93i$$

او داسې نور.

ټولیزه بڼه یې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$a + bi\,,$$

پورته ګڼ کمپلکس ګڼ دئ او a او b رییلګڼونه٠ له دې سره هم لګۀ د نورو ګڼونو سره ساده شمیرل کیږي، چیرته، چې د i^2 په ځای 1 - لیکلی شو یا په ځټ: لاندې کې یې بیلګې ګورو

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

په ټولیزه توګه:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)\cdot(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

له دې سره ویش هم کړی شو، خودا ، چې ستونځمن دئ وروسته یې راوړو.

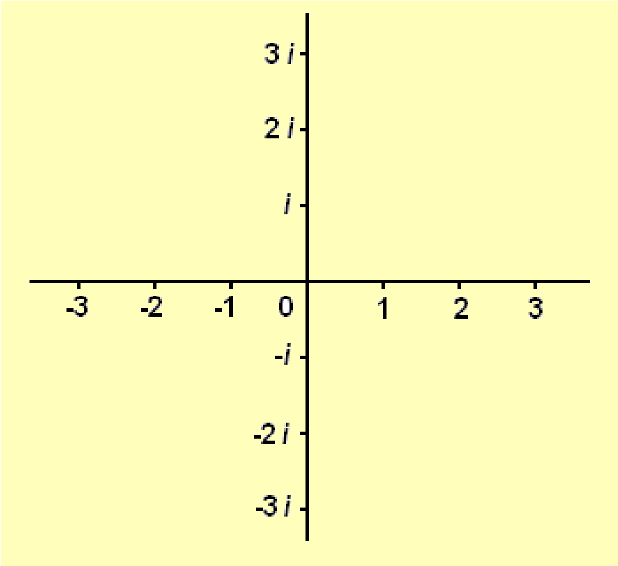
دا لاندې هم لرو

i.2i,i,0,-i,-2i,-3i٠٠٠3.....

دا ایماجینار ټولګڼونه بلل کیږ ي یا بولو ، چې دا هم صفرلري

موږ په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د رییلګڼونو محور پوهیږو او ولاړ محور یا څرخونی یې د ایماجینار ګڼونو محور دی، چې د دواړو زیاتون کمپلکس ګڼونه دي یا د کمپلکس ګڼونو هواره انځوروي٠.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په لاندې کې يو کپلکس ګڼ په يوه رييل ګڼ يا پيداينتي ګڼ ويشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n} i \ .$$

په پورته کې m او n رييلګڼونه دي او ايماجينار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کې a رييلګڼ دی، خو x غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه يې يو ايماجينار ګڼ دی.

د دوه ايماجينار ګڼونو زياتون او کمون::

$$a\,i \pm b\,i = (a \pm b)\ i\ .$$

ځل او ويش يې

$$\frac{i}{i} = 1\ .$$

د دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q}\,,$$

چیرته چي p او q ریللګنونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ایماجینار ګنونو ځل یا ضرب او ویش څخه رییلګڼ لاس ته راځي، چې په لاندې کې یې ګورو ۰

$$i^2 = -1\,,\quad i^3 = i^2 \cdot i = -i\,,\quad i^4 = i^3 \cdot i = 1\,,\quad i^5 = i^4 \cdot i = i\,,\ldots$$

د توګلګڼ n لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی یي

!Error

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i\,,\quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1\,,\quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i\,,\quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1\,,\ldots$$

د سره شمیرل ورسته کیدونکي دي.

Komplexe Zahlen کملکس ګنونه

ګډ یا مخطلت خلوری - یا مربع برابرون شمیرو

$$x^2 - 4x + 13 = 0\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځلورۍ پوره کوونې یا تکمیلونې له لارې ، چې ورسره بلد یو ، اوبیونه یا حل پیداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\,i \ .$$

د دې برابرن اوبیونه نه ریبل ګڼ دی او نه ایماجینار ۰ دې ګڼ ته موږ کمپلکس ګڼ وایو **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس ګڼونو او د دې سره سره شمیرنه ۰

موږ دا لاندې کمپلکس ګڼ لرو :

$$z = a + b\,i,$$

چیرته، چې a او b ریبل ګڼونه دي

د کمپلکس ګڼونو په مرسته کړای شو، چې بې بندیزه ځلورۍ- یا مربع فرمولونه اوبې کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځي هغه ګران لوستنکی پخپله هم پیدا کولی شي، زه به وهڅیږم، چې دا پرابلمونه پورته کړم یا لرې کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

یو یا دوه ریبل اوبیونې لاس ته راځي۰

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره اوبيوني په لاندې ډول ليکل کيږي

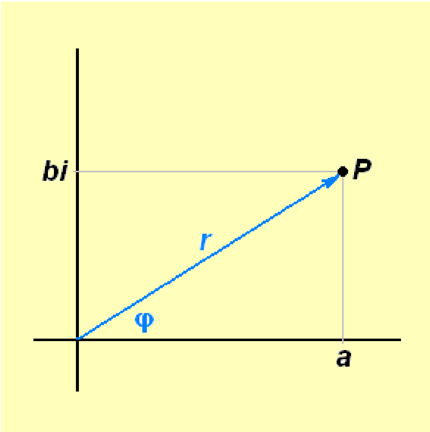
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \ .$$

اوبيوني کنجوګيري کمپلکس دي، دا په دې مانا، چې يو له بل د مخنخښي له مخه توپير کيږي٠

په ګڼونهواره يا ګڼسطحه کې د کمپلکس ګڼونو انځورونه

د کمپلکس ګڼونو ګرافيکي انځورونې لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې د رييل او ايماجينارګڼکرښو ځخه غزيدلې ده٠

کمپلکس ګڼونه a + bi د ټاکنې له مخې(په بدل وار يا همغه وخت) د يوه ټکی P ، چې کواوردينات يا پروت ولاړ محورونه يې a او b ، چيرته، چې محور b ټکی bi په ايماجينار ګڼکرښی باندې په ګوته کوي، يا د» ښوونکرښې « OP سره انځور کيدی شي٠ دا د يوې اوږدې r سره ښايو او د رييلې محور سره کونج fi جوړوي٠ (دا همغه د ټکی P انځورول دي په پولار کواوردينات کې، r د کمپلکس ګڼ مطلق ارزښت دی، fi يې فاز بلل کيږي٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو انځوربنې لپاره لاندې ترانفورمیشنبرابرون باور لري(له دې څخه نوج زده کوونکي تیریدلی شي، چې ترانسفورمیشن باندې نه پوهیږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,.$$

له $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ لاس ته راځي

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k\cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره یا چیرته چې په مانا دی او k ټولګڼ دی ۰

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan\frac{b}{a}$$

د فې φ اصلي ارزښت بلل کیږي۰ له دې نور ارزښتونه د k او 2π له زیاتون څخه لاس ته راځي۰

د دې له مخې کیدی شي، چې کمپلکس ګڼ په لاندې توګه ولیکل شي ۰

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\,.$$

" وروسته د اویلر فرمول "Eulerschen Formel په مرسته ترې لاس ته راځی

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

دریمه انځورونه یې لاندې ده:

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\,e^{i\varphi}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کمپلکس ګڼ دا درې انځورونې په ترتيب داسې بلل کيږي اريتميتيکي بڼه کونومتريکي (يا تريګنومتريکي بڼه) او اکسپوننشل بڼه.

دا چې د اويلر فرمول وروسته ښوول کيږي، اکسپوننشل بڼهٔ دې دلته راوړل شوې وې، خو د ښووني لپاره دې ترې کار نه اخستل ک يږي.

Rechnen mit komplexen Zahlen

د کملپکس ګڼونو سره شميرنه

دوه کملپکس ګڼونه دې ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i\,, \quad z_2 = a_2 + b_2 i\,.$$

د کمپلکش ګڼونو زياتون او کمون

په زياتون او کمون کې د الجبر ي قوانينو له مخې i هم داسې په کار اچول کيږي لکه هره بله کومه د تورو لويه ، چې په کار اچول کيږي يا کارول کيږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,i$$

د کمپلکس ګڼونو « ښوونکرښه» (دا هغه کرښه ده، چهٔ د دواړو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په هواره موخه ور ټکی په لور ګزيدلی وي، ياني د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور ، ځکه لوريزه ده)لکه وکتورونه سره زياتيدلی او کميدلی شي

Das Produkt komplexer Zahlen

د کمپلکس ګڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i.$$

دا ځل ترلی پيژند ور ليدونکي مانا نه لري(ياني سملاسي ترې څه نه شو پوهيدلی) . که د دې په ښټ » پولارکواودينات » وکارول شي، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_1a_2 - b_1b_2 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) = r_1r_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right) = r_1r_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right).$$

او له دي سره t

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right].$$

نو دی

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{او} \quad \varphi\left(z_1z_2\right) = \varphi_1+\varphi_2.$$

د ځل – یا ضرب ارزښت د ارزښتونو ځل دی. د ځل یا ارګومنت یا فازې د ارګومنت یا فازې د زیاتون سره برابر دی.

سملاسې پیژندل کیږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زیاتو فاکتورو یا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n| = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n| \quad \text{او} \quad \varphi=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n.$$

د کمپلکس کڼونو ویش Division komplexer Zahlen

په ورته توګه پیدا کیږی، که z_2 د صفر سره برابر نه وي

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{او} \quad \varphi=\varphi_1-\varphi_2.$$

که کیږدو $z_1 = 1$ او $z_2 = z$, نو لاس ته راځي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\left[\cos(0-\varphi)+i\sin(0-\varphi)\right] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په ځانګړي ډول د $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس ګڼونو توان (کپلکس ګڼ د یوه ناکمیز توان سره د ریيل ګڼونو په څیر دی)

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس ګڼونو ځل دې وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون یا ضریب z لپاره تربلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

موږ لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = (z_1 \cdot z_2)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

Der binomische Lehrsatz

د بینوم درسي جمله

د بینوم جملي لپاره هم لرو

د نوکانو د چاون قانون او ځل قانونو د زیاتیز جګ ګڼ لپاره د بینوم جمله همغسي باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \ldots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \ldots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځایه ښکته د ښوونځي زده کوونکو لپاره ستونځمن دی.

د موفری قانون Die Moivreschen Formeln

له برابرون څخه (پورته دې وکتلشي)

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1: \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زیاتیز ټولګنیز جګګڼ یا اکسپوننت سره د بینوم جملې څخه لاس ته راځئ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

$$-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi + \ldots + i^n\binom{n}{n}\sin^n\varphi.$$

که د برابرون دوا

ړه خواوې بربار کینول شي او بیا په پام کې ونیول شي، چې رییل او ایماجینار برخه دوآړه باید برابر وینو د موفري برابرون ترې لاس ته راځي **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - + \ldots,$$

او

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - + \ldots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته، چې بنې لور ترهغې پوره شي، تر څو چې ځله وونی یا ضریب صفر شي.

د کمپلکس ګڼونو ريښه Wurzeln aus komplexen Zahlen

د برابرون اوبیونه

$$x^n = z \qquad \text{n positiv ganzzahlig}$$

پورته کی n زیاتیز ټولګڼ دی
د کمپلکس ګڼ z n -مه ریښه بلل کیږي :

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ږدو

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

او

$$x = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right),$$

د $z = x^n$ له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دې پسې

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي

په ويشنه کې باید په پام کې ونيول شي، چې ارګومنت یا پروتمحور φ پریودي یا تل بیرته راګرځیدونی دی د پریودې یا راګرځیدنی 2π سره ، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

پسي د ψ لپاره تيک *n* مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، ياني

$$\psi = \frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2 \cdot 2\pi}{n}, \ \dots \ \frac{\varphi + (n-1) \cdot 2\pi}{n}.$$

د $n = k$ ځانلۀ د مخه ارزښتونه (له دويم پسې) تکراريږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس ګڼ z د n-مې ريښه بلل کيږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول n ارزښتونه په ګڼهواره په يوې ګردی په O په يوه منظم n - ګوډي پرته ده , د څلورې ريښی لپاره له

$$i = i\sin\frac{\pi}{2}$$

لاندې ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4},$$

او د څلورې ريښي لپاره له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-i = i\sin\frac{3\pi}{2}$$

پیداکیږي

$$\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}.$$

که موږ ونیسو لکه د رییل ګڼونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

دې وي، چیرته چې n یو پیداینتج ګڼ او m یو په خوښه ټولګڼ دی، نو له دې سره د کمپلکس ګڼ سره جګګن یا کسپوننت وپیژندل شو یا تعریف شو. اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ایراشنلجګګڼ دی .

توان د په خوښه رییل جګګڼ سره

Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې z له صفر مختلف په خوښه کمپلکس ګڼ وي .

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left[\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi)\right],$$

چیرته چې

$$k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

دی ، نو د z^{ν} (ν رییلreell) لاندې هر دالاندې کمپلکس ګڼ پوهیږو:

$$r^{\nu}\left[\cos\nu(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin\nu(\varphi + k\cdot 2\pi)\right].$$

لاربښود : د داسې په ټولیز پیژند یا تعریف سره د کمپلکس ګڼونو توان لپاره د د توان شمیرنې بنسټیز قوانین باور لري ، یانې

$$z^{\mu}\cdot z^{\nu} = z^{\mu+\nu}, \quad z_1^{\mu}\cdot z_2^{\mu} = (z_1\cdot z_2)^{\mu}, \quad (z^{\mu})^{\nu} = z^{\mu\cdot\nu}$$

nicht mehrنور بس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یه - مساوات

دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څیړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوبنه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتي اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولي اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رښیل اوبیوني پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیرو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کيدی شي (۱۳ . ۱)

سيده د جبشميري له لارې پيداشي. په ځټ يا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کيږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b......................(13.2)$$

د لوګاريتمي مساواتو يو ساده ډول يا شکل (تيپ) دا دی

$$l\,\text{og}_b\, x = c..................................(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c..(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشميري سره شميرل کيدی شي.

بيلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$:

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بنې اوبيونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c..(13,5)$$

دلته (f(x يوه الجبري وپينه يا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c..(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبيونې د (۱۳ . ۵) اوبيونې هم دي

بيلګه ۱۳ . ۲ : لوګاريتميز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x^2+x+6=2^3=8$ (همداسی) $\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

او لاندې اوبیونې لري

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2};x_1=-2;x_2=1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کینه لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وبینه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹)کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}...................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رینه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د کوم له څلورۍ یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515;x_2=-8,515$$

تیک دا $x1=9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پېژند نه لري یا تعریف نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني که $1<(b+3)/b-2)$ وي.

د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دی

د. $2 \leq b$ لپاره د $b+3 \leq b-2$ څخه $b+3 < b-2$ $2 \leq 3$ لاس ته راځي

اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $2 \leq b$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وینې یا افادې دي. د بدلون کاروايي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه $y1,y2,..$ په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳/۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چې و ازمائیلی شو چې ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳/۹) کی کېښوول شي یا ځای په ځای شي،

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیټیوشن(بدلون) $y=\lg x$سره په څلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .

د $y1 = 2$ او $y 2 = -1$ ځوابونو سره

له. $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$$x1 = 10^2=100 \quad \text{او} \quad x_2=10^{-1}=\frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$

د,$x>0$ مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندي $(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$, \quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلورې بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 \;,\; y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.
که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو b سره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1)+\log_4(x-1)-1=0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-1=0,\ \log_2(x-1)=\frac{2}{3},\ x-1=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4},$$

$$x=1+\sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4}+\log_4\sqrt[3]{4}-1=\frac{1}{3}\log_2 4+\frac{1}{3}\log_4 4-1=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}-1=0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګګڼ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x=b; a>0, a\neq 1, b>0 \qquad (13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x=\log_a b=\lg_b/\lg_a=\ln b/\ln a \qquad (13,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ)
برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2)+3^x(3^2-3)=0, \ \text{bzw.} \ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x, \ \text{bzw.} \ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري ویینې یا افادي(f (x اکسپوننتونه
یاجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b,a>0\ ,a|=1,b>0 \qquad (13\ .\ 16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b ....(13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د (۱۳ . ۱۶) ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې خلورى برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا
ځوابونه هم دي۰

بیلګه ۱۳ . ۱۰ : په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنخ بنسټ د
بل پوتنځ د بنسټ په څېر ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3\ ,\ x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپېژندونکې د اکسپونټنت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ (۱۳ . ۱۶) مساوات دی، څکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو څلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپونتتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;\ ....(13{,}18)$$

څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + \ldots - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - \ldots\ldots = \lg c \qquad (13.19)$$

که يو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کې چې د يوه اکسپوننشل افادې يوه الجبري ويينه يا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0 \;;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبيونو $y_1, y_2, y_3;\ldots\ldots\ldots$ لپاره بايد

$$a^{f(x)} = y_i ; i=1,2,3\ldots\ldots \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بيلګه ١٣ . ١٣:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کيدی شي چې د بدلون $y = 3^x\,(y^2 = 3^{2x})$ سره په خلوری

برابرون يا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بيرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0,\ x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبيونه نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}}-\sqrt{e^{x^2-1}-1}=\sqrt{2e^{x^2-1}-1}\text{.........................}(13,25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y=e^{x^2-1}\text{......................................}(13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};\text{..............................}(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

تیک $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;\text{...}(13,28)$$

باید اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

x²-1=ln1=0,

x1 = 1 , x2 =-1

دواړه ارزښتونه پیلبرابرون پوره کوي.

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخې ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کې انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کې اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځای رامنځ ته کیږي.

بېلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$$

که کيږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلورۍ برابرون يا مربع مساوات $y^2 - y - 2 = 0$
لاس ته راځي،د ځوابونو
$y_1 = -1$, $y_2 = 2$
سره او له دې بيا لاس ته راځي:
$\ln x = -1$, $\ln x = 2$, $x_1 = e^{-1} = 1/e$, $x_2 = e^2$

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې اوژباړې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې څنو ځایونو غزېدلې او څنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري‌د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګرېزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

رياضي برای صنف دوازده

.

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

	ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي. د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library