شمیرپوهنه (ریاضي)

ددولسم ټولګي لپاره

لیکونکی ډاکتر ماخان (میږی) شینواری

2016

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

پوله ارزښت ۱

د پوله ارزښت خويونه................. ۱۰

د کسري يا ماتو توبعو پوله............. ۱۶

د کلاسيک له لارې د کسري اعدادو ۲۱

د مثلثاتي توابعو پوله ۲۳

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت يا ليميټ ۲۹

تولیز خويونه: ۳۱

ناپرېکيدنه ۳۴

د متمادي يا................................. ۴۰

د لـــومړي څپـــرکي ټولګه ۴۷

د څپرکي تمرينونه ۵۰

د تابع منځ ارزښت تغير ۵۷

کمښت ويش يا د تفاضل ويش...................... ۶۰

رابيليدنه يا مشتقشميرنه ۶۳

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع ۶۸

د تانجنت او عمود تعريفونه او خويونه ۷۳

د مشتق شميرني يا رابيليدني قوانين ۷۸

د د الجبري توابعو مشتق ۸۱

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق ۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو مشتق ۹۰

د مشتق استعمال په طبیعي علومو ۹۵

د جګو درجو مشتق ۹۹
د اکسپوننشل توابعو مشتق ۱۰۳

د لوګاریتم مشتق ۱۰۷

د ایمپلیځیت Implicit تابعو مشتق ۱۱۷
د فصل ټولګه ۱۲۰

د ځېرکي تمرینونه ۱۲۲

درول قضیه ۱۲۸
همغږیزې توابع ۱۳۲

ځای اړونده افراطي ټکي ۱۳۷

وړنټکی ۱۴۳

د کږې یا منحني خبرې ۱۵۳

د ناټاکلو افدو پولې ۱۵۷
د ناټاکلو افدو پولې ۱۶۰
د تانجنت له پاره............ ۱۶۶

د سترو ګټو ۱۶۷
په تولید کې ۱۷۱

ټولګه ۱۷۳

زینټکی(د اس زین) ۱۷۶

د ځېرکي تمرینونه: ۱۷۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۱۸۷

انتیګرالشمیرنې ته پیل راوړنه ۱۹۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمیرنه ۲۰۰

بنستیز یا لومړنی تابع ۲۰۴

ناټاکلی انتیګرال ۲۱۰

د ټاکلی انتیګرال......... .... ۲۱۲

د ټاکلی انتیګرال څخه نا......... ۲۱۶

د انتیګرالونپا......... ۲۱۹

د لوګاریتمي......... .... ۲۲۲

د بدلون قانون ۲۲۴

ټوټه انتیګرالونه ۲۳۱

ناپای انتیګرال ۲۴۰

ټولګه ۲۴۴

د ځیرکي تمرینونه ۲۴۷

د اینتیګرال شمیرنی استعمال ۲۵۳

د دوه کربنو څخه رابنده ۲۵۶

ځرخېدونکي تنونه: ۲۶۴

ټولګه ۲۷۷

تمرینونه: ۲۷۹

د لیکونکي ژند ته کتنه

د نصاب د دولسم ټولګي ناسمونونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

ګرنو هیوادوالو!

ما په کلونو کې د نصاب لهپاره دا د دولسم ټولګي د پښتو او درې کتابونه لیکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشینۍ سره باید ووایم، چې په ځای یې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه یې ژبه سمه وه او نه یې شمیرپوهنیزه خوندویونه.

دا زما له خوا لیکل شوي کتابونه د معیار (د نړۍ د معیار) سره سم لیکل شوي او د لته یې ګرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هیله ده، چې ګټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوې برخې ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما څو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هیله کړې، چې اجازه راکړي، تول د ښوونځي کتابونه ، چې ما لیکلي، دوی ته وړاندې او د سرهسم ولیم، خو د کتابونو د ناسمون مسئولیت او یا هیڅ څوک د څه مسئولیت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د ښوونځي کتابونه ګرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو ځنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانۍ له امله به مې د یوه کتاب ځنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د ګرانو لوستونکو څخه هیله، چې د هر څه له مخه دې، د کتاب سریزه وګوري.

ما چې لیکنې جمهورریس او د پوهنې وزارت ته لیکلي، هم مل دي.

ګرانو هیوادوالو!

ماته به بخښنه کړۍ، زه له دې نور زیات زور نه لرم، چې ښه سریزه او نور اړین څه ولیکم. دا زما لیکنې نورې همداسې ومنۍ، چې څنګه درته وړاندې کیږي. په لیکنو کې به زما د لیکنیزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هیله ده، چې ګټه به ترې پورته کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . پوله ارزښت

۱ . لیمیت یا حـد(پوله ارزښت) "The Limit"

موږ لاندې د

اعدادو ترادف لرو:

$$
\begin{aligned}
&(I) \quad \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n}\\
&(II) \quad \frac{3}{2},\frac{4}{3},...,\frac{n+1}{n}\\
&(III) \quad 2,4,6,...,2n
\end{aligned}
$$

که n د ناپای په لور لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (I)د صفر په لور، (II) د یو په لور او (III) د ناپاي په لور ځي.

د Limit (لاتین) معنا پوله یا حد دی. په پخواني روم کې د یوه ښار د کلا نوم هم Limit وو، چې په ریاضیاتوکې ، د پولې مفهوم لري. د حد د کاروني مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوې تابع سلوک داسې وڅیړو لکه په افقي محور(دx محور یعنې"abscissa ") باندې، چې د تابع د x قیمتونه یوه حد(پولې) ته ورنږدې کیږي.

وبه ګورو، چې لیمیت په ریاضیاتو کې د مشتق د پیژندلو لپاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليتونه:

- ايا تاسو په ورځني ژوند کې د ليميټ يا پولې له کلمې سره بلد ياست؟

- ايا تاسو په ورځني ژوند کې يوه بيلګه راوړی شئ، چې يوه ليميټ ته له دواړو لورو، يعني له ښئ لورې څخه و کيڼي لورې ته او همداډول له کيڼي لورې څخه و ښئ لورې ته نږدې شئ؟

- ايا د حيرتان او ترمز ترمنځ پول د افغانستان او ازبکستان ترمنځ له دواړو لورو پوله يا حد دی، که څنګه؟

- ايا دا په ټاکلي ځاي کي پوله ياحد دی، که څنګه؟

د پورته فعاليتونو څخه دا لاندې د لاسه کوو:

پورته راوړل شوې د ليميټ بيلګې په يوه ټاکلي ځای کې د توابعو يا د ځنو عملي بيلګو ليميټونه يا حدونه دي، چې موږ يې په رياضياتو کې هم په يوه ټاکلي ځای کې ليميټ، پوله يا حد بولو.

موږ اوس لاندې بيلګه د پايليزې روښانه ونې لپاره راوړو:

بيلګه ۱:

يوه د $f(x)=2x$ تابع او د P_0 يوټکی دې ورکړ شوی وي، چې د P_0 ټکی د وضعيه کمياتو په سيستم کې (3,6) وضعيه قيمتونه لري نو :

1- دتابع جدول وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع گراف یا ځیره انځور کړئ.

3- د$f(3)$ قیمت پیداکړئ او د$f(x)$ پرحرکت باندې بحث وکړئ که x و3 ته نږدې شي.

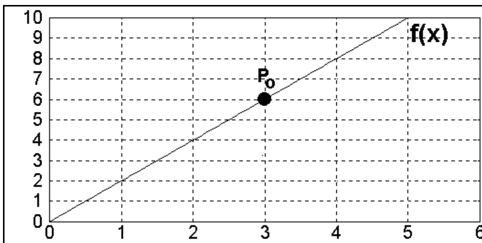
4- په شکل کې د $f(x)$ حد ته تلنه روښانه کړئ.

ښوونه:

1- د تابع جدول

2- د تابع شکل

3 - موږ $f(3)=6$ لرو او غواړو د درې قیمتونوځخه چې له ښي او کیڼي لورې 3 ته ورنږدې کیږي، و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې تابع چېرته ځي.



ولاړ جدول:

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې د f ارزښتونو سره له کیڼې لورې له پورته ځخه وکښته لورې ته 6 ته نږدې کیږو او همداسې له ښي لورې له کښته ځخه و پورته لورې ته هم6 ته نږدې کیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ پوله

پروت جدول روړو:

له ښی لوري څخه کيڼي لوري ته   له کيڼي لوري څخه ښی لوري ته

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6,002	6.02	6.04

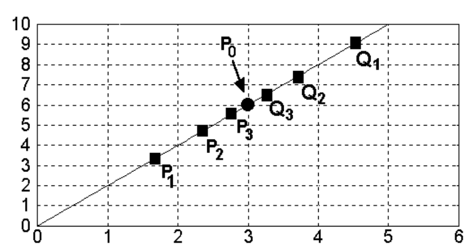
$\longrightarrow 6 \longleftarrow$

په درې پلونو يا قدمونوکي د f(3) قيمت دf(x) له قيمتونو سره پرتله کوو، کهx و3 ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که x و 3 ته ورنږدې شي، نو د f(x) ليميټ به په 6 برابر شي او داسې يې ليکو: $\lim_{x\to 3} f(x)=6$

او داسې يې لولو: د f(x) ليميټ يا پوله که x د درې په لور لاړ شي.

4- اوس ګراف په لاندې توګه رسموو او کيڼې لورې ته هدفمند ټکي - لکه په پورته جدول کې- په نخښه کوو.



د مخامخ شکل له مخې... $P_1, P_2, P_3,$ ټکي په پام کې نيسو، چې د P_0ټکي ته تل له کيڼې لوري نږدې کيږي.

او همداسې ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ ټکي چې له ښی لورې P_0 ټکي ته نږدې کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتل کیږي: هرڅومره، چې پورته ټکي وP_0 ټکي ته نږدې کیږي په همغه کچه د تابع قیمتونه و 6 ته نږدې کیږي (د $P_0(3,6)$ ټکي قیمت له امله).که په ګراف کېx د $x=3$ ځای ته نږدې شو، نو د تابع قیمت و 6 قیمت ته نږدې کیږي.

وایو: 6 د $f(x)$ تابع لیمیټ دی، د $x \to 3$ (لوستل: x د3 (درې) په لورې ځي یا درې ته نږدې کیږي) لپاره.

د لیمیټ لپاره لیکښه په دې ډول تعریف شوې: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

د پورته فعالیتونو او بیلګو څخه دا تعریف لاس ته راوړو:

پیژند(تعریف): د $f(x)$ تابع یو لیمیټ (حد)L لري، د x لپاره که x د یوه حقیقي عدد c په لورې تږلی لاړ شي او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to c} f(x) = L$ لوستل: د $f(x)$ لیمیټ برابر په L دی، د c <- x لپاره.

په ځنو توابعو کې لیمیټ، لکه چې ولیدل شو، په داسې سادګۍ لاس ته نه شو راوړي.

یوه بیلګه راوړو، چې دا لاندې پوښتنې په کې ځواب شوې وي:

- ایا یوه تابع په خپل ورکړ شوي ځای کې لیمیټ درلودی شي، چې هلته تعریف نه وي ؟

- اودا کار که کدونکی وي ، څنګه کیدی شي؟

بیلګه ۲: تابع $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوې.

د تابع جدول او ګراف وکاږئ.

x له ښۍ لورې څخه1ته نږدې کیږي x له کینې لورې 1 ته نږدې کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0.98	0.99	0.999		1.001	1.01	1.02
f(x)	1.98	1.99	1.999		2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

د f(x) تابع حرکت تر بحث لاندې ونیسئ که x و 1 ته نږدې شي یعنې $x \to 1$. له دواړو یعنې له ګراف او جدول څخه دا پایله لرو، چې f(x) د حقیقي عدد 2 په لور هڅیږي، یعنې: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$	خبره کښل کیږي

له پورته شکل څرګندیږي: تابع په هغه ټکي کې چې لیمیټ یې شمیرل شوی، تعریف نه ده.

شمیرنیزه بښوونه: که یوه تابع په صورت او مخرج کې داړونده قیمت لپاره صفر ولري او دا صفرځایونه له منځه تللی شي- لکه زموږ په بیلګه کې- نو د لیمیټ یا بولې پیدا کولو لپاره داسې مخ ته ځو:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

او وایو چې دا ډول تابع په صفر ځای کې تشیا (خالیګاه) لري یعنې په دې ځای کې تعریف نه ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

د سرک ښی لورې ته دا مخامخ تخته لرو:

- ووایئ، چې دا تخته څه مفهوم لري؟

په همدې توګه د سرک په سر کیڼي لورې ته هم همداسې یوه تخته ځړول شوې. دا هم په همغه مفهوم.

دا پوښتنه مو دې لاندې روښانه ونې ته لاښودوي:

بیلګه ۳: د $x \neq 0$ ، $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ تابع راکړ شوې.

1- تابع ولیکئ، بې له دې، چې د مطلقه قیمت نښه | | استعمال کړئ.

2- د تابع ګراف وکاږئ.

3- که x له ښی لورې 1 ته نږدې شي، نو د f(x) قیمت پیدا کړئ.

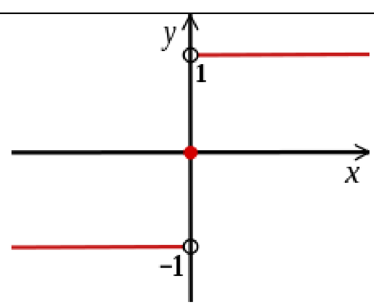
4- که x له کیڼې لورې -1 ته نږدې شي، نو د f(x) قیمت پیدا کړئ.

5- وښایاست چې پورته تابع یعنې f(x) څو حدونه لري.

ښوونه: 1-تابع بې له سمبول ،، ،، | | په لاندې ډول لیکو

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2- د تابع ګراف انځوروو: مخامخ



(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که x له ښي لور 1ته نږدې شي، نود لرو:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1$$

4- کهx له کيڼې لور 1- ته نزدې شي، نو دf(x) ليميټ دی: $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$

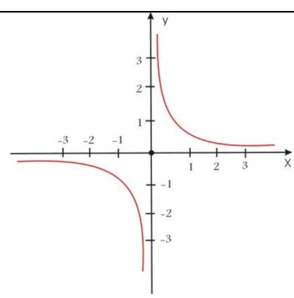
5- ګورو چې که x دوه قيمتونو 1 او1- ته نږدې شي، نو f(x) دوه د ليميټ قيمتونه لري يعني $\lim_{x\to \pm 1} f(x) = \pm 1$، نو له دې امله f(x) ليميټ نه لري.

له پورته بيلګې پايله:

په پورته بيلګه کې د$x \to -1$ لپاره تابع ښی ليميټ لري او د $x \to 1$ لپاره کيڼ ليميټ لري.

د دې لپاره دې د ګراف پورته کښل شوی شکل هم وکتل شي.

بيلګه۴: $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع لرو، چې $x \neq 0$ دی
د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع په x=0 ځای کې ارزښت نه شي نيولی، يعني په x=0 کې تعريف نه لري. دا تابع په صفرځای کې قطب(Pol) لري. مخامخ شکل دې وکتل شي.



يادونه: هغه تابع، چې مخرج يې صفر وي او صورت يې صفر نه وي، وايو چې تابع په دې د مخرج په صفرځای کې قطب Pol لري.

$x=0$ته د نږدې کېدو لپاره ترادف $(x_n)=\frac{1}{n}$، ټاکو.

د اړوندې تابع د قيمتونوترادف $n = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = (x_n)$دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د $n>0$ لپاره یو نامحدود صعودي(جګېدونکی) ترادف دی.
او د $n<0$ لپاره نزولي- یا متناقص(ټیټېدونکی) ترادف دی.
دا په دې معنا، چې د f(x) تابع په صفرځای کې لیمیټ نه لري. دا هلته یو قطب لري.

د توابعو د لیمیټ لپاره دا لاندې پایله لرو:
د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو کیڼ اړخیز لیمیټ $a_l=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 کیڼ لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅیږي.

په ورته توګه ښی اړخیزه لیمیټ: د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو ښی اړخیز لیمیټ $a_r=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 ښي لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅیږي..

که تابع f(x) همغه لیمیټ L ولري که x له ښی اویا کیڼي لورې و c ته نږدې شي، نو **لیمیټ** شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې لیکو: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$

تمرینونه :

د دې لاندې هرې تابع (پېژند ورشو(د تعریف ناحیه) domain اوارزښت ورشو(د قېمتونو ناحیه)) range یا codomainپیدا کړئ. د توابعو ګراف وکاږئ او حدونه (پولې) یې پیداکړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -1}(x^2+x)\quad,\ 2)\ \lim_{x\to 4}(x^2+x)\quad,\ 3)\ \lim_{x\to 0}|x|\quad,\ 4)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{x}$$

$$5)\ \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2}{x}}\quad,\qquad 6)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad,\ 7)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^9-9}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim_{x\to -1} f(x)$ پیدا کړئ.

۱. ۲ د لیمیټونو یا پوله ارزښت خویونه:

" Properties of Limits "

پوهیږو: په ریاضیاتو کې ټول توابع چې لرو، د ساده توابعو ترکیب combination دی، لکه دتوابعو جمع، تفریق، ضرب، وېش (چې مخرج یې صفر نه وي) او زنځیرونه compositon . موږ دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = x$ لرو.که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x.x = x^2$ او داسې نور.

وبه ګورو،چې دلته هم ټولې څلور عملیې همداسې اجراکیږي، لکه د اعدادو په ترادفونوکې.

فعالیت:

په دې برخه کې د په خوښه د ثابتو توابعواو کټمټ یا ایدنتیک توابعو Identity function لیمیټونه د جمعې، تفریق، ضرب او همداسې د ویش(چې مخرج یې صفر نه وي) له لارې وشمیرئ (وروسته به وګورو، چې دا د لیمیټ خویونو تر نامه څېړل کیږي).

- د په خوښه یوه پولینوم تابعو لیمیټ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $f(x) = x$ او $g(x) = x - 2$ توابعوڅخه کار واخلئ، چې درې نورې په خوښه توابع ترې لاس ته راوړئ. د دې توابعو لیمیټونه پیداکړئ. دا لیمیټونه جمع ، تفریق، ضرب او تقسیم(چې مخرج صفر نه وي) کړئ.

- که شوني شي، چې د یوې تابع لیمیټ د تابع له حل څخه لاس ته راوړلای شو، یعنې که د بیلګې په توګه ولرو: $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3$ نودا تابع به څنګه لیکو؟

- ایا د پورته عملیې په څیر دا عملیه د هرې ثابتې او کثمت تابع لپاره ریښتونې ده؟

موږ له پورته څخه دا لاندې پایله لرو:

که $f(x) = x$ او $g(x) = 2$ ولرو، نو لرو: $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 , \lim_{x\to 1} g(x) = 2$

2- که $h(x) = f(x) + g(x)$ وي، نو لرو: $h(x) = x + 2$

3- د h(x) ګراف وکاږئ.

4- د تابع لیمیټ د جدول له لارې

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

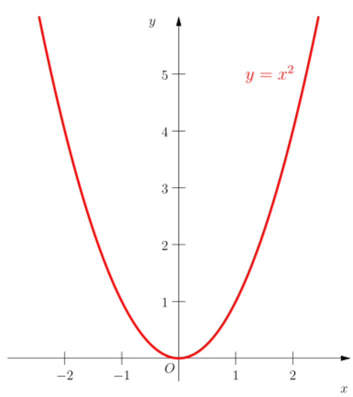
په یاد ولرئ: $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$ او $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$

له پورته څخه د لیمیټ لومړی خوي لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لیمیټ د جمعي خوې: د د وه یا څو توابعو د جمعي لیمیټ د همغو اعدادو د لیمیټ د جمعي سره برابر دی: $\lim_{x\to1} h(x)=\lim_{x\to1} f(x)+\lim_{x\to1} g(x)$

دویم: د لیمیټ د تفریق خوي: دا د پورته سره ورته حل لري. دا کار دې ګران زده کوونکي سرته ورسوي.

بیلګه ۱: که $g(x)=x^2$ او $f(x)=x$ وي، نو پیدا کړی: $f(x)\cdot f(x)=g(x)$ ب) د تابع شکل وکاږئ: پ) پیدا کړی: $\lim_{x\to2} f(x)$ ت) پیدا کوی: $\lim_{x\to2} g(x)$	

حل: الف) $f(x)\cdot f(x)=x\cdot x=x^2=g(x)$

ب)

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

پ) $\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2} x=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) له ګراف څخه لاس ته راځي: $\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2} x^2=4$

له دې امله لرو: $\lim_{x\to 2} x^2=\lim_{x\to 2}(x\cdot x)=\lim_{x\to 2} x\cdot\lim_{x\to 2} x=2\cdot 2=4$

له پورته بیلګې څخه دا پایله لرو:

دریم: د لیمیټ د ضرب خوي:

د دوه یا ډیرو توابع د ضرب لیمیټ د هغو توابعو د لیمیټونو د ضرب سره برابر دی.

$$\lim_{x\to a} x^2=\lim_{x\to a}(x\cdot x)=\lim_{x\to a} x\cdot\lim_{x\to a} x=a\cdot a=a^2$$

بیلګه:

که $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ وي، دا لاندې لیمیټونه پیدا کړئ:

$a)\ \lim_{x\to -1} f(x)\ ,\ \lim_{x\to -1} g(x)$ $\qquad b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot\lim_{x\to -1} g(x)$

$c)\ h(x)=g(x)\cdot f(x)$ $\qquad d)\ \lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(x)=-1$

پیدا کړئ: $\lim_{x\to -1} h(x)$

حل:a $a)\ f(x)\cdot f(x)=x\cdot x=x^2=g(x)\ \Rightarrow \lim_{x\to -1} x^2=1$

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x) = -1\cdot 1 = -1 \ \Rightarrow \ \lim_{x\to -1} x^2 = 1$$

$$c)\ h(x) = x^2\cdot x = x^3 \quad , \ d)\ \lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} x^3 = -1$$

بیلګه:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ تابع لرو، $\lim_{x\to 3} f(x)$ پیدا کړئ.

حل: $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی.

که x و3 ته نږدې شي کیدای شي لیمیټ د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\cdot 3 + 5}{2\cdot 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

له پورته بیلګې څخه لاندې لاس ته راځي:

څلورم: د لیمیټ د ویش خوي(مخرج د صفر سره برابر نه دی):

دیوې کسرې تابع لیمیټ(یعنې یوه تابع، چې د دوه توابعو له وېش(مخرج له صفر سره
برابر نه

دی) څخه لاس ته راغلې وي) د تابع د صورت لیمیټ او د مخرج لیمیټ (مخرج له صفر
سره

نابرابر دی) د وېش سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $g(x)=\sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پیدا کړئ.

$$a)\ \lim_{x\to 2} g(x)\ \ ,\ b)\ \lim_{x\to -1} g(x)\ ,\ c)\ \lim_{x\to 3} g(x)$$

حل: په لاندې توګه مخ ته ځو:

الف)

$$\lim_{x\to 2} g(x)=1$$
$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)}=\sqrt{1}=1$$

ب) له ګراف څخه: $\lim_{x\to -1} g(x)=2$

یادونه: $\lim_{x\to -1}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)}=2\sqrt{4}$

$$c)\ \lim_{x\to 3^-} g(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)}=\sqrt{0}=0$$

(د $f(x)\geq 0$ لپاره او د ټولو x قیمتونولپاره، چې c ته نږدې کیږي).

له پورته څخه لاس ته راوړنه:

پنځم: د لیمیټ د جذر (ریښې)خوې: د یوې تابع چې د جذر (ریښې) لاندې وي لیمیټ برابر دی، که چیرې تابع او لیمیټ دواړه د جذر لاندې ونیول شي.

پوښتنه: که $\lim_{x\to -2} f(x)=3$ وي، نو $\lim_{x\to -2}(f(x))^n$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: د یوه پولینوم حد تیک داسي شمیرل کیږي، لکه د یوې تابع حد. د مخه مو وویل،چي یو پولینوم د ساده توابعو د مختلو نښلونو څخه لاس ته راځي.

تمرینونه.

که $\lim_{x\to4} h(x)=-2$, $\lim_{x\to4} g(x)=0$ او $\lim_{x\to4} f(x)=5$ وي، نو پیدا کړئ:

$$1)\ \lim_{x\to4}(f+g)(x)\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)\quad,\quad 3)\ \lim_{x\to4}(fg)(x)$$

$$4)\ \lim_{x\to4}(h(x))\quad,\quad 5)\ \lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)\quad,\quad 6)\ \lim_{x\to4}(2h-3g)(x)$$

$$7)\ \lim_{x\to4}(f\cdot h(x)\quad,\quad 8)\ \lim_{x\to4}\left(\frac{2h}{3f-g}\right)(x)\ ,\quad 9)\ \lim_{x\to4}(h(x)+f^{2}(x))$$

$$10)\ \lim_{x\to2}(6x^{3}-2x+5x-3)\quad,\quad 11)\ \lim_{x\to-2}\frac{3x-2}{x^{2}+1}$$

د کسري - یا ماتو توابعو لیمیټ" Lmit of Rational functions

موږ د پولینومونو دا لاندې ویش لرو:

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{a_nx^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{b_mx^{m}+b_{n-1}x^{m-1}+...+b_0};P_m\neq0$$

او د لیمیټ په هکله یې فکر کوو، چې د $b_0\neq0$ سره $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

موږ پولينوم $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ لرو. ددې پولينوم ليميټ دx د مختلفو قيمتونو لپاره څنگه پيداکولای شو؟

- که $x \to 0$ د صفر په لورې لاړ شي يا صفر ته ورنږدې شي.

- که $x \to 1$ يوه ټاکلي عدد ته ور نږدې شي.

- که $x \to \infty$ د ناپای په لورې لاړ شي.

-که د دريمې درجې پولينوم $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 3$ ولرو، نو ددې پولينوم ليميټ دځلورو په خوښه قيمتونو لپاره پيداکړئ.

پوهيږو، چې د پولينومي توابعو ليميټ د ورکړل شوو x قيمتونو لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعې، تفريق،ضرب او وېش(چې مخرج صفر نه وي) په څېر ورکړل شوي دي، شمېرلای شو. غواړو د ناطقو توابعويا کسري توابعو ليميټ پيداکړو.

د ناطقو توابعو د ليميټونوشميرلو لپاره،که شته وي، له مختلفو لاروڅخه کار اخلو:

که ولرو: $\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$، نو د تابع خويونه د $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ لپاره ساده کوو او د پورته پولينوم وېش، چې کسري تابع ده، ليميټ شميرو.

فعاليت: که $\frac{x^2-4}{x+2}$ ولرود $x \neq -2$ سره.

- ددې تابع حد د$x -> -2$ لپاره پيدا کړئ.

- ددې تابع حد د $x \to 1$ لپاره پيدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ددې تابع حد د $x \to -1$ لپاره پیدا کړئ

- د تابع پیژندورشو ولیکی!

- دا تابع څنګه ساده کولی شئ، چې پوله یې د $x \to -2$ لپاره وشمیرلی شو؟

د پورته فعالیت په بنسټ کولای شو، چې دکسري توابعو حدونه د مختلفو اعدادو لپاره پیداکړو او همداسې یوه کسري تابع که شوني وي، هغه ځایونو ته ورنږدې هم پیدا کړو، په کومو کې چې تابع تعریف نه وي.

ددې موضوع د روښانولو لپاره د مختلفو کسري توابعو څو بیلګې راوړو:

بیلګه ۱:

پیداکړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x+2}$ که $x=1$ وي. دا تابع تعریف ده او لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

که $x=1$ ځای په ځای کړو(Substitue) نو لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

بیلګه ۲: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x+3}$

حل: دا چې تابع په $x=0$ کې تعریف ده، نو لرو: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x+3}=\dfrac{0-1}{0+3}=-\dfrac{1}{3}$

بیلګه ۳: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: دا چې تابع په $x=1$ کې تعريف ده، نو لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

که په يوه ځای يا عدد کې تابع تعريف نه لري، نو د مختلفو لارو يا متودونو څخه کار اخلو، چې ليميټ يې پيداکړو، که شته وي.

بيلګه ۴: پيداکړئ: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل: دا چې $f(x)$ تابع په $x=2$ چې تعريف نه لري، نو حد د تابع د حل له لارې نه شي پيداکيدای. داکيدای شي داسې پيدا کړو، چې د تابع صورت په ضريبونو تجزيه کړو.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}$$

د تابع ليميټ که x و 2 ته نږدې شي، دا مانا لري، چې $x\neq 2$ دی.

دا کسري تابع و $\lim_{x\to 2}(x-4)$ رالنډېږي او لاندې ليميټ لري:

$$\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

بيلګه ۵: پيداکړئ: $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګورو، چې تابع په $x=16$ کې تعريف نه لري يعني بايد $x\neq 16$ وي.

په ياد ولرئ چې: $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ او $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ يو د بل مزدوج دي.

حل: د پورته تابع صورت او مخرج د $\sqrt{x}-4$ له مزدوج $\sqrt{x}+4$ سره ضرب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

بیلګه ۶: پيدا کړئ: $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل: تابع په $x=3$ کې تعريف نه لري، نو مخرج او صورت د مخرج په مزدوج ضربوو اولرو:

$$\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$
$$=\lim_{x\to3}-1(\sqrt{x+1}+2)$$
$$=\lim_{x\to3}-(\sqrt{3+1}+2=-4$$

بیلګه ۷:

پيدا کړئ: $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل: تابع په $x=1$ کې تعريف نه لري، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)}=\frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$=\frac{10}{-2}=-5$$

د کلاسيک لارې د کسري اعدادو لیمیټ:

اوس یوه بله تابع د څیړنې لاندې نیسو، چې $g(x)$ یې بولو: $g(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

دلته هم دا پوښتنه کوو، چې که $x=1$ ځای ته نږدې شي، نو د $g(x)$ تابع د تابع کوم قیمتونه غوره کوي: موږ

بیا هغه ځای په پام کې نیسو، چې $x=1$ د مخ لورې(کینې لورې) ته خورا نږدې پروت وي او هغه ځای، چې د $x=1$ وروسته یا ښۍ لورې ته خورا نږدې پروت وي:

$$g(1-h)=\frac{(1-h)^2+(1-h)-2}{(1-h)-1}$$

$$=\frac{(1-2h+h)^2+(1-h)-2}{-h}=\frac{-3h+h^2}{-h}=3-h$$

$$g(1+h)=\frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{(1+h)-1}$$

$$=\frac{(1+2h+h)^2+(1+h)-2}{h}=\frac{-3h+h^2}{h}=3+h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دواړه لاس ته راوړنې یا پایلې اوس داسې تشریح کوو:

که h ناپای کوچنی وټاکو، یعنې هغه ځایونه راونیسو چې $x=1$ ځای ته ناپای نږدې پراته وي، نو د تابع ارزښتونه به هم و 3 ته ناپاي نږدې پراته وي. عدد 3 د $x=1$ ځای لپاره د $g(x)$ تابع د حد قیمت دی. ددې لپاره لیکو: $\lim_{x\to1} g(x)=3$

تمرینونه:

د لاندې معادلو حدونه پیدا کړئ، که شته وي.

1) $\lim_{x\to2}(6x^3-2x^2+5x+3)$ 2) $\lim_{x\to-1}(x^7+2x-5)$

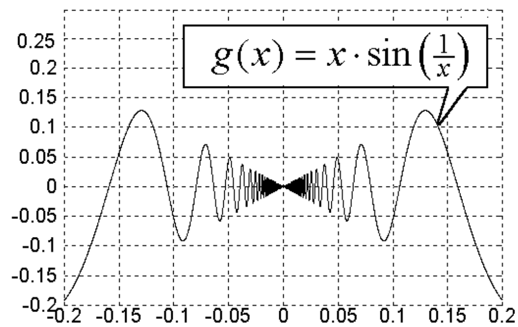
3) $\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^2-4}{x}$ 4) $\lim_{x\to0}\frac{5x^2+7x}{(2x-3)^2-9}$

5) $\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}$ 6) $\lim_{x\to4}(\frac{1}{x}-\frac{1}{4})(\frac{1}{x-4})$

7) $\lim_{x\to2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}$ 8) $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو حدونه Limit of trigometric function



فعاليت:

_ دساين پوله يعني $\lim\limits_{x \to a} \sin x$ د x د مختلفوقيمتونولپاره پيدا کړئ،که $x \in [0; 2\pi]$ وي:

_ که $x \to 0$ وي. _ که $x \to 30$ وي. _ که $x \to 45$ وي._ که $x \to 60$ وي.

_ که $x \to 90$ وي.- که $x \to 135$ وي.- که $x \to 270$ وي._ که $x -> 2\pi$ وي.

- د پورته ورکړشوو قيمتونولپاره د کوساين $\cos x$ ليميټ پيدا کړئ.

قضيه: که x په راديان ورکړ شوی وي، نو $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ دی.

ښوونه: د x=0 لپاره تابع $\frac{\sin x}{x}$ تعريف نه لري او ناټاکلي بڼه $\frac{0}{0}$ لري.

موږ غواړو، د $x \to 0$ او $\frac{\sin x}{x}$ لپاره په لاندې ډول يو جدول وليکو(په پورته مساوات کې x په راديان اندازه کيږي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

x		$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
په درجه	په رادیان		
10°	0.1745	0.1736	0.9948
5°	0.0873	0.0872	0.9988
3°	0.05235	0.05233	0.9996
1°	0.0174532	0.0174524	0.9995
30'	0.00872664	0.00872653	0.99999
6'	0.00174532	0.00174532	≈ 1
3'	0.00087266	0.00087266	≈ 1
1'	0.000291	0.000291	≈ 1
. . .	. . .	. . .	. . .

په پورته جدول کې گورو، چه د x لپاره $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ قیمت غوره کوي.

په شمیرنیزه توگه د $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ښوونه په لاندې ډول مخ ته بیایو:

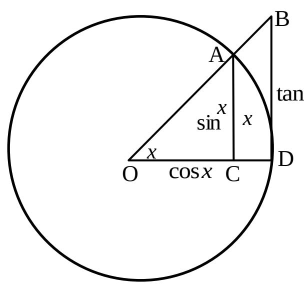
یوه دایره په پام کې نیسو چې د هغې مرکز (0) اوشعاع یې OD او 1 ده $\overline{OA}=\overline{OD}=1$ (لاندې شکل وگورئ). دA له ټکی څخه پر $\overline{OD}$ یو عمود رسموو، چې دا وړانگه پهC ټکي کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د D په ټکي باندې پر دايرې يو مماس رسموو، دامماس له $\overline{OA}$ څخه غځيدلي کرښه د B په ټکي کې غوڅوي.

اوس A د D سره ترو:

موږ لرو :



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

دا چې x په راديان اندازه کيږي، نو لرو: $\overset{\frown}{AD} = x$

له پورته شکل څخه لاندې نا مساوات لرو: $\overset{\Delta}{OBD} > \overset{\angle}{AOD} > \overset{\Delta}{AOC}$

همداسې لرو:

$$\frac{1}{2}\cos x.\sin x < \frac{1}{2}\overline{OD^2}.x < \frac{1}{2}\overline{OD}.\tan x$$

په پورته نامساواتو کې $\overline{OD} = 1$ دی او د نامساواتو ټولې خواوې په دوو کې ضربوو، نو لرو: $\cos x.\sin x < x < \tan x$

يا په همدې ډول ليکلای شو: $\cos x.\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$

که د پورته نامساواتو ټولې خواوې پر $\sin x$ وويشو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

یا:
$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0} \cos x$$

دا چې د $x \to 0^+$ لپاره $\cos x \to 1$ دی، نو لرو:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

ګورو چې په عین وخت کې $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ له1 لوی او هم له یو 1 کوچنی دی، نو له دې نامساواتو څخه دا لاندې مساوات لرو: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

پام: که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو، نو دا لاندې ترې لاس ته راځي:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته دواړو مساواتو څخه غوښتنه لاس ته راځي:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

بیلګه ۱: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x = \alpha$ اوکه $x \to 0$ وي، نو $\alpha \to 0$ او $\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ لرو.

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

بیلګه ۲:

وښایاست $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي او $x \to 0$، نو $y -> 0$ هم لرو:

$$\frac{\sin 5x}{5x} \quad \frac{5}{2} = \frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} \quad \frac{5}{2} = \frac{\sin 5x}{2x}$$

$$= \frac{5}{2} \frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}\,\frac{5}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$$

تمرينونه: دا لاندې غوره قضيه وښاياست.

که x په راديان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ او لاندې اجرات وکړئ:

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو وليکئ.

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو و ليکئ.

پ) دپورته قضيې ليميټ پيدا کړئ.

ت) ايا قضيه رښتيا ده؟

لاندې ليميټونه (حدونه)وشمېرئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}\ ,\ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x},\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}\ ,$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}\ ,\ 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}\ ,\ 6)\ \lim_{x\to 0}\sin 5x\ \cos 3$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}\ ,\ 8)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}+\sin^2 x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیټ

د $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x) \neq 0$ کسري توابعو لپاره مو لیمیټونه وشمیرل، چې x په خوښه وو.

اوس $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x) \neq 0$ لپاره لیمیټونه غواړو و شمیرو، که $x \to \pm\infty$ وي.

فعالیت:
زده کوونکي دې د هرې لاندې تابع د حد له شمېرلو د مخه، د توابعو ګرافونه انځور کړي او په ګرافونو کې دې یې دې ته پام وي،چې دا څنګه په تعریف شوې ورشوې کې ځغلي.

لومړی: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x-2}$ پیدا کړئ.

د 5 وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یعنې $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.

ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

دویم: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{x+1}$ پیدا کړئ.

د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.

ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

دریم: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x^2-2x}$ پیدا کړئ.

په مخرج کې یوازې x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیږي.که 5 په یوه ډېر لوی مثبت عدد وویشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې

لاس ته راځي، یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}=\frac{5}{+\infty}=0^+$

ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y=0$ لري، یوازې له پورته لور ور نږدې کېدنې سره.

څلورم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت کیږي.د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی

مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}=\frac{-3}{+\infty}=0^-$.

ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y=0$ لري، یوازې له کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

د پرېښودنې- یا ترې صرفنظر کونې یا له ترې تیرېدنې اصول:

لومړی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

په صورت کې د x جګعدد(توان؟)، په مخرج کې د x^2 توان په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي. که 1 په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد وویشل شي، نو

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$ ترې لاس ته راځي.

(څیره G_f پروت ګاونډ(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنزدې کیږي.

دویم: غواړو د $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}$ تابع حل پیدا کړو.

حل: په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیولو او له ټولو ثابتو تریږو(صرفنظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول حدونه$\pm\infty$

لاس ته راځي یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$.

شکل G_f مائله اسیمپټوت راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د 1 په اندازه ستره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$ پیدا کړئ.

په صورت او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تیرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه $\dfrac{2}{3}$-راکوي

یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2}{3}=-\dfrac{2}{3}$

شکل G_f پرته اسیمپټوت راکوي، چې $y=-2/3$ ده.

څلورم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}$ پیداکړئ

په صورت کې له x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تیرېږو. که -2 په $\pm\infty$ ووېشل شي، نو یو کوچنی مثبت یا منفي عدد یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2}{3x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2}{3x}=\dfrac{-2}{\pm\infty}=0^{\pm}$ ترې لاس ته راځي.

شکل(څیره) G_f یو پروت اسیمتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته لور ورنږدې کیږي.

شمیرنیز حلونه(د شمیرنې له لارې حل):

اول: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x^2-2}$ وشمیرئ.

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(لینده کیو یاقوسونو) راوستنې او بیا د x^2 سره لنډونې وروسته مخرج د 1 په لور ځي او صورت دصفر په لور، یعنې صورت ترمونه صفر ته نزدې کیږي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل G_f یوه مایله اسیومپټوت(مجانب) لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په 1 کوچنۍ ده.

دویم: وشمیرئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x یعنې x^4 له نوکانو یا لیندکیوبهر نیسو او بیا په ترتیب شمیرنیزه عملیه مخ ته بیایو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټولیز خویونه:

بیلګه۱: پیداکړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

په پورته بیلګه کې داسې مخ ته تللي یو،چې په صورت کې له ټولو عددونو څخه تیرېږو، چې د خپلواکې متحولې توان له 1 کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو هغو خپلواک متحولو تیرېږو، چې توان یې له 2 څخه کوچنی وي.. ګورو، چې په صورت کې x له کوم ضریب سره پاتې کیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناپای په لور ځي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

بیلګه ۲: پیدا کړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2}$

په پورته بیلګه کې په صورت کې له 1 او مخرج کې له 2 څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو. لاس ته راوړنه یې د x په یوه ثابت عدد وېشل دي. چې د $x\to\infty$ سره تابع ± 0 ته ځي، یعنې: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2}=0\pm$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۳: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$

په صورت کې له 2 او مخرج کې له $2x$ څخه تیرېږو او د x^2 سره یې لنډوو او په دې ډول لاندې پایله لرو: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=-\frac{2}{3}$

تمرینونه:

د لاندې تمرینونو حدونه د پورته ورکړشوو مختلفو لارو له لارې وشمیرئ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

متمادیت(ناپرېکیدنه)"Continuity"

د درس په دې برخه کې لولو ، چې یوه تابع په یوه ټکي یا یوه انټروال کې کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې ټوپ وهي، یا پرې کیږي او که یا په متمادي یعنې نه پرېکیدنې ډول د اینتروال په دننه کې ځغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ په دې موضوع د تابع متماديت څېړو او متماديت تعريفوو

فعاليت:

لاندې توابع لرو:

$$f(x)=x^2-1 \;,\; f(x)=\frac{1}{x} \;,\; f(x)=\frac{|x|}{x}$$

- د دې درې توابعو شکلونه وکاږئ.

- وګورئ، چې د توابعو ګرافونه څنګه ځغلي. په کومه تابع کې ګراف تړلی ځغلي او چرته ماتيږي، ټوپ وهي او ...

له پورته فعاليتونو څخه لاندې پايله لرو:

د توابعو متماديت Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د يوې تابع د متماديت په هکله څېړنه کوو او د متماديت پيژند(تعريف) ورکوو.

پيژند:

که b د f تابع تعريفورشو (- ساحه) کې يو حقيقي عدد وي. د f تابع په b متمادي بلل کيږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف داسې وکښلی شو، بې له دې چې د پنسل څوکه له کاغذ څخه پورته کړو.

له دې امله $f(x)=x^2-1$ تابع او $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع د $x=b$ په ټکي کې متمادي ده.

$f(x)=\frac{|x|}{x}$ تابع په $x=0$ متمادي نه ده ياني ټوپ وهي کيږي.(څيره په ۵ –م مخ کې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع په $x = a$ کې غیر متمادي ده، که پرې شي(تشیا ولري)، ټوپ ووهي او یا ماته شي.

لرو: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په $x = 0$ کې نشته یعنې تابع د $x = 0$ په ټکي کې متمادي نه ده.

بیلګه ۱:

که $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \quad x \geq 1 \\ 1-x & ; \quad x < 1 \end{cases}$ وي، نو:

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) پیدا کړئ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

پ) پیداکړئ: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

که تابع په $x = 3$ او $x = 1$ کې متمادي وي.

حل:

الف) ګراف دې د ګرانو لوستونک دنده وي.

ب)
$$\lim_{x\to 3} f(x) = (2x+1) = 7$$
$$f(3) = 7$$

پ)
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x+1) = 3$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0$$

د ب) او پ) له مخې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په $x=3$ ناپرېکيدونې او $x=1$ کې پرېکيدونکې ده.

بيلگه ۲:

که $f(x)=\begin{cases} \frac{x3+x}{x} & ; x\neq 0 \\ 3 & ; x=0 \end{cases}$ **وي.**

الف) فنکشن رسم کړئ

ب) و څیرئ، چې تابع په $x=2$ او $x=0$ کې متمادي ده او که نه؟

حل: الف) د تابع گراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	3	2	5

ب) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3+x}{x} = \lim_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f ليميټ شته او $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ دی، نو تابع متمادي دی که $x=2$ وي.

وي دې $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې معنا دا ده، چې $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ او په دې معنا دی، چې $f(0)=3$

دا دا معنا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

تابع په $x=0$ کې غيرمتمادي ده.

بيلګه۳: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x\neq -3$ وي.

ايا $f(x)$ تابع په $x=-3$ کې متمادي ده؟

حل: تابع $f(-3)$ تعريف نه لري، نوله دې

امله تابع په $x=-3$ کې متمادي نه ده.

له دې بيلګې او د تيرو درسونو څخه لرو:

تعريف (پيژند):

که f يوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اينتروال کې چې $x=c$ لري تعريف وي،نو د f تابع په $x=c$ کې متمادي بلل کيږي، که دا لاندې شرايط پوره وي:

1- که $f(x)$ تعريف وي.

2- که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي).

3- که $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ ربښتيا وي.

که تابع د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اينتروال (a,b) کې هم متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلگه ۴:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \; x\le 1\\ 4+x & ; \; x>1\end{cases}$ وي.

وګورئ، چې تابع چيرته متمادي او چيرته غيرمتمادي ده.

حل: په $x=1$ کې f تعريف لري

$$\begin{aligned}&f(x)=3\\&\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x^2+1)=3\\&\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(4+x)=5\\&\lim_{x\to -1} f(x)\ne \lim_{x\to -1} f(x)\end{aligned}$$

له دې امله تابع په$\mathrm{x}=1$ کې غيرمتمادي ده

بيلگه ۵:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \; x<2\\ 3 & ; \; x=2\\ x+3 & ; \; x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متماديت په $x=2$ کې وخيرئ.

حل: تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعريف لري او لرو $f(2)=3$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2^+} = \lim_{x\to 2^+}(x+3)=5\\&\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)\\&\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+1)=5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=5\end{aligned}$$

دا چې $f(x)=3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x\to 2} f(x)\ne f(2)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا دی، چې تابع په $x = 2$ کې غیرامتمادي ده.

بیلګه ۶:

که $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & ; \quad x \le \frac{\pi}{2} \\ ax^2 + \pi^2 & ; \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ وي، نو:

a داسې پیدا کړئ، چې f په $x = \frac{\pi}{2}$ کې متمادي وي.

حل: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = a\frac{\pi^4}{4} + \pi$

$f(x)$ متمادي ده، نو له دې څخه لاس ته راځي:

$$a \frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = 2$$

و

$$= \frac{a}{4}\pi^2 = 2 - \pi^2$$

$$a\pi^2 = 8 - 4\pi^2 \Rightarrow a = \frac{8}{\pi^2} - 4$$

تمرینونه:

1- یوه په خوښه تابع ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ او وګورئ، چې تابع چیرته تعریف ده او متمادیت یې وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې پوښتنو کې وڅیړئ، چې تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي یا غیرمتمادي دي.

2) $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \;;\; x = 3$ 3) $f(x) = \frac{x+3}{(x^2+2x-5} \;;\; x = -1$

4) $f(x)\frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;;\; x = -2$ 5) $f(x) = \frac{1}{(x-3^3)} \;;\; x = 3$

6) $f(x) = |x-3| \;;\; x = 3$ 7) $g(x) = \frac{|x|}{x} \;;\; x = 0$

د متمادي یا ناپرېکیدونکو توابعو خویونه

دلته دا خویونه همغه د لیمیټ خویونه دي.

فعالیت:

1- د f او g توابعو جمع پیداکړئ:

$(f+g)(x) = ...$

2- د f او g توابع په $x = 2$ کې متمادي دي، نو:

$\lim_{x\to a} f(x) = ...\;\; \& \;\; \lim_{x\to a} g(x) =$

3- د لیمیټ قیمتونه استعمال کړئ:

$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a}(f+g)(x)$

$= ....:...$

$= ....:... = (f+g)(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي ده.

که f او g توابع په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په $x=c$ کې متمادي ده.

1- د توابعو جمع $f+g$

2- د توابعو تفريق $f-g$

3- د توابعو ضرب $f \cdot g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}\ ;\ g \neq 0$

بيلګه۱:

که $f(x)=\sin x+1$ **او** $g(x)=x^2+3x-2$ **وي، نو:**

1- f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

2- وښيرئ، چې ايا

الف) $f(x)+g(x)=\sin x+x^2+3x-1$ او

ب) $(\sin x+1)(x^2+x^2+3x-1)$ په $x=1$ کې متمادي او که غيرمتمادي دي.

حل: $1)\ \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=\sin 1+1$

نو f په $x=1$ کې متمادي دی.

$$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=2$$

نو g په $x=1$ کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- الف):

$$a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$
$$= f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x=1$ کې متمادي ده.

ب) :

$$(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x)\cdot g(x)$$
$$= (f\cdot g)(x)$$

نو د متمادي توابعو ضرب په $x=1$ کې متمادي دی.

بیلګه ۲:

که $g(x) = 3x - 2$, $f(x) = x + 1$ وي، وښیئ، چې ایا $f(x)\cdot g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده.

حل:

له پورته ښخه لاس ته راځئ، چې $f(x)\cdot g(x)$ متمادي

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$$
$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$$

$f(x)\cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$ ده.

$$\lim_{x\to 2} f(x)\cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$
$$= \lim_{x\to 2} f(x)\cdot \lim_{x\to 2} g(x) = f(2)\cdot g(2) = 3.4 = 12$$

دکینې لورې بند انتروال په [a,b] کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي یا ښایي، هلته چې $f(a) \neq f(b)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ ګراف له $(b, f(b))$

ټکي ځخه نشي انځورېدلی تر څو افقي کرښه

$y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي.

له پورته څخه دا لاندې غوره جمله لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوk د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عددc د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی.

بیلګه ۳: که $f(x) = x^3 + 4x$, $x \in [1,2]$ وي، نو **وښایئ، چې یو** $c \in (1,2)$ **شته، داسې چې** $f(c) = 11$ **وي.**

حل: $f(x)$ یو پولینوم دی نو f په بند اینتروال [1,2] کې متمادي دی.

لاندې لرو:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 \quad ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$
$$5 < 11 < 16 \quad , \quad f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی.

بیلګه ۴:

که $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & ; \ -1 \le x < 2 \\ |x-10| & ; \ 2 \le x \le \mathbf{20} \end{cases}$ ي ، نو:

الف) وآزمایئ، چې تابع متمادي ده.

ب) وآزمایئ، چې یو $c \in (-1,20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2x+4 = 8$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 10-2 = 8$$

له دې امله لرو:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$$
$$f(x) = 10-2 = 8$$

گورو چې تابع په [-1, 20] کې متمادي ده.

$$b)\ f(-1)2x\ -1+4 = 2$$
$$f(20)|20-10| = 10 \ \Rightarrow\ f(-1) \neq f(20)$$

په دې اساس لرو: $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو: $c \in (-1, 20) : f(c) = 6$

$$2x+4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2)$$
$$|x-10| = 6$$
$$x-10 = 6 \ \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$
$$10-x = 6 \ \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$$

$$= 6 \qquad |x-10| \Rightarrow$$

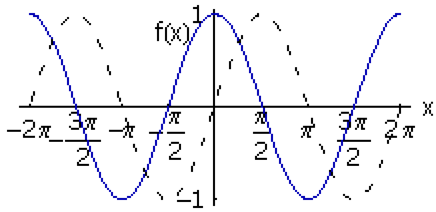
د c ارزښتونه 1, 4, 16 دي.

بیلګه ۵ :

که وي: $f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$ ، نو وښايي چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

نشاد دهید که $c\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ شته دی د کوم لپاره چې $f(c)=4$ او c پیدا کړی.

حل : تابع f د ساین تابع ددی ، نو له دې امله f متمادي دی. $f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$ $f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$ $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ مو، لرو : تابع fمتمادي دی او لرو: $1 < 4 < 5$	 ټکي ټکي د ساین ګراف دی. دا ګراف که په ۳ کې ضرب کړی او ۳ ورزیات کړي د بیلګې ګراف راکوي.

دا په دې معنا چې، که $c \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ موجود وي، د هغه لپاره $f(c) = 4$ صدق کوي.

که د دې لپاره c پیدا کړو ، نو په لاس راځي:

$$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$$

$$2\sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

له ګراف څخه واضح ایدل کیږي،، چې f په انتروا ل [a,b] کې متمادي دی، f(a) او f(b) متضادې علامې لري، نو c د منځنی ارزښت قضیې په بنسټ د f(a) او f(b) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ کې و $K=0$ ته لږ تر لږه یو C د a او b په منځ کې داسې شتون لري، چې له هغې نتیجه $f(c) = 0$ لاس ته راځي.

دا په دې معنا، چې $x=c$ د برابرون یا مساوات $f(x) = 0$ یو حل دی.

بیلګه۶ :

که $f(x) = x^3 + 5x - 23$ **وي، نو وښایئ،چې د f تابع د x -محور په اینټروال** (2.3) **کې غوڅوي.**

حل: f **پولینوم تابع ده ، نو f په اینټروال** [2,3] **کې متمادي دی.**

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$
$$f(3)3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

$f(2) \neq f(3)$ **او د متضادو مخنخښو(علامو) سره.**

له دې امله د $c \in (2,3)$ لپاره لرو چې $f(c) = 0$ دی.

لنډ: غیرمتمادي توابع هغه دي، چې په یو کوم ځای کې تعریف نه وي

تمرینونه:

وښایئ چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمادي ده.

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \qquad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x} \qquad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + 1}{(x+2)^3} \qquad ; \quad x = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- تشريح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غيرمتمادي ده؟

5- که $x\in[2,3]$, $f(x)=\frac{18}{x}+2$ وي، و ښايئ چې $c\in(2,3)$ شته داسې چې $f(c)=10$ وي او c پيدا کړئ.

6- وښايئ چې د لاندې مساوات لپاره يوحل شته:

$$x^3-4x+1=0 \quad ; \quad x\in[1,2]$$

7- وي دې: $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$; $f(x)=\sin x+\cos x$ وښايئ، چې مساوات $\sin x+\cos x=0$ په اينتروال $(\frac{\pi}{2},\pi)$ کې يو حل لري.

8- وي دې:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2 & ; \quad -1\le x\le 3\\ 13-2x & ; \quad 3<x\le 7\end{cases}$$

الف) ايا f په $x=0$ کې يو متمادي تابع دی؟

ب) $c\in(-1,7)$ داسې پيدا کړئ، چې $f(c)=0$ وي.

د لـــومړي څپـــرکي تولګه" Chapter Summary "

پيژند:

د $f(x)$ تابع يو ليميټ L لري، که x ترڅو يو حقيقي عدد c ته لاړ شي. په دې معنا چې $f(x)$ لپاره، چې ترڅوLته ځي دا دی، چې x ترڅو c ته لاړشي او داسې يې ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو کيڼ اړخيز ليميټ $a_l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ لري،
که د هر ترادف (x_n) لپاره، چېn غړي يې د x_0 کيڼ لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅيږي.

په ورته توګه ښی اړخيزه ليميټ:

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو ښی اړخيز ليميټ $a_r = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ لري،
که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 ښي لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅيږي..

که تابع f(x) همغه ليميټ L ولري که x له ښۍ اويا کيڼې لورې و c ته نږدې شي، نو ليميټ شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې ليکو: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

د پولې يا حد خويونه(خواص) :

که f او g توابع وي، c;Lاو M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$، نو دا په لاندې توګه ليکلی شو:

1) $\lim\limits_{x\to c} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim\limits_{x\to c} (f-g)(x) = \lim\limits_{x\to c} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim\limits_{x\to c} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \cdot M$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M};\ (M\neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$$

(د $f(x)\geq 0$ او د x د ټولو قیمتونو لپاره، چې c ته ور نږدې کیږي.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

پیژند: f دې یوه تابع وي او د ټولو x لپاره په یوه واز انتروال کې چې $x = c$ وي ،تعریف وي، نو وایو: f په $x = c$ کې متمادي دی، د لاندې شرایطو سره:

1) $f(x)$ تعریف لري 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دی

$$3)\ \lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

که تابع د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) ې متمادي ده.

تعریف یا پیژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال $[a, b]$ ې متمادي ده، که تابع له ښئ لورې په $x=a$ کې متمادي وي او له کیڼې لورې په $x=b$ کې او د واز انتروال (a, b) په هر قیمت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه(خواص): که f او g په $x=c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې هره یوه تابع په $x=c$ کې متمادي ده.

لومړی) د توابعو جمع یعني $f+g$ تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم) د توابع تفریق یعنې f-g تابع

دریم) د توابعو ضرب یعنی f.g

څلورم) د توابعو ویش یعنې $g(x) \neq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$

د منځني قیمت قضیه:

که تابع f په بند انټروال [a,b] کې متمادي وي او k د f(a) او f(b) ترمنځ یو عدد وي، نو لږ تر لږه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

د ځپرکي تمرینونه:

سم ځواب وټاکئ:

که $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ وي، نو $\lim_{x \to 2}(3x-20)(x+1)$ ی:

a) 5 b) -5 c) 4 d) 3

ب) پیدا کړئ $\lim_{x \to 1} \frac{x2+1}{x2+3x-2}$

a) 1 b) 2 c) 1 d) $\frac{1}{2}$

1- لیمیت پیداکړئ $\lim_{x \to 5} \frac{|x+5|}{x^2+3x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) 1 b) 5 c) -1 d) -5

2- $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ دی.

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

3- $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x}$ دی.

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

4- $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$ دی.

d) 1 c) 0 b) $\frac{5}{3}$ a) $-\frac{5}{3}$

5- $\lim_{x \to 1.4} [2x + 0.3]$ دی.

a) 1 b) 3 c) 0 d) نشته

6- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$ دی.

d) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ b) 0 a) 1

7- $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ دی.

d) 4 c) $\sqrt{2}$ b) 2 a) $2 + \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---------------------- --

-8 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin}{1+\cos 2x}$ دی.

a) 1　　b) $\frac{1}{2}$　　c) $\frac{1}{4}$　　d) 4

-9 لاندې توابع سره جمع کړئ.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5 \quad \& \quad \lim\limits_{x\to 3}(x) = -2$

-10 که $f(x) = x^2 + 1$ وي، پیداکړئ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

-11 تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - b & ; \quad x \le 3 \\ 10 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$ په $x = 3$ کې متمادي دی، b پیدا کړئ.

-12 وښایئ، چې تابع $f(x) = 3x^2 - x - 5$ په اینتروال $(1,2)$ کې حل لري.

۱۳ - د لاندې ۱ – ۹ توابعو لیمیتونه وشمېرئ.

1) $\lim\limits_{x\to -1} (x^2 + x)$　　2) $\lim\limits_{x\to 4} (x^2 + x)$　　3) $\lim\limits_{x\to -2} 2x + 3$

4) $\lim\limits_{x\to 0} |x|$　　5) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x}$　　6) $\lim\limits_{x\to 1} 7$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}}$　　8) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$　　9) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---------------------- --

۱٤-- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع گراف وکاږئ.

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ پيدا کړئ.

15: هغه توابع چې په يوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعريف نه لري ، څه بلل کيږي

16 پيدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

--17 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$ وشمېرئ.

--18

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \quad x<2\\ 3 & ; \quad x=2\\ x+3 & ; \quad x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متماديت په $x=2$ کې وڅېړئ.

۱۹- يوه په خوښه تابع وليکئ او د تابع گراف وکاږئ او وګورئ، چې تابع چېرته تعريف ده او متماديت يې وښاياست.

۲۰ - په لاندې له ۲ – ۷ پوښتنو کې څېړو، چې ايا تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي يا غيرمتمادي دي.

2) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \;;\; x=3$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5}\;;\; x=-1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5}\;;\; x=-2$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3^3)}\;;\; x=3$

6) $f(x)=|x-3|\;;\; x=3$

7) $g(x)=\dfrac{|x|}{x}\;;\; x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---------------------- --

۲۱- تشريح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غيرمتمادي ده؟

۲۲- که $f(x) = \dfrac{18}{x} + 2\ ,\ x \in [2,3]$ وي، و ښايئ چې $c \in (2,3)$ شته داسې چې $f(c) = 10$ وي او c پيدا کړئ.

۲۳- وښايئ چې د لاندې مساوات لپاره يوحل شته:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 \quad ; \quad x \in [1,2]$$

۲٤- وي دې: $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$; $f(x) = \sin x + \cos x$ وښايئ، چې مساوات $\sin x + \cos x = 0$ په اينتروال $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ کې يو حل لري.

۲۵ الف: وښيئ، چې ايا لاندې تابع د x_0 په ځاي کې مفمادي ده.

a) $f(x) = \begin{cases} -2x \\ \sqrt{x} \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \sin x \\ e^x \end{cases}$	$x_0 = 0$ د $x \le 0$ لپاره $x_0 = 0$ د $x > 0$ لپاره $x_0 = 0$ د $x \le 0$ لپاره $x_0 = 0$ د $x > 0$ لپاره	b) $f(x) = \begin{cases} 2 \\ x^2 + 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 \\ \ln x \end{cases}$	$x_0 = 1$ د $x \le 1$ لپاره $x_0 = 1$ د $x > 1$ لپاره $x_0 = 1$ د $x \le 1$ لپاره $x_0 = 1$ د $x > 1$ لپاره

۲٦-- که $f(x) = 2\sin x + 3\ ;\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ وي، نو وښايئ چې $c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ شته،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه لپاره چې رښتيا وي $f(c) = 4$ او c پيداکړئ.

۲۷: لاندې ليميټونه وشمېرئ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} \qquad \lim_{x\to 0} \sin 5x \cot 3x$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1} \qquad \lim_{x\to \pi} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$$

$$\lim_{x\to 1} (\cos^2 x + \sin^2 x) \qquad \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - 2x}{x}$$

20) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan 2x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^3+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

25) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$$

26) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}$$

27) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x(x-\frac{\pi}{4})}$$

28) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - x\cos 3x}{x}$$

29) $$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sin 3x - \sin 5x}$$

30) $$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x}$$

31) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x - 1}}{x}$$

32) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi}$$

33) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(3x-3)}{1-x^3}$$

34) $$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x}{\sin 2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه برخه: مشتق یا رابیلیدنه

په تیره برخه کې مو د پولې څیړنه وکړه. وبه ګورو، چې دا د پولې درس د مشتق یا رابیلیدنې لپاره اړیین دی.

د تابع منځ ارزښت تغیر Average rate of change

دلته دې د سالنګ یا ماهیپر د سړک خیره راشي.(دلته څېره راځي)

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو، تر څیړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه

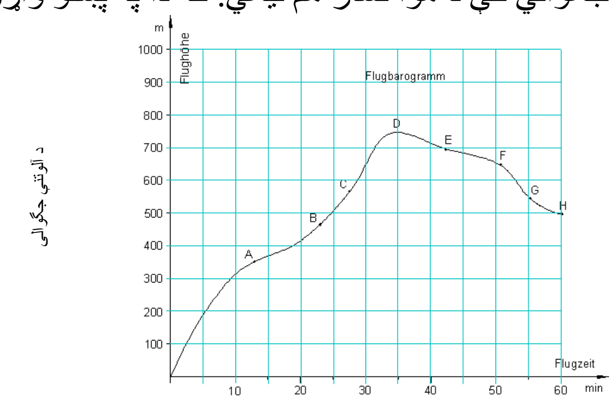
(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه يادښت په څير راوړم: كه له يوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغير منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږيږو ، نو موخه ترې په يوه ټكي يا دوه ټكو كې د تابع جګوالی، ميل اويا تانجنت دی او دا دريواړه كلمې د رياضياتو له مخې په همغه يوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې كمښتوېش يا د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

دې كلمو ته په انګريزي كې **slop** وايي، چې زموږ ادبيتو د ميل په نامه بلل كيږي.

په يوه ټكي كې د تابع د ګراف ميل(جګيدنه)

الوتكوكې د الوتنې دليک(الوتنليک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک كې يا د وخت تابعيت كې رسموي او په هر جګوالي كې د هوا فشار هم ليكي. كه دا په پښتو واړوو، نو د ليک بكس به ورته ووايو.



Flight barogramm

په پورته ګراف كې د يوې الوتكې د الوتنې د بيلا بيلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

فعاليتونه:

_ په پورته ځيره كې د ګراف جګوالی د A په ټكي كې د B ټكې سره پرتله كړئ. په ورته توګه دګراف ميل د E په ټكي كې د G ټكي سره پرتله كړئ.

_ روښانه كړئ، چې ولې په يوه ټكي كې بايد له جګوالي، ميل يا تانجنت څخه غږيږو؟

_ وهڅيږئ، چې په يوه ټكي كې د ګراف جګوالي لپاره يو متود تعريف كړئ او له انځور څخه د A او B په ټكو كې جګوالی وټاكئ.

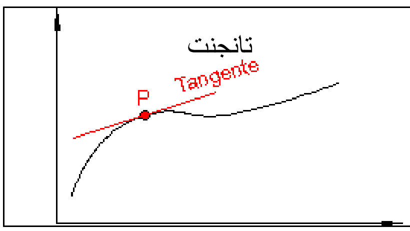
_ ايا فكر كوئ، چې پهB ټكي كې نسبت وA ټكي ته جګوالی زيات دی؟

_ ايا فكر كوئ، چې د E او G په ټكو كې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټكي كې د ارزښت له مخې جګوالی زيات دی نسبت د G ټكي ته؟

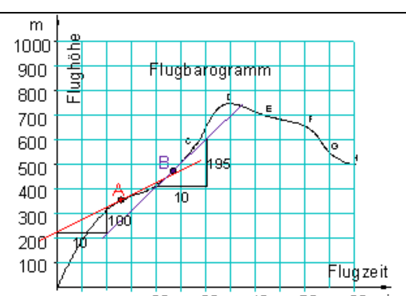
(c) ketabton.com: The Digital Library

_ ایا د یوې کربښې جګوالی او په همدې ترتیب د یوې منحني هرچیرته توپیر لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه:
ګورو، چې په یوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچیرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په ګوته کړو، چې هلته میل څېړل کیږي.
په لاندې بیلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده)کربښې میل هرچیرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کربښې د میل یا جګوالي څخه غږیږو.
بریښي چې لاندې پیژند یا تعریف عاقلانه دی.

(تعریف): د یوې تابع ګراف میل(جګوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د ګراف سره برابر دی.	

لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کربښې تعریف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپیریال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کیږي.
ددې پیژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه ګراف میل د یوې کربښې میل دی.
د ګراف د جګېدنې تاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر یوه کې یوه کربښه (تانجنت) انځورو، چې ګراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.
د میل یا جګېدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل یا ساده ډول شمیرل کیدی شي:
A په ټکي کې جګیدنه:

$\frac{100\,m}{10\min}=10\,\frac{m}{\min}$ د B په ټکي کې جګیدنه: $\frac{195\,m}{10\min}=15.5\,\frac{m}{\min}$	

زموږ د بیلګې لپاره میل یا جګیدنه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي(سملاسي) میل سرعت په معنا دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

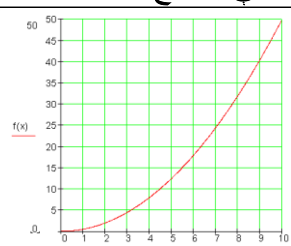
د A په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $12.5\,\text{min}$، د ميل ياجګيدنې چټکتيا (سرعت) نږدې $10\,\frac{m}{\text{min}}$ ده.

د B په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $23.0\,\text{min}$، د جګيدنې سرعت نږدې $19.5\,\frac{m}{\text{min}}$ دی.

تانجنت تر اوسه فقط د ليدنې له مخې تعريف شوی، چې د لمسټکي چاپيريال ته خورا ډېر نږدې کيږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف ميل د A او B په ټکو کې هم يواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

په يوه ټکي کې د تابع دګراف ميل (جګيدنه):
معلومه ده، چې يو ريلګاډی د تمځای ځخه له خوزېدو(حرکت) وروسته خپله چټکتيا(سرعت) په کراره کراره زياتوي. وهلی لار(د تمځای ځخه لرېوالی) تل زياتيږي. د تمځای ځخه لريوالی د چټکتيا يا سرعت په واک کې يا تابع دی.

عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلی شو.(مخامخ يا لاندې د تابع ګراف)
دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ټاکلې او ليکو: $S = f(x) = 0.5x^2$



فعاليت:
1- اوس دې منځنی تغير ارزښت Averagerat of change(منځنی ميل ارزښت) د 3 – مې او 7 – مې ثانيې ترمنځ وشمېرل شي.
2- ددې لپاره دې اړونده قاطع يا سيکانت انځور شي او د هغې جګوالی دې وشميرل شي.
3- اوس دې د تغير ارزښت(منځنی جګوالی) د 3 – مې او 7 – مې ثانيو ترمنځ وشميرل شي.
4- وښاياست، چې په دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا جګوالی څومره دی؟

کمښت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient

د يوې کرښې ميل يا جګيدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکيدی شي.
کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع(غوڅی seconce):

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

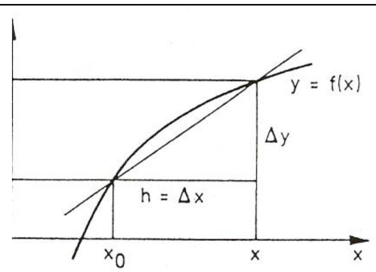
د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant):

دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمیرل کیږي.

په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(تعریف): د $y=f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمبنتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

 	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ $=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. د ا ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.

د کمبنت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمبنت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h}$$

$$= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h}$$

$$= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h}$$

$$= 6x + 3h - 5$$

تمرینونه:

1 - کمبنتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

2- د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2\ ,\ x_0 = 2$ $b)\ f(x) = 0.5x^2\ ,\ x_0 = 3$

د کمبنتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترمنځ توپیر څه دی؟

4 - د یوې تابع د سکانت(قاطع) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جګیدو لاندې څه پوهیږو؟ او د دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

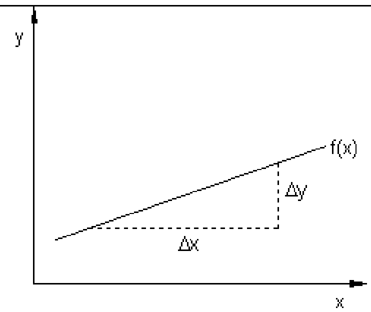
(c) ketabton.com: The Digital Library

رابیلیدنه یا مشتقشمیرنه **Diffrentialcaculation**

فعالیت:

پام وکړئ، لکه په یوه ثابت میل $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = constant$ کې، د بیلګې په توګه په خطي یا لاینیز تابع کې د $f(x) = a_1 x + a_0$ سره میل شته او که نه؟

_ پام وکړئ، چې دا میل به څه ځانګړي خویونه ولري؟ ایا جګیدنه به په هر ځای کې فرق ولري اوکه ثابت به وي؟



ایا په مختلفو وختونوکې اړین بولی، چې د تغیرحالت(د میل حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړئ؟

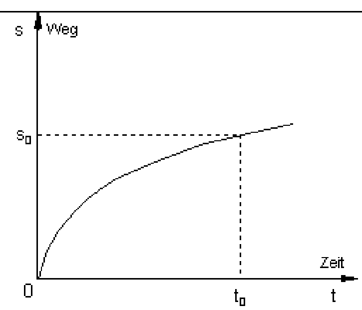
_ او یا له دې امله لحظوی چټکتیا(سرعت) $v(t_0)$ په لار- وخت- دیاګرام کې وڅیړئ؟

_ ایا د مشتق شمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي؟

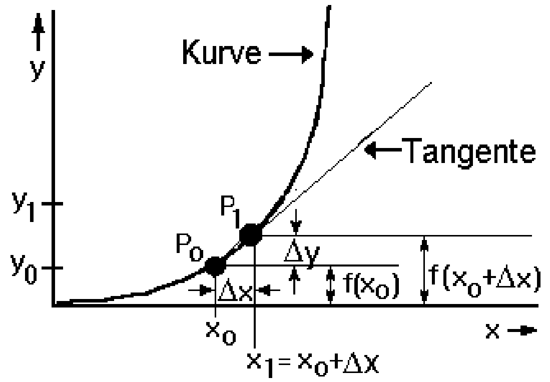
په پام کې نیولي لحظه $\hat{=}\ t_0$

دا تر دې وخت وهل شوې لار $\hat{=}\ s_0$

یادونه: مخامخ Zeit د وخت ا
و Weg د لار په معنا دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

	مشتقشمیرنه = د یوې منحني میل یا جګیدنه (Differential caculation تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.

د تانجنت جګیدنه: د تانجنت جګیدنه د قاطع د جګیدنې،، لیمت ،Limit,, یا حد دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

فعالیت:

1- له پورته خیرې او اړونده شننې څخه د مشتق لپاره څه فکر کوئ؟

2- د derivative (مشتق) کلمې لاندې څه پوهیږو؟

او دا په ساده پښتو څه معنی ورکوي؟

3- له کمښت وېش(د تفاضلونو ویش) څخه ځنګه و مشتق ته راځو؟ په دې هکله د پورته څېړې څخه په ګډه اخسلوخپل نظر ووایاست.

4- له 2 – م فعالیت څخه ووایاست، چې ولې دا شمېرنه رابیلېدنه یا مشتق بلل کېږي؟

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivative کلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو: derivative د رابیلیدنې په معنا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو.

: که د تابع دا کمښتویش(د تفاضل وېش) $x -> x_0$ او(همداسې) $x -> 0 \Leftrightarrow$ او یا په (همدې ډول) $h -> 0 \Leftrightarrow$ لپاره یو حد ولري, نو د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري او ددې لپاره لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};...$$

دا لیمیټ داسې ښایو: $(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x)$

د x_0 ځای کې د $y = f(x)$ له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بیلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوپش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0 \Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0 + \Delta x - 3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

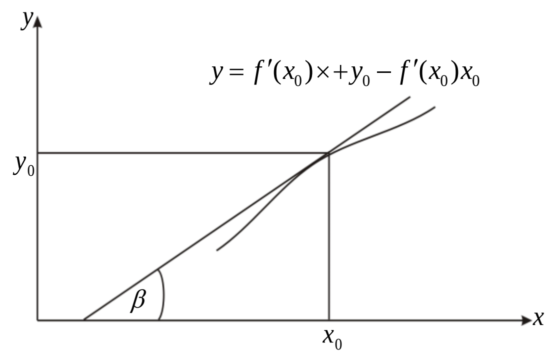
د دې لپاره دا لاندې تعریف(پیژند) ورکوو:

که یو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي، نو هغه لاندنی کرښه چې د (x_0, y_0) کې څخه تېرېږي او میل یا جګوالی یې $f'(x) = \tan \beta$ دې او په لاندې ډول لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f^{'}(x)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کې د ورکړ شوې منحني $y=f(x)$ تانجنت بلل کيږي(پرتله پورته کيڼ شکل)



موږ اوس د ځو بنستيزو توابعو مشتق شميرنه تر څيړنې لاندې نيسو.

بيلګه۱ :

د يوې ثابتې مشتق:

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت يې يوثابت دى.

ثابت $y=f(x)=c=Cons$ ، نو د هر x_0 ځاى لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

$$\Rightarrow(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}=f'(x_0)=0$$

بيلګه۲ :

يوه $f(x)=x$ خطي(کرښيزه) تابع لرو، د x_0 په ځاى کې غواړو د دې تابع مشتق پيدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-+x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1=\underline{\underline{1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ :
د $y=f(x)=c.u(x)$ ډوله تابع مشتق د c =ثابتې سره.

د ثابتې قانون:
د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې $= c$) سره ضر ب شوی وي. یعنې له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو: $f'(x)=c.u'(x)$ $\Rightarrow$

ثبوت:

$$\Rightarrow f(x_0)=c.u(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0} c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$

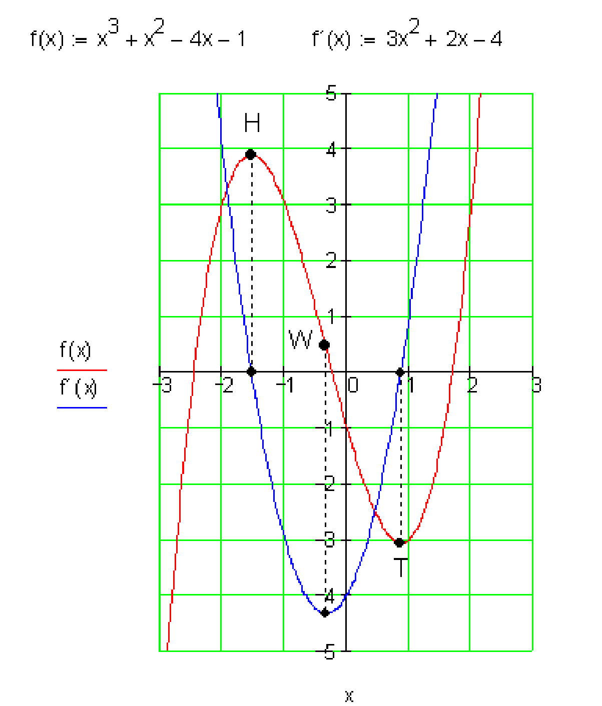
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=c\cdot u'(x_0)$$

تمرینونه:

1- د تفاضل وېش او د مشتق لاندې څه پوهېږو؟
2- د دوی ترمنځ څه اړیکې (پرتې) دي؟
3- د قاطع (سکانت) او تانجنت جګېدنې لاندې څه پوهېږو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع



شکل کې سره منحني تابع، شنه کرښهمنحني د تابع مشتق او وبه ګورو، چې له همدې امله د مشتق تابع هم ده.

فعاليت:

1- د x_0 په ځای کې د تابع مشتق يعنې څه؟

2- د يوې تابع له مشتق نيونې وروسته دې مشتق ته څه وو ايو؟

3- که د تابع مشتق د مشتق تابع ونومو، روښانه کړئ، چې ولې تابع ده او ددې تابع درجه، د لومړی تابع سره پرتله کړئ.؟

• ايا له دې توپير څخه د مشتق کلمه روښانه کولی شئ؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بيلګې څخه کار اخلو

بيلګه۱: تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي. غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتويش(د تفاضل وېش) پيداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = x_0:$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

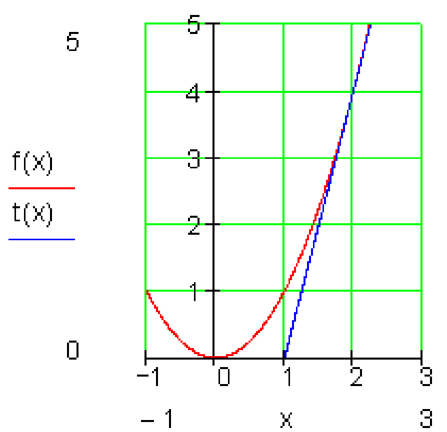
اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

	کیدی شي، د تابع د ګراف له لارې او ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 \mid y_0) = P_0(2 \mid 4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګیدنه لاس ته راوړو.

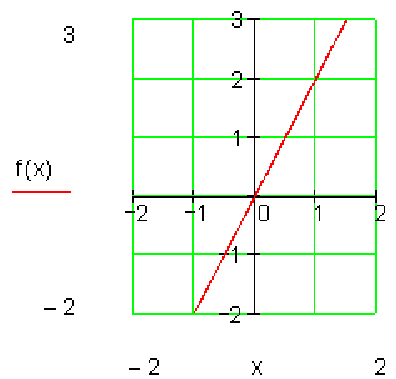
پورته بیلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

ګراف یوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي



پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته هم یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.
د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.

بیلګه ۲:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی وي.
فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0{}^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x_0^2$$

نو $f'(x_0) = 3x_0^2$ د $f(x) = x^3$ تابع مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $f'(x_0) = 3x_0^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳: یوه د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ورکړشوې.
غوښتنې یا ثبوت:

الف: د تابع ګراف په یاد راوړئ.

ب: په x_0 ټکي کې د تابع مشتق پیداکړئ.

پ: په x_0 ټکي کې د مشتق تابع هم پیدا کړئ.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$

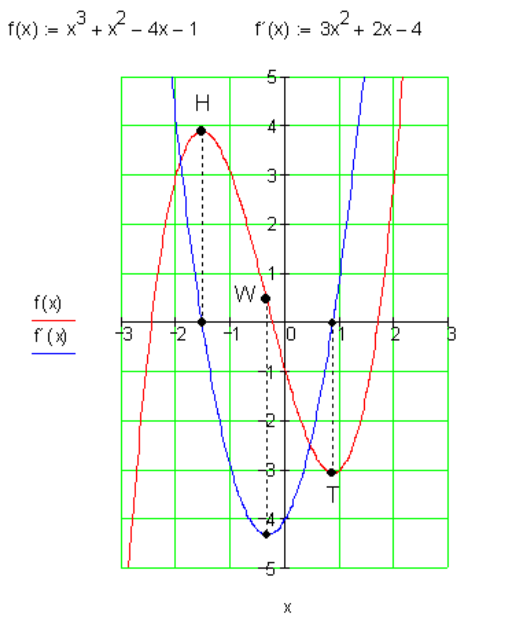
د پورته اخري مساوات لیمیټ د $\Delta x\to 0$ لپاره نیسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

نو لرو: $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. دا د x_0 په ځای کې د f مشتق دی.

د مشتق تابع هم دی: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وضعیه کمیاتو سیستم کې تابع او د تابع مشتق:	
تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$ د تابع مشتق(شین): $f'(x)=3x^2+2x-4$ د تابع مشتق هم تابع دع. مور دا د مشتق یا د میل تابع بللې.	

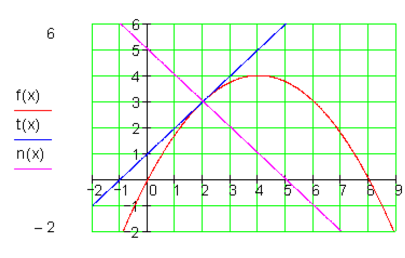
تمرینونه:

په لاندې مساواتو کې د f تابع مشتق او د مشتق تابع وښایئ

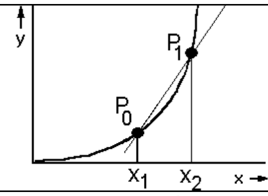
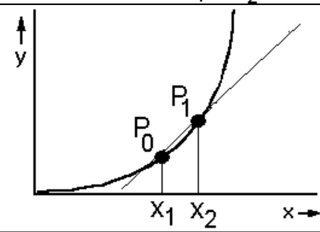
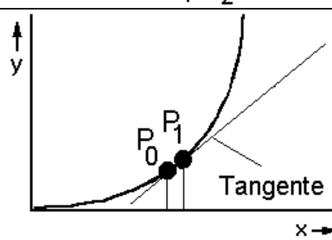
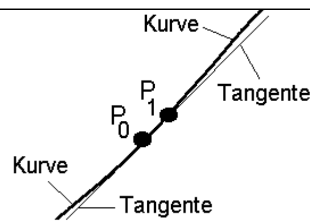
$a)\ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$ $\quad b)\ f(x)=x-\sqrt{x}$

$c)\ f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{x^3}$ $\quad d)\ f(x)=3x^2+0.4x-5$

د تانجنت او عمود تعریفونه او خویونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

	لاندې يا مخاکخ ښيره يو منحني او يوه قاطع(غوڅى) په ټکو P_0 او P_1 کي ښايي.
	اوس غواړو، چې ټکى P_0 د ټكي P_1په لور و خوځيږي. پام: ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي
	بالاخره غواړو، چېP_1 ټکى وP_0 ټکي ته ناپاى ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي.
	که پوره وپيژندلى شو، چې د ټکو P_1 او P_0په شاو خوا غزوو يا لويوو : که د P_1 ټکى و P_0 ټکي ته ناپاى نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.

د دې خويونو غوره غوره والى يا پايله:
ومو ليدل، چې د تانجنت ميل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني ميل هم دى. له دې دا پايله لرو، چې که څوک غواړي د منحني ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړو، بسيا کوى، چې د تانجنت جګوالى يا ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړي.

فعاليتونه:
1- پورته شکلونه بيا سره پرتله کړئ. د ميل په هکله يې فکر وکړئ، چې کوم ميل زيات دى؟
2- تانجنت تعريف کړئ او په شکل کې يې وښاياست.
3- قاطع (سيکانت) تعريف کړئ او په ښېره کې يې وښاياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پہ لاندې کې د تانجنت او عمود عمومي فرمول راباسو:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$:

د $m_t = f'(x_0)$ سره لیکو: $t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t \qquad (1)$

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال): د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$
$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(ځیره لاندې کښل شوې) کاږو:

نو لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \qquad ,P(2,f(2))$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ په ځاي کې لرو:

$$t(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow t(x)=1(x-2)+3=x-2+3=\underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال يا عمود پيدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \ , \quad P(2|f(2))$$

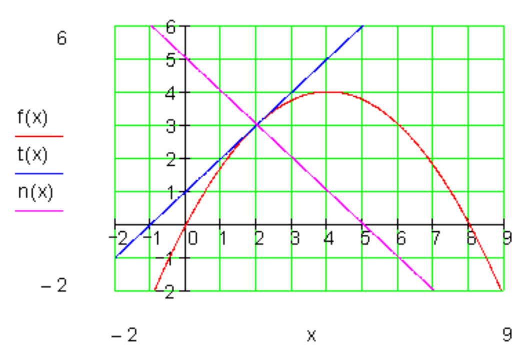
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f'(2)}(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او ولاړ یا عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ لرو.

د تانجنت میل:

د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

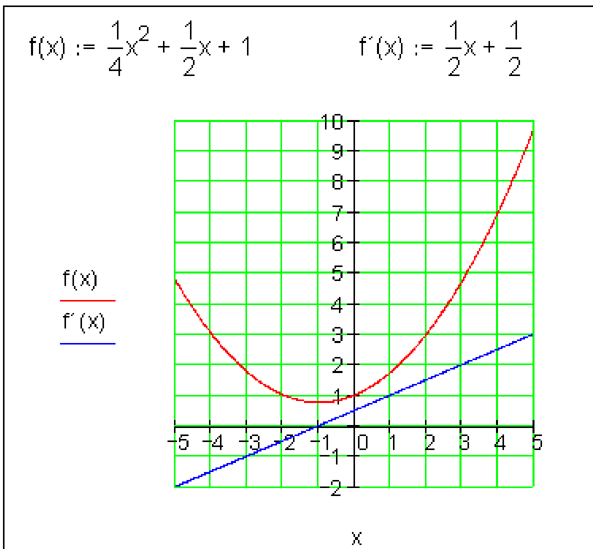
د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرټکی دی: $S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی: دا دا معنی لري، چې په ککرټکي(د رآس ټکی) کې د $f'(x)$ میل صفر دی. تانجنت په S کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعني د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:



(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

$f(x)=2x^3+7x^2+x-7$ تابع لرو:

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2 \mid f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)\, f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري**.**

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګېدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

تمرینونه: د لاندې توابعو ګرافونه وکاږئ، د تانجنت او د عمود مساوات ولیکئ.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{x}+3 \qquad x_0=1$$

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \qquad x_0=-\frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق شميرني قوانين

د مشتقشميرنې شميرقوانين، لک څنګه په اعدادو، ترادفونو او حدونو(پوله ارزښتونو) کې اجرا کيږي،په همدې ډول مشتقشمېرنه کې هم دا قوانين باوري دي.

وبه ښايو، چې د جمعې، ضرب او ... مشتقونه د مشتقونو جمع، ضرب او ... ده. (په وېش کې بايد مخرج صفر نه وي).

فعاليت:

که $f(x)=x^2+x$ او $g(x)=x^3+2$ ولرو، $(f(x)+f(x))'$ د $(f(x)-g(x)),(f(x)\cdot g(x))'$ او $(\frac{f(x)}{g(x)})'$ $g(x)\neq 0,$ د پيدا کولو په هکله فکر وکړئ.

قضيه (د جمعې قاعده):

که يو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق يې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، يعنې:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
که توابعو $f(x)=5x^2+3x$, $u(x)=5x^2$, $v(x)=3x$ ولرو شتق وشمرئ.
ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

فعالیت: که چیرې $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ توابع او $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ثابت عددونه وي نو لرو(پې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+\ldots\ldots+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+\ldots\ldots+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده): که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x))'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي یعنې د دواړو لورو لیمیټ نیسو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.
ښوونه:
په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون): f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).
لومړی لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq0$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعني لرو: $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

بيلگه:

د $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چېرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x) = 2x$$
$$h'(x) = 2x$$

او د ويش قانون له مخي لرو:

$$f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-4) - x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$= \frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

پوښتنې:

که $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ او $g(x) = 5x^3 - 3x + 4$ ولرو، نو :

- د توابعو د توابعو د جمعي مشتق، د ضرب مشتق د توابعو د وېش($f(x)\neq 0$) مشتق پيداکړئ، که شونې وي له مختلفو لارو.

د الجبري توابعو مشتق

الجبري او نورو توابعو پيژندونه(تعريفونه):

1- يو بنستيز تابع الجبري بلل کيږي، که د ترتيب قانون يې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمليی(جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

2- ناالجبري توابع ترانسځندنت بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوګاريمی- او د زاويو توابع.

3- يو الجبري تابع راشنل بللکيږ ي، که د ترتيب قانون يې د يو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای ډيرې راشنل د شمير عمليی ((جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

فعاليت:

په ځېر د $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$ يوه تابع د $f(x)$ _ که د $n\in N \quad \wedge \quad a_1\in R$ سره ليکل شوې وي، څه بلل کيږي؟

په د ويش v او u د دوه توابعو تابع f د $v(x)=3x+6$ او $u(x)x^2+4x+4$ _ لرو:

سره وليکئ $v(x)\neq 0$ د $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ ځېر لکه

تابع مشتق ونيسئ. پسې د $v;u$ _ د تابع تعريف ساحه وښاياست او بيا د هرې يوې مشتقونو وېش په نښه کولو پسې د مشتقونو وېش(چې مخرج صفر نه وي)، د مشتق سره پرتله کړئ.

بيلګه:

د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پيدا کړئ او د مشتق تابع په ګوته کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق دی.

د تېرو درسونو پر بنسټ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $q\in Q$; $f(x)=x^q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=-1.x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x\frac{1}{2}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x)=\frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان قانون (بې له بنونې)
(پونتخ) قانون:
1- مختني اکسپوننت د متحولي x د مخ د فاکتور په څیر لیکل کیږي.

2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.

سره $q\in Q$ **د** $f(x)=x^q \;\Rightarrow\; f'(x)=q\cdot x^{q-1}$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

بیلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$
$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=12x^3$$

بیلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x)=x^2+3$$
$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$
$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$
$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=2u$$

بیلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پیداکړئ.

ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

بیلګه:

(توان(Potence) مشتق، چی طبیعي جګ عدد یا اکسپوننت لري:

موږ د $1, 2, 3,...$, $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق یې پیداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بینوم جملی په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{}$$

$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+...+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+...+h^n-x_0^n\right)$$

$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+...+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0}=f'(x)=nx^{n-1}$$

ددې پورته بیلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په څېر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه: _ که يو پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$
د $a_1\in R \quad \wedge \quad n\in N$ سره ورکړ شوی وي، مشتق يې پيداکړئ.
- د توابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$ $\qquad b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\qquad d)\ f(x)=\frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad h)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق

تابع کيدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځيرونې قاعده)، پېژند ورشو (دتعريف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي يا عناصر ولري.

ددې لپاره ليکو: $u^\circ v(x)=u(v(x))$، که د f تابع د $y=f(x)=u(z)$ سره او $Z=v(x)$ وي.

فعاليت:
_ په زنځيري تابع کې د $f(g(x))$ پېژند ورشو او همداسې د تابع ورشو په هکله خپل نظر څرګند کړئ.
په ځاي کې څه دی او $x=3$ تابع ارزښت د $f(g(x))=(x^2+2x+1)^2$ _ وواياست، چې د
د تابع ساحې کومې دي او په مشتق نيولو کې يې فکر وکړئ.
_ که يوه په خوښه زنځيري تابع ولرو، نو د تابع ورشو په ګوته کړئ او وهڅېږئ، چې
مشتق يې پيدا کړئ.

اوس نو د $x=x_0$ ځای کې د $y=f(g(x))$ تړلي يا ځنځيري تابع مشتقوړوالی څېړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = f\left[g(x)\right]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(g) \quad . \quad g'(x)$$

دننني مشتق د باندنی مشتق(دادې ورپورته شي)
ددې لپاره نيسو چی:

1- د $g(x)$ دننني تابع د $x = x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بيا بايد د x_0 په يوه معلوم تعريف شوي چاپيريال کی متمادي(نه پريکيدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h) -> g(x_0)$ د $h -> 0$ لپاره.

همداسې $g(x_0+h) = g(x_0) + k$ داسې، چې $k -> 0$ د $h -> 0$ لپاره.

2- که د $y = f(z)$ دباندنی تابع په $z = z_0 g(x_0)$ کې د مشتق قابليت ولري.

د $y = f(g(x))$ کمبنتويش کيدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) يې هم بدله شي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}$$
$$= \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k} . \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

که $h -> 0$ لاړه شي (همداسې $k -> 0$ خواته ځي) نو دا اړيکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} \quad ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چيرې د ځای په ځای(فيکس) ځای $x = x_0$ لپار بيرته x نيسو، نو کيدی شي چې (*) فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y = (z)\ ,\ z = g(x)$ لپاره باور ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx};.....................................(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z=g(x)$ په ځای کې باید ترتیب(تنظیم) شي.

دا (*) فرمول ځنځیري قاعده(لار،قانون) بلل کیږي او د پورته نیونو یا فرضیو سره باوري دی. دا په ساده ډول په یاد لرلی شو، ځکه چې ښی خوا د کیڼې خوا سره د فورمال dzزیاتیدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

زنځیري یا مرکبه قاعده

لرو : $f(z)=f(g(x))$ ، نود $z=g(x)$ تابع په x او د $y=f(z)$ تابع په $z=g(x)$ کې د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ دی، نوترلی ورکړ شوی د $y=f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابلیت لري او دا باوري کیږي.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\ '(g(x)).g\ '(x)$$

لنډ: $(fog)'(x)=f(g(x))'$

بیلګه:

د $f(x)=(x^2+2)^2$ مشتق ونیسئ.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^2$$

بدلون ion: $z(x)=x^2+2 \quad f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z \quad z'(x)=2x$

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $y = \sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځیري تابع ده:

$$y = \sin z \quad , \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx} = \frac{d\sin z}{dz} \cdot \frac{dx^2}{dx} = \cos z \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$$

بیلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول ترلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \quad , z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{d\sin x}{dx} = 2z \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

بیلګه:

د $f(x) = (x^5 + 4)^8$ تابع مشتق وشمېرئ!

حل: هرکله چې $g(x) = x^8$ او $h(x) = x^5 + 4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = (g(h(x))' = g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x) = 8x^7$ $h'(x) = 5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x) = 8(h(x))^7 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7 . x^4$$

تمرینونه:

۱ - $h(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2}$

۲ - که چیرې $f(x) = (3 - 2x + x^2)^4$ وي، نو f' پیداکړئ.

د لاندې تابعو مشتقونه هم ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=(1-2x^3)^4$$:1

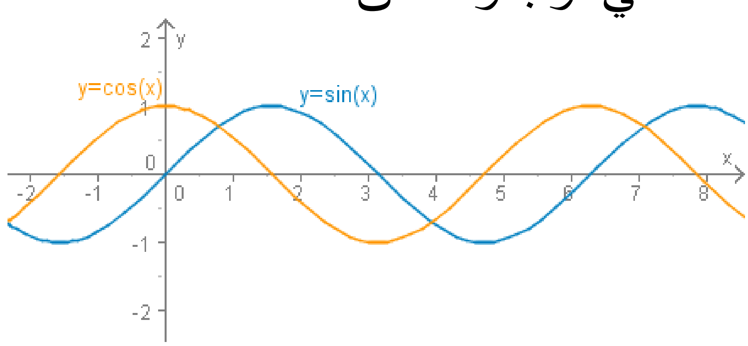
$$f(x)=(2x^2+1)^{-2}$$:2

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$$:3

$$h(z)=\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$:4

$$f(t)=\sqrt[3]{3t+1}$$:5

د مثلثاتي توابعو مشتق



$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; II$$

فعاليت:

د لاندې توابعو مشتقونه وشميرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad :a$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad :b$$

$$f\,'(x) = \frac{d\ \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad c$$

موږ په لاندې کې پورتني درې حالتونه ښايو او د نورو درې حالتونوښوونه ګرانو زده کوونکو ته پرېږدو.

قضيه:

د ساين تابع مشتق غواړو وښايوو چې $f\,'(x) = (\sin x)' = \cos x$ دی:

ددې قضيې د ښوولو لپاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y = f(x) = \sin x$ ساين تابع د هر x لپاره تعريف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوځخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$= \frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2} = \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} .$$

د ليميټ د برخې په پام کی لرلو سره لرو:

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0} = f\,'(x_0) = \cos x_0 ,$$ (Xپه لينده کچ يا راديان)

قضيه:

همداسي ښوول کيږي چی کوساين تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0,$$ په لينده کچ يا راديانx

---

ثبوت:

لرو: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دويم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

د ليميټ او د ليميټ د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$= -\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2}) \;.\; \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنده توګه ليکو:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

قضيه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو وښايو چې د تانجنت تابع $f(x) = \tan x$ مشتقوړ ده او د مشتق تابع يې
ده. $f'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x . \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x \ , x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$$

فعاليت: ګرا زده کوونکي دې د $f(x) = x^2 \sin x$ تابع مشتق پيدا کړي.
يادونه: $g(x) = x^2$ او $h(x) = \sin x$ دې ځا په ځای کړي.
بيلګه:
غواړو د $y = \cos \frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پيدا کړو.

حل:

ړدو : $f(x) = \cos x$ او $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندي توګه ليکلی شو:
$y = f(g(x))$. د زنځيري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x)) \cdot (\frac{\pi}{180} \cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin\frac{\pi x}{180}$$

د لاندې توتبعو مشتق پيدا کړئ

$\tan^4 x$	$:b$	$\cos^2 2x$	$:a$
$\sin(3x-1)$	$:d$	$\sec x \cdot \cot anx$	$:c$
$\sec(\sec(x))$	$:f$	$\sin^2 x - \cos x$	$:e$

حل a: د ځنځيري قاعدې په بنسټ او د توان يا طاقت يو فرمول په بنسټ لرو:

$$(\cos^2 2x)' = 2\cos(2x) \cdot \cos'(2x)$$
$$= 2\cos(2x)(-\sin(2x)).2$$
$$= -4\cos 2x \cdot \sin 2x$$

$:b$
$$(\tan^4 x)' = 4\tan^3 x \cdot (\tan x)'$$
$$= 4\tan^3 x \cdot \sec^2 x$$

$:c$
$$(\sec x.\cot x)' = (\sec x)'\cot x + (\cot x)'\sec x$$
$$= (\sec x.\tan x)\cot x + (-\csc^2 x)\sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x \cdot \sec x$$
$$= \sec x(1 - \csc^2 x)$$

$:d$
$$[\sin(3x-1)]' = \cos(3x-1).(3x-1)'$$
$$= \cos(3x-1) \cdot 3 = 3\cos(3x-1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$:e \quad [\sin^2 x - \cos x]' = (\sin^2 x)' - (\cos x)'$$
$$= 2\sin x(\sin x)' - (-\sin x)$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \sin x$$
$$= \sin x(2\cos x + 1)$$

بیلګې:

1- د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پيدا شي.

---

f'(x) = cosx ; f''(x) = -sinx ; f'''(x) = -cosx ; $f^{(4)}(x)$ = -(-sinx) = sinx

2- د (x) = x.sinx تابع مشتق پيداکړئ.
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
f'(x) = 1.sinx+xcosx=sinx+ x.cosx

3- د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پيداکولو له پاره د ځنځير قونو ن څخه نار اخلو.

پردو $z = \frac{1}{x^2}$ ***او*** **u(z) = sinz** ***لا س ته راځي:*** $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

تمرينونه:

-- د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x) = \sin 3x$ $\quad b)\ f(x)\sin x \cdot \cos x$ $\quad c)\ f(x) = \sin^2 x$

$d)\ f(x) = \tan x + 2\sin 2x$ $\quad e)\ f(x) = \sin x^2$ $\quad f)\ f(x) = \sin\frac{x-1}{x+1}$

-- د $f(x) = \sin^n x (n \in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښاياست يا وټاکئ.

-- د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون و ښاياست.

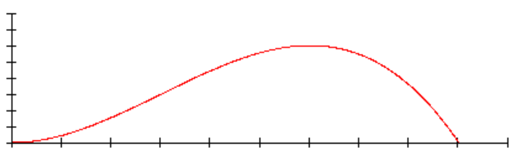
-- وښاياست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ هم باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

--- ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقوړ دي.

د مشتق استعمال په پیداښتي یا طبیعي علومو کې

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کیږي، چې د یوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي. په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څېړو، چې د وخت په واک کې وي. لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کیږي)	

فعالیت:
ګران زده کوونکي دي د فزیک د درسونو له مخې د چټکتیا او بیړې تعریفونه ور کړې او د لار، وخت، چټکتیا او بیړې فرمولونه دي ولیکي.

بیلګه:
د یوه په برابرډوله بیړه (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1{,}8\frac{m}{s^2}$ بیړې(تعجیل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

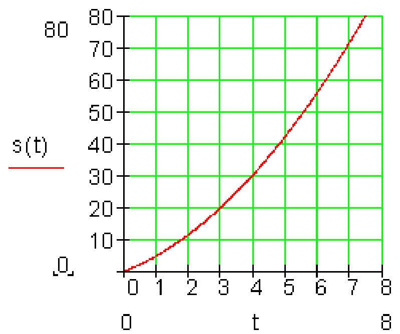
$$s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

(t په (ثانیه) ، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

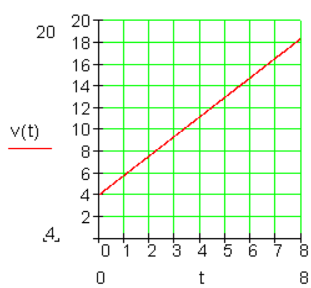
(c) ketabton.com: The Digital Library

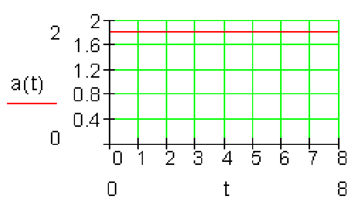


لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$$

$$v = s'(t) = 1,8t + 4$$





v-t - دياګرام کې يوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتيا په برابر ډول زياتيږي.

دا دلته ثابته چګېدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a = 1.8\frac{m}{s^2}$ بيږه(تعجيل) ده.

بيږي يا تعجيل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

پام : د يوه برابرډوله په بيږه (تعجيلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$| s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t | \qquad v(t) = s'(t) = at + v_0 \qquad a(t) = v'(t) = a$$

د يوې چټکتيا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t) = s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t) = s'(t)$ هم ليکو.

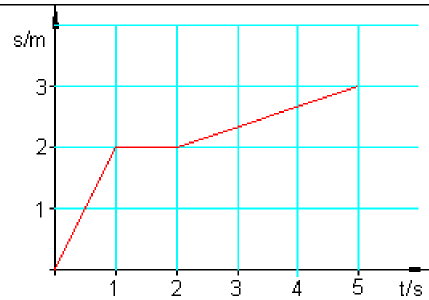
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

1- د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی.

الف: دا خوزښت تشریح کړئ.

ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږئ.



2- یوه تیره د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولي (؟؟ګردې شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالوشمیرئ

3- تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي.

الف)د ورځني ژوند څخه یوه بیلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ښایي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

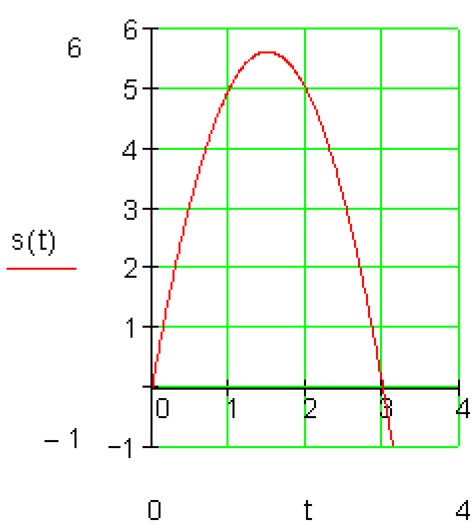
ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام په لاندې ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ.

پ) د اړونده بیړې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ.

یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟



4- یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $s(t) = 5 \cdot t^2$ لار وهي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په وختونو $t=1,2,3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.
حل: لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t=1: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x$$

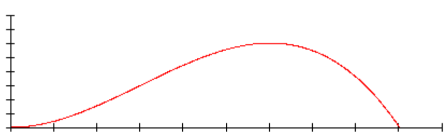
د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10+5\Delta x \to 10$

$$t=2: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x}=20+\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $20+5\Delta x \to 20$

$$t=3: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x}=30+5\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري $20+5\Delta x \to 30$

تمرین: د $f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2 \;;\; x>0$ لاندې تابع ګراف او په ورنزدي توګه د فوټبال میدان کې د توپ الوتني منحني ښایي، چې لاندې څېره لري.	

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:
الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسیمال) جګوالی لري او د وهلتکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلتکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکي ته راځي؟
پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه 9 متره لرې او 2 متره جګ دی. ایا توپ له دې څخه جګ الوزي؟
ت : توپ د تور(ګول) لاین(د x محور) څخه په 2 متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاس ته راځي. د $f'(x)$ بیا مشتق نیوني سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه:

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x)=6x+2}}$$

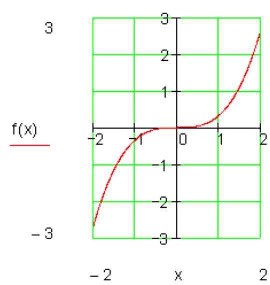
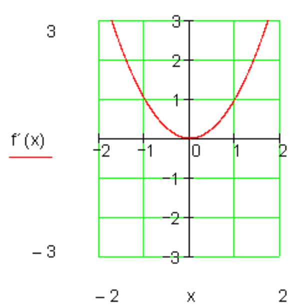
د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور.

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x)=6}}$$

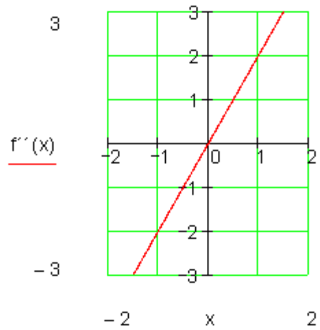
د $f(x)\frac{x^3}{3}$ تابع دې 4 واره مشتق ونیول شي:

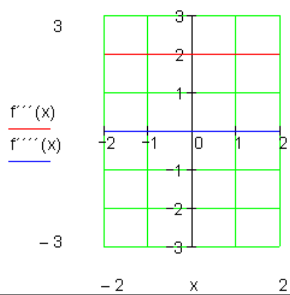
$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{3}=x^2 \Rightarrow f''(x)=2x \Rightarrow f'''(x)=2 \Rightarrow f''''(x)=0$$

د تابع ګراف: د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$f(x)=\frac{x^3}{3}$	
$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=x^2$	

(c) ketabton.com: The Digital Library



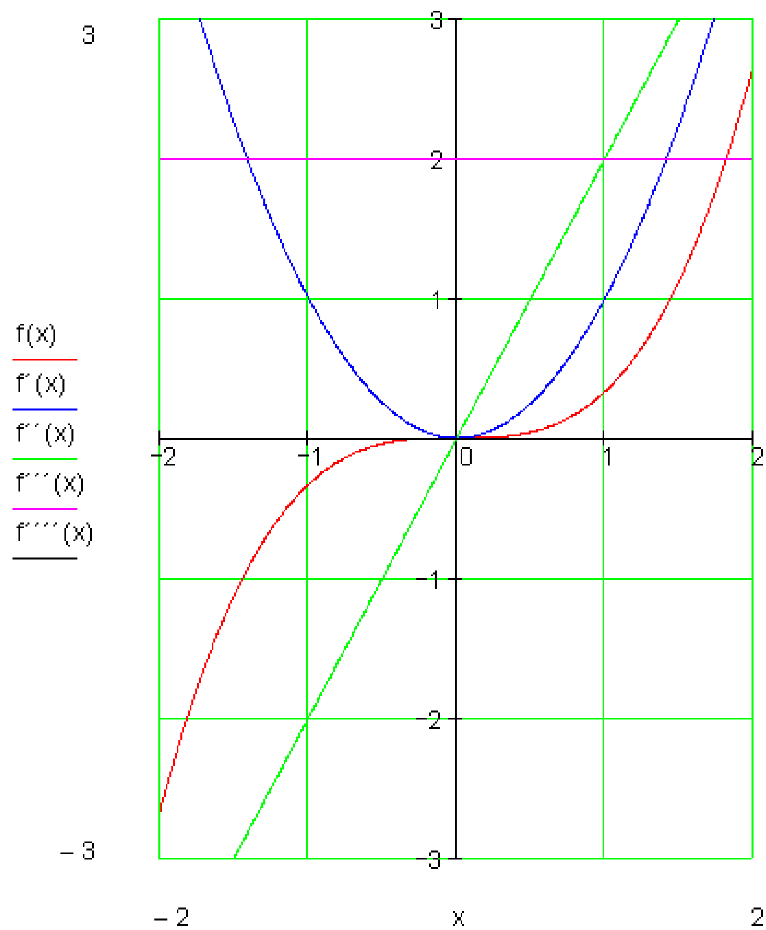


$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

پورته تولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګې:

اول: د تابع $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$ مشت درپواره پیدا کړی

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

۳-۱ د جګو درجو مشتق

دویم: د تابع $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$ **مشتق درپواره پیدا کړی**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$$

$$f'(x)\frac{9}{4}x^2-24x+\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=\frac{9}{2}x-24$$

$$f'''(x)=\frac{9}{2}$$

ټولګه:

د $f(x)$ لومړی مشتق د $f(x)$ مشتق تابع $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ ده :

د $f(x)$ دویم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$ دریم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x)=\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: یو په خوښه کسرۍ‌ي تابع $f(x)$ په خوښه د مشتق قابلیت لري.

تمرینونه:

د لاندې توابعو دریواره مشتق ونیسئ.

1- $f(x)=3x+4$

2- $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$

3- $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$

4- $f(x)=(2x+1)^3$

5- $f(x)=x-x^4+3+x$

6- $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$

7- $f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$

8- $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

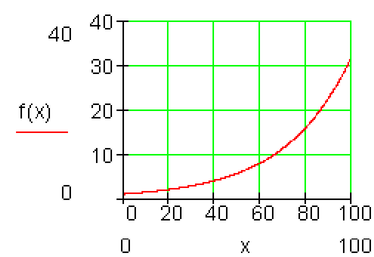
کولي باکتريا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټي ويش (حجره ويش) له لارې زياتيږي. و مساعدو شرايطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقيقو کې ځان تجزيه کوي. د غه عمليي لپاره يو ارزښت جدول :اړ، او گراف يې کاږو. دلته د x اووښتوني (متغيره) په دقيقو د وخت لپاره ده.

د y متغيره د باکتريا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

x = دقيقې

y = د باکتريا ګنون يا تعداد



فعاليت: د دې لپراه تابع وليکئ

قضيه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ريلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad , \ f(x) = b^x$$

حل:

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{b^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \quad , \ x - x_0 = h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h-1=k \\ h=\log_b(1+k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_b(1+k)}$$

د لوګاريتم قانون څخه لرو: $n\cdot\log x=\log x^n$ او لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b[\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]}\quad ,\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

له پورته لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b e}\qquad ,\ \log_b e=\frac{1}{\ln b}$$

$$=b^{x_0}\cdot\ln b\ ;\quad x_0\in IR\ ;\ b\in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f':f'(x)=b^x\cdot\ln b\ ;\ D'(f)=IR\ ;b\in IR^{>0}$$

$$f'(x)=b^x\cdot\ln b$$

ضيه :

د $y=f(x)=e^x$ مشتق پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$y = f(x) = e^{x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام كې نيسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} . e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل كوچنيكيدونكي Δx ارزښت لپاره ځيرو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمېرنې په بنسټ دا دا معنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

كه د x_0 په ځاى x ځاى په ځاى كړو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f'(x) = e^x$ او $f(x) = e^x$

اکسپوننشل فنکشن $y = f(x) = e^x$ تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

یعني د e^x تابع د مشتق ښخه بېرته د e^x تابع لاس ته راځي.

بیلګه:

لرو : $f(x) = b^{3x^2} - 10;\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$
$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b};\ z \in IR$$
$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x};\ x \in IR$$
$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$
$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$
$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$
$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

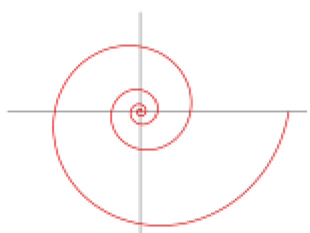
$a)\ f(x) = 3 \cdot e^{-2x+1}$ $\qquad b)\ f(x) = e^{x^2+2x-1}$ $\qquad c)\ f(x) = (x-1) \cdot e^x$

$d)\ f(x) = \sqrt{e^x}$ $\qquad e)\ f(x) = x^n \cdot e^e$ $\qquad f)\ f(x) = e^{kx}$

$g)\ f(x) = 2^{\frac{1}{2x}}$ $\qquad h)\ f(x) = (\frac{1}{4})^{3x}$ $\qquad i)\ f(x) = x \cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x) = \sqrt{e^x + 1}$ $\qquad l)\ f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$ $\qquad m)\ f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

د لوګاریتم مشتق



قعالیت:
- لوګاریتم تعریف
- اکسپوننت یا توان تعریف کړئ.
- د لوګاریتم او توان ترمنځ اړیکې وښایاست.

قضیه :
د لوګاریتم تابع مشتق:

(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یوائې د $x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی $x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$

$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$

$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$

$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې

حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2)$

اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:

$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$

تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $\quad b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $\quad c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $\quad e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $\quad f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $\quad h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

د یوې تابع مشتقوړوالی یا - قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري او همداسې په هرځاي کې متمادي نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.

تابع $f(x) = |x|$ په 0 ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x>0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-0}{x-0}=1$

د تولو $x<0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x)=-x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

دا چې کيڼ- او ښی اړخيز حد يو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

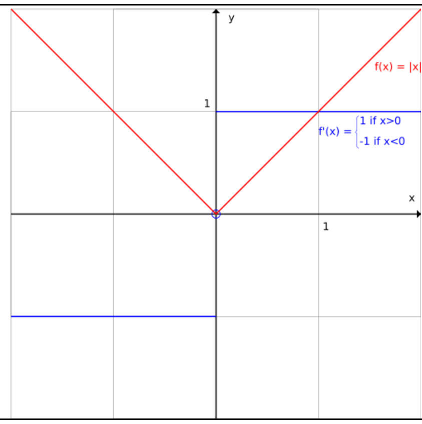
د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوې.

په صفر ځای کې سره له دې يو ښي اړخيز مستق ورکړ شوی، يعني لرو:

$$f'+(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

او يو کيڼ اړخيز مشتق هم:

$$f'-(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$



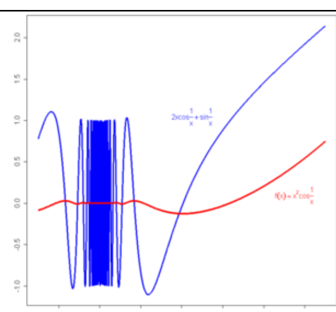
که پورته ګراف ته وګورو، نو وبه پوهيږو، چې يوه مشتقوړ تابع بايد ګوده نه وي يا په کوم ځای کې ماته نه وي يا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.

د يوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:

يو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که يوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، بايد نه دی چې مشتق دې يې هم متمادي وي.

د بېلګې په توګه:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$



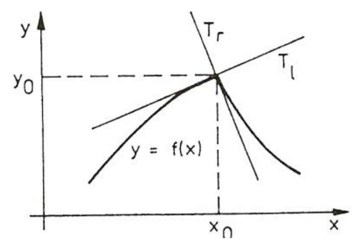
تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

د لوګاريتم مشتق ۱۱۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

یي ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیټ (پولی) ته تګ ممکن وي یعني چیرته چی د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\to 0$ لپاره ولري.
که کومه منحني چیرته راماته وي (ښېره 4)، ګورو چی هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانګړي خوي دی.



په پورته ښېره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_1 یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.

په یوه نامتمادي تابع کی د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.
دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټیك فرمول لاندې راوړو.
ولیدل شو چی په یوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرګنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلګي په توګه که تابع زاویه یا کونج ولري.
دې ته اړتیا ده چی وښایو، چی یواځې متمادي توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چې د مشتقوړ وي باید لږ تر لګه متمادي وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله:
که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.
ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یواځی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانی $f(x)-f(x_0) -> 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د متمادیت پیژند دی.

دا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:
د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف:
د $y = (x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \;;\; a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه ۲ ، ۶:
د توان تابع $y = x^n,\; n = 1 , 2 , 3,.....$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

د لوګاریتم مشتق ۱۱۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندي مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dsinx}{dx}=cosx, \frac{dy}{dx}=\frac{dcosx}{dx}=-sinx$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت او د متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

تعریف (پیژند) ۲. ۴:

په یو د $x=x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سرې د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینتروال کي مشتق کیدونکي تابع $y=f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y'=f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي. [SEP]

ددې لپاره لیکل کیږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}$$

تمرین:

وښایئ چي ایا دا توابع $y=\cos x$; $y=x^n$; $y=c$ هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي؟

د معکوس تابع مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

د یوې تابع معکوس تابع تعریف کړئ.

د $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^3-8}$ تابع د تعریفساحه وښایاست.

د پورته تابع د مشتق مشتق وشمیری.

اوس دې معکوسه تابع تر څېړنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګېدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي: د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

۱۱۶ د لوګاریتم مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

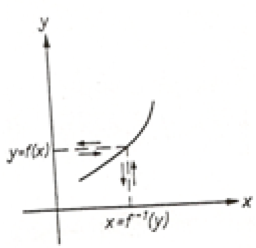
د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل ویش لاس ته راوړي چی د هغه سره د مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله ۲ . ۷: د معکوس تابع مشتق : که $y = f(x)$ د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او همله د $|f'(x)| = 0$ سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د $y = f(x)$ سره مشتقوړ دی او باوري $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له x ->0 او هم y->0 او معکوس څخه، د $y = f(x+x)-f(x)$ سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

$f'(x)=\frac{dy}{dx}$ او $(f-1)'(y)=\frac{dx}{dy}$ سره. بالاخره لرو: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$	

تمرینونه: د $y=f(x)=x^n; n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}}; y\geq 0$ توګه یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

-- د $y = x^{\frac{m}{n}}, m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایمپلیځیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیځیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

د بیلګې په توګه $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت:

که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه:

یوه تابع په ایمپلیځیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړو $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \quad \vee \quad \frac{2x+y}{2y-x}$$

ایمپلیځیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیځیت یعني د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیځیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیځیت ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه :

د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانينو نه شي نيول کيدی، ځکه چې په بنسټ او جګ االکسپوننت کې يې متحولې پرتې دي. د لوګاريتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کيدی شي:

$$\ln f(x) = x \ln x$$

اوس ايمپلځيت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته يې د x پسې مشتق نيسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځيرقانون له لارې صورت نيسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاريتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

تمرينونه:

- د r وړانګې سره د د ايرې مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ سره. دايمپليځيټ مشتق له لارې يې مشتق ونيسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د $E: \; x^2 + 3y^2 = 7$ سره ورکړ شوي الیپسې مشتق دې ونیول شي.

د بنسټیزو مشتقونو جدول

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x ټول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \; a \; reell$
7	a^x	$a^x \ln \; a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \; a \neq 1, \; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin \; x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k \ \ k \in z\ (Z)$

د پورته جدول په مرسته کيدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزې(تحليلي) ويينې يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونی په نظر کې ونيسي.

د فصل تولګه

کمبنتويش Differenzenquotient (د سيکانت جګيدنه) يا منځنی تغېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی يا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\ c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

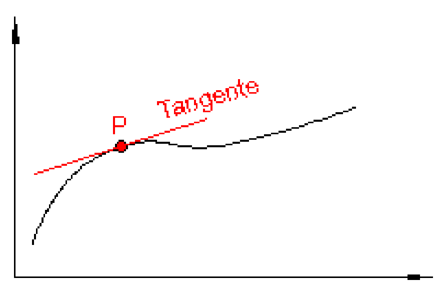
د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$
$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \quad \cdot \quad z'(x)$$

(تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی



د کمښت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient

د يوې کرښې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدی شي:

کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کرښې د جګېدنې فرمول په لاندې ډول دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

د ځېرکي تمرينونه:

(١) کمښتويش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

(٢) د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2\ ,\ x_0=2$ $b)\ f(x)=0.5x^2\ ,\ x_0=3$

(٣) د کمښتويش(د تفاضل ويش) او مشتق لاندې څه پوهيږو او د دوي ترړنځ فوپير څه دی؟

(٤) د يوه تابع د سکانت( ) لاندې څه پوهيږو او د تانجنت جګېدو لاندې څه پوهيږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړيکې پرتې دي؟

(٥) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$ $b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $d)\ f(x)=\dfrac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $h)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=0.2x^5-3$　　$b)\ f(x)2x^4+1$

$c)\ f(x)=\dfrac{4}{x^2}$　　$d)\ f(x)=\dfrac{3}{x^3}+2$

$e)\ f(x)=6\sqrt{x}$　　$f)\ f(x)\dfrac{8}{\sqrt{x}}-5$

(٧) د تابع د ګراف په مرسته وښايئ، چې ټول g(x) + c ترمونه همغه مشتق لري.

ياودونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونيسي.

(٨) وښايئ، چې د a.g(x) د مشتق سره د a ضريب (ځله وونی) ساتلی پاتې کيږي.

(٩) د f تابع مشتق د جمعي قانون سره وښايئ

$a)\ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$　　$b)\ f(x)=x-\sqrt{x}$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{x^3}$　　$d)\ f(x)=3x^2+0.4x-5$

(١٠)د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^3(x^2-2x+1)$　　$b)\ f(x)=(2x^2+1)(x-1)$

$c)\ f(x)=(x^2-5)(2x^3+x^2+x)$　　$d)\ f(x)=(4x^2-x+4)(3x+2)$

(١١) د f تابع مشتق د ويش قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{4-x^2}$　　$b)\ f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{x+1}$

$c)\ f(x)=\dfrac{4-x-x^3}{2x^2+3}$　　$d)\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$

(١٢) د ويش قانون له مخې په څټ ارزښت(پرعکس ارزښت) وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x)=\frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{-g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$$

د $g(x)\neq 0$ سره

(۱۳) د f تابع ارزښت د زنځير قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=(4x^4-x)^2$ $\quad$ $b)\ f(x)=(3x^2+4x-5)^2$

$c)\ f(x)=(2x-7)^3$ $\quad$ $d)\ f(x)=(5-3x^3)^4$

(۱٤) د لاندې توابعو مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{1}{(2x^2+x)^3}$ $\quad$ $b)\ f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^4}$

$c)\ f(x)=(1+\sqrt{x})^2$ $\quad$ $d)\ f(x)=\sqrt{1-x^3}$

(۱٥) د لاندې توابعو درې واره مشتق ونيسئ.

$a)\ f(x)=x^3-2x^2+1$ $\quad$ $b)\ f(x)2x^4+3x^3-x^2+x-5$

$c)\ f(x)\dfrac{3x-4}{x}$ $\quad$ $d)\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{2-x}$

(۱٦) د يو n-م درجې تابع بايد څو واره مشتق ونيول شي چې يوه ثابته ترې لاس ته راشي.

(۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x)=\sin 3x$ $\quad$ $b)\ f(x)\sin x\cdot\cos x$ $\quad$ $c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x+2\sin 2x$ $\quad$ $e)\ f(x)=\sin x^2$ $\quad$ $f)\ f(x)=\sin\dfrac{x-1}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۸) د $f(x)=\sin^n x (n\in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

(۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون و ښایاست.

(۲۰) وښایاست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x)=1+\tan^2(x)$ هم باور لري.

(۲۱) د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

(۲۲) ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقوړ دي.

(۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^x$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^x}$ $e)\ f(x)=x^n\cdot e^e$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^x+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$ $m)\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(۲٤)د $f(x)=(x^2+2)\cdot \lg x \quad (x>0).$ مشتق دې پیدا شي.

مشتق یې وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لویه تعریف ورشو(ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق یې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تعریف سټ(ډېرۍ) هغه ورشو(ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقوړ دي.

$a)\ f(x)=\sqrt{x+3}$ $\qquad b)\ f(x)=\sqrt{(x-2)(x-4)}$

$c)\ f(x)=x\sqrt{x}$ $\qquad d)\ f(x)=\sqrt{x^2+2}$

(۳٦) ولې باید د ټیک شمېرنې لپاره لوګاریتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه رېښنه توابعو ته ؟

(۳۷) ۹۰ ـمه پوښتنه د لوګاریتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$a)\ f(x)=\ln(x^4-1)$ $\qquad b)\ f(x)=\ln(2x+4)$

(۳۸) ـ د لاندې توابعو لومړی مشتق پیداکړئ.

$a)\ f(x)=\frac{2}{5}x^{10}-\frac{1}{5}x^5$ $\qquad b)\ f(x)=3x^4-4x^3+11x^2-7x+8$

$c)\ f(x)=5x^8-3x^6+\frac{10}{x^3}-\frac{8}{x^7}$ $\qquad d)\ f(x)(2x-5)(x^2+11x-3)$

$e)\ f(x)\cos x-2x\sin x$ $\qquad f)\ f(x)=\sin^3 x$

$g)\ f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ $\qquad h)\ f(x)=(x^2-2x+2)\cdot e^x$

$i)\ f(x)=\frac{3e^x+1}{2e^x-1}$ $\qquad j)\ f(x)=\frac{2e^x(x^2-3)}{x}$

$k)\ f(x)=\frac{1}{x^2}\ln x^2$ $\qquad l)\ f(x)=\frac{x\cdot\ln x}{1-x}$

$m)\ f(x)=\frac{\sin x}{\ln x}$ $\qquad n)\ f(x)=3x^2\cdot\lg x$

$o)\ f(x)=\ln(\sin)\ x$ $\qquad p)\ f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$

$q)\ f(x)=\sqrt[n]{ax+b}$ $\qquad r)\ f(x)=(x^2+3)e^{-2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

$a)\quad f(x)=\sin^{n}$ $\qquad b)\quad f(x)=(\ln x)^{n}$

$c)\quad f(x)=s+\frac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=(1+\frac{1}{x})^{n}$

(٤٠)– د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

$a)\quad f(x)=e^{x^{2}}$ $\qquad b)\quad f(x)=\sin x\cdot\cos x$

$c)\quad f(x)=x+\frac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=x^{2}\cdot e^{x}$

(٤١)– په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

(٤٢)–

الف: د کو fتابع لپاره $f'(x)=2f(x)$ دی؟

ب: د کو fتابع لپاره $f'(x)=-f(x)$ دی؟

(٤٣)- د f(x)=sinx څوم مشتق د f سره سر خوري یا برابر دی؟

(٤٤)– د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

$a)\quad f(x)=e^{ax}$ $\qquad b)\quad f(x)=\ln(x+1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رول قضیه (Theorem of Rolle)

که د f یوه تابع په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد c د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته، داسې چې $f(c)=k$ دی.

فعالیت:

_ که f تابع په یوه بند اینتروال $[1,3]$ کې ثابته وي، دا به د یوې تابع لپاره څه معنا ولري، چې تابع څنګه ځغلي. ایا دا تابع به جګ ټکي یا ټیټ ټکي ولري او که څنګه؟ دا روښانه کړئ او د انتروال په خوښه درې منځ ټکو کې ارزښتونه یو له بل سره پرتله کړئ.

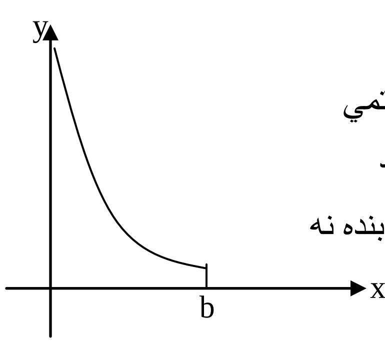
_ وښایاست، چې د $f(x)=-x$ تابع په $[-1,1]$ انترول کې جګ او ټیټ ټکي چیرته لري او د یو او منفي یو تر منځ د درې x ارزښتونو لپاره په ګراف د f ارزښتونه وښایاست او وښایاست، چې یو له بل توپیر لري او که نه؟

_ د رسم له لارې وښایاست، چې x^2 کوم جګ یا ټیټ ټکی لري او که څنګه او که لري یې چیرته؟

دوایرشتراس قضیه Theorem of Weierstrass

که د f یوه تابع په بند اینتراوال $[a,b]$ کې متمادي وي، نو f په دېاینتراوال کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.



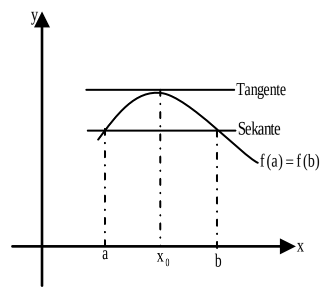
کیدی شي چی یو همغږیز (monoton مونوتون یا جګټیټ) ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.

د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه حتمي دی. د بیلګي په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع په نیم بند اینتروال $(0,b]$ کې متمادي ده، مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې توګه خورا جګ ټکی نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ويش ترمنځ داسی نږدې اړيکي شتون لري، هغه چی د اناليوزې په منځ ارزښت قضيو کی تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسی تړلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

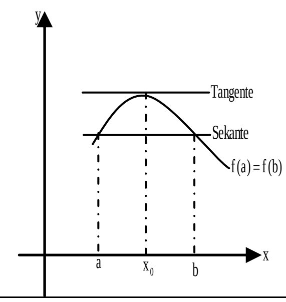
د رول(Rolle) قضيه: يوه د f تابع دې په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز ايتروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.	

حل:

1. که f ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
2. که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چی f ثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د $f(a)=f(b)$ سره نامساوي دی . په دې اساس د اينتروال په دننه کی يو مونوتون (جګټيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کيدی شي چی عمومي شي.
پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ايا يوې مايئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه ميل (جګوالي) سره جوړيدلی شي؟
ځواب يی لاندې قضيه راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت (وسطي قيمت) قضيه: که $y=(x)$ تابع په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اينتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$	

حل: دا پرابلم په يوه مرستندوې تابع داسی تعريفيږي، چی د رول قضيه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو: $y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

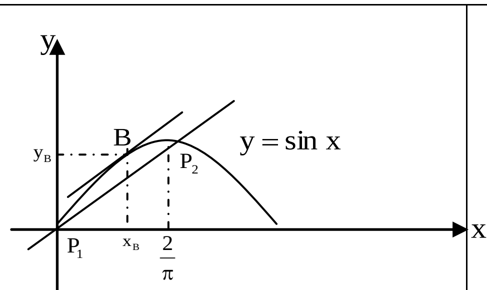
د مرستندوې تابع په څير د مشتق تابع جوړيږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

نو باور لري: $h(a)=h(b)=0$ برسيره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په $[a,b]$ کې متمادي دی. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې يو ځاي $x\in(a,b)$ شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:

$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ يعني } f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بيلګې نوره هم روښانه کيږي.

بيلګه: د $f(x)=\sin x$ يوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په يوه ټکي $B(X_B,Y_B)$ کې تانجنت د منحني مماس وي، هغه چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ ټکو کی همغه ميل ياجګوالی لري لکه قاطع.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځواب: د قاطع (غوڅي) میل یاجگوالی: $m = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \dfrac{2}{\pi}$

د منحني میل د $B(x_B : y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B) = \cos x_B = \dfrac{2}{\pi}$

له دې ځخه لاس ته راځي: $x_B = \arccos\dfrac{2}{\pi} = 0{,}88$ او $f(x_B) = f(0{,}88) = 0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88 : 0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y = \dfrac{2}{\pi}(x - 0{,}88) + 0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت ځخه لاس ته راځي:

> پراخه شوې د منځ ارزښت قضیه:
> که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند انټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز انټروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0 \in (a,b)$ وجودلري چی لاس ته ترې راځي:
> $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او $v = g(x)$ مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعني: $x = g^{-1}(v)$

که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u = h(x)$ تابع د $v_1 = g(a)$ او $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د $v_0 \in (v_1; v_2)$ ځای په لاندې ډول موجود دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2-v_1}=h'(v_0)$$

له دې ځخه د $h(v)=f(x),v=g(x)$ او $x_0=g^{-1}(v_0)$سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

تمرینونه:

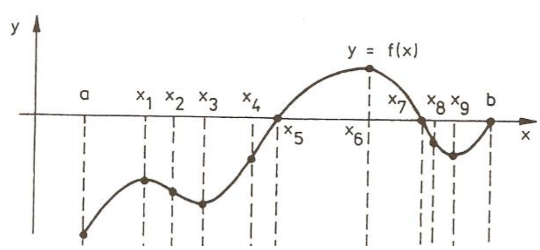
لاندې توابع دوه صفرځایونه لري. هغه بحراني ارزښتونه پیدا کړئ، چې د دواړو صفرځایونو تر منځ پراته وي.

$a)\ f(x)=x^4-5x^3+7x-5x+6$

$b)\ f(x)=x^4+x^3+2x^2+2x$

همغږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرډوله)

جګېدونکې(متزاید)، ټیټېدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکې توابع)



فعالیتونه

- په پورته ځېره کې ټول هغه ځایونه وښایاست، چې هلته تابع جګېږي.
- په پورته ځېره کې ټول ځایونه وښایاست، چې هلته تابع ټیټېږي.
- په پورته ځېره کې ټول هغه ځایونه په نخښه کړئ، چې هلته د تانجنت میل افقي وي.

که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره د f یوه تابع په یوه اینتروال کې $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نوتابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې (- تیټیدونکې) بلل کیږي،که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري،نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ کره یا په زغرده همغږیزجګیدونکې (همغږیز تیټیدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي څخه په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

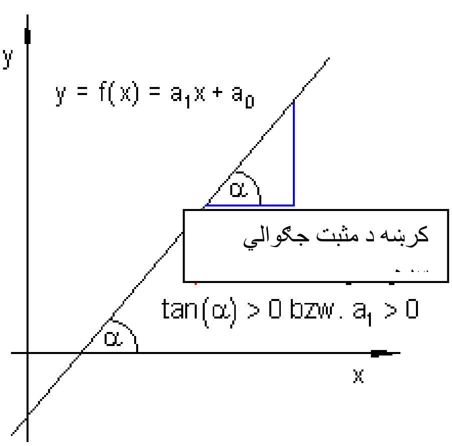
د f یوه تابع تیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې همغږیزجګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f یو تابع تیک هلته په D کې همغږیزتیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

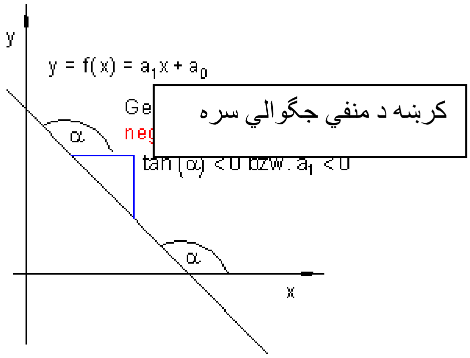
یوغږیزوالی (یونواخت والی) Monotony جګتیټوالی، د جکتیټوالی جملې دا $f(x) = a_1 x + a_0$ کربښیز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنا نه لري. ددې لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل ی، $a_1 = \tan(\alpha)$ چېرته چې α د کربښې او مثبت لوریز د $x-$محور ترمنځ زاویه(کونج) ده.



په مخامخ شکل کې: کربښه د مثبت میل سره

$$a_1 > 0 \Leftrightarrow \tan\alpha > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



داپورته داسې دی: $tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

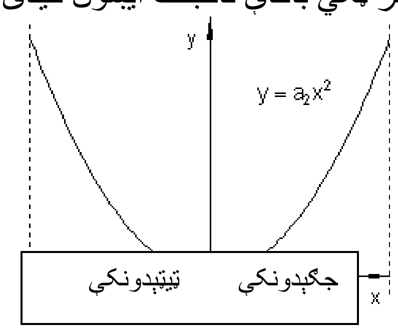
که $90^\circ > \alpha > 0$ یا $\infty > a_1 > 0$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جګېږي. دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جګېږي.

په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0(\Leftrightarrow)$

که $180^\circ > \alpha > 90^\circ$ یا $0 > a_1 > -\infty$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$، نو کرښه ټیټېږي یا لوېږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت $f(x)$ کوچنی کېږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جګ-ټیټېدونکي تابع) غږېږو او له یوه همغږیزجګیدونکې تابع ښخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکې تابع ښخه، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي باندې تانجنت اینول کیدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اننتروال $|_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_R$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټیټېږي. او $f(x)$ په اینتروال $|_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_R$ کې مونوتون جګیږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنې له یوه ټکي ښخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جګیدنه $> 0 \rightarrow$ منحنې مونوتون جګیږي. د تانجنت جګیدنه$< 0 \rightarrow$ منحنې مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جګیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ده چې د $f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو.

قضيه:

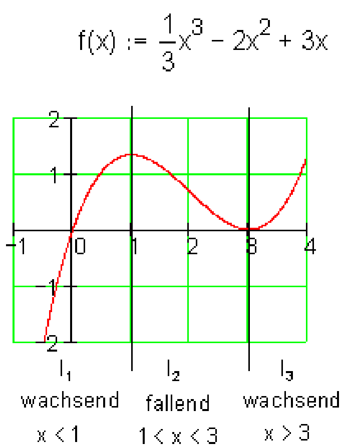
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اينتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره

- که $f(x)$ په اينتروال کې همغږيزټيټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره.
- که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې همغږيز جګېدونکې ده.
- که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ايتروالIکې همغږيز ټيټېدونکې ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې په کلکه همغږيزجګيدونکې ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټېدونکې ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحه) ټاکنه

بيلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کيدی شي د مونوتوني ساحې لږ يا زيات ټيک و لوستل شي.

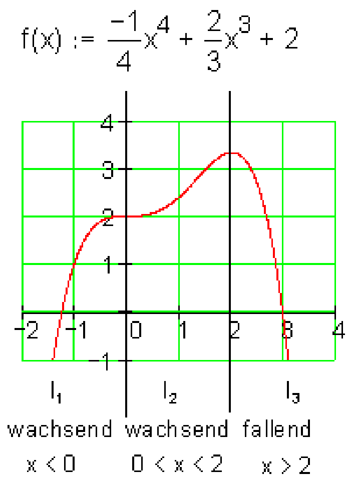


د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ يوغږيز ټيټېدونکې ده.

د $r\,I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه يوغږز جګېدونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



له گراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.

د $I_1=\{-\infty<x<1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج گېډونکې ده.

د $I_2=\{1<x<3\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونجگېډونکې ده.

د $r\ I_3<x<\infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون ټيټېدونکې ده.

تمرينونه:

--- لاندې تام راشنل توابع په همغږيزوالي خويونو وڅيړئ.

$a)\ f(x)=x^3-6x^2+9x+3$

$b)\ f(x)=2x^3+9x^2-12x$

$c)\ f(x)=x^3-6x^2+1$

$d)\ f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2+2x+2$

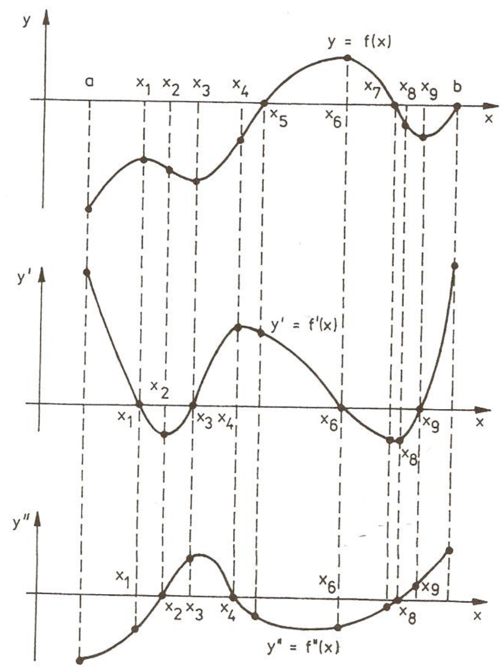
--- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{ax+2}$

$b)\ f(x)=\frac{1}{ax^2+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای اړونده افراطي ټکي (local extrema)



يادونه: په ليکلو مې کله کله د افراطي لپاره بحراني ليکلي، پام دې ورته وي.

فعاليتونه:

د مختلفو توابعو ګرافونه او په هغې خبرې، چې چيرته افراطي ټکي پراته دي.

- په پورته ځېره کې د تابع لپاره نسبي جګ ټکي اوخورا جګ ټکي و ښاياست.

- په پورته ځېره کې نسبي ټيټ او خورا ټيټ ټکي وښاياست.

- په پورته ځېره کې وښاياست، چې د نسبي جګو ټکو همداسې خورا جګو ټکو، نسبي ټيټو ټکو همداسې د خورا ټيټو ټکو دواړو لورو ته تابع څنګه ځغلي؟

- په پورته شکل کې هغو ټکو ته، چې بحراني ټکي دي ځير شئ، چې تابع هلته څه خوي لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د تابع همدې ټکي کې وګورئ، چې لومړی مشتق یې کوم ارزښت لري؟

موږ ددې پورته فعالیتونوڅخه لاسته راوړو:

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

1. دا اړیکي یواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د $y=f(x)$ تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو لپاره چې هلته $f(x)$ تابع کم یا هیڅ مشتق وړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.
2. شرایط چې $f'(x)=0$ وي(مشتقوړ تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی(ضروري یا اړین شرایط).
3. شرایط $f'(x)=0$ او $f''(x)\neq 0$ د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کېدونکی دی او نه ضروري).

بیلګه:

د $f(x)=x^2+2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او مشتق له لارې وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د بيلگي له گراف څخه روښانه ده، چي تابع د $x = 0$ په ځای کي خورا ټيټ ټکي(اصغري-) لري.

د ابحراني ټکي لپاره اړيين شرطونه:

1. د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کي د تابع مشتق د x_0 لپاره صفرځای لري، يعني دلته يو بحراني ټکی پروت دی.

-د تابع دويم مشتق: $f''(x) = 2$ دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکی مخ ته لرو.

بيلگه:

د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکي لري او باوري دي:

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = 2x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

گورو چی دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شنني څخه لاندې پيژند ته راځو

تعرف يا پيژند:
د $x = x_0$ په چاپيريال کي د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جگ ټکی په همدې ډول نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدی x لپاره باور ولري: $f(x) \le f(x_0)$ ($\Leftrightarrow$) په همدې ډول $f(x) > f(x_0)$
جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط): که په x_0 کي مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همغږیزې توابع

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله ۲ ۱۳ : (د يوه بافراطي ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):   که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y = f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x) = 0 \ , \ f''(x) \neq 0$ نو تابع $y = f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.   خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x) > 0$ خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x) < 0$

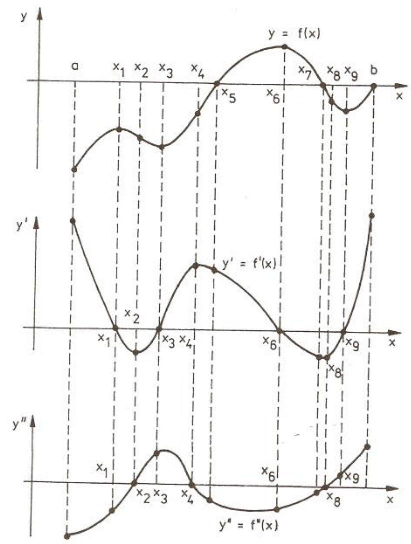
پوښتنې:

د لاندې توابعو انحرافي ټکي پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
2) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 1$
3) $f(x) = 7x^7 - 6x^6 6 + 4x^4 x^3 + 2x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له ښیٔ لور انحنا اوله کینې لور انحنا(مقعر او محدب)



فعالیت:

- په پورته شکل کې مقعریت(ننوتوال) او محدبیت(وتنوالی) وښایاست.
- په پورته شکل کې د مشتقونو له مخې مقعریت او محدبیت په ګوته کړی.

که په یوه اینتروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینتروال کې ګراف کینې کوړ شوی یا کینه‌ه انحنا لري او که دویم مشتق $f''<0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوړ یا ښی انحنا لري.

بیلګه:

ټول ګونګ تابع(راشنل تابع) f د $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کینې کوږدیٔ (کینه‌ه انحنا لري (ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوړ دیٔ (ښیٔ انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (له لومړی مشتق څخه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

د $x > \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 > 0$ لپاره کېن ګوړوال(کينه انحنا (ننوتى يامقعر)

د $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 < 0$ لپاره ښى کوږوالى(ښى انحنا(وتلى يامحدب))

بيلګه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ګراف يو هاى پارابول دى. د هاى پارابول کومه څانګه کينه کږه ده يا کينه انحنا لري(مقعر)، او کومه يوه يې ښى کوږوالى - يا ښى انحنا لري(محدب)؟

دويم مشتق: $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$; $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ صورت تل مثبت دى.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دى. د هاىپارابول څانګه ښى کوږوالى يا انحنا لري(وتلى يا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر (مات) مثبت دى.

هاى بارابول کينکوږ دى يا کينه انحنا لري(ننوتى يامقعر).

بيلګه: د دواړو توابعو $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{x^3}$ کوږوالى(انحنا) دې له دواړو لورو يو د بل سره پرتله شي. دواړه توابع د x>0 لپاره تعريف دي.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتقونه د $x \in R^{+}$ لپاره تعريف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی يا انحنا لري، دا يو ښي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $g''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کيڼ کوږ دی يا کيڼه انحنا لري. اړونده ګراف يو کيڼ کوږوالی يا کيڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

تمرينونه:

١ -- و ښاياست، چې د لاندې توابعو مقعريت او محدبيت کوم دي؟

$a) \quad f(x) = x^3 + 4x^2 + x$

$b) \quad g(x) = 2x^3 + 3x - 2$

٢ -- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع يو کيڼ کږوالی لري او په کوم کې ښی کږوالی لري.

$a) \; f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2 \qquad b) \; -2x^3 + 3x^2 - x - 4$

٣ -- د لاندې مات توابعو ګرافونه هايپاربول دي. د هاپارابول ځانګې کوم کږوالی لري؟

$a) \; f(x) = \dfrac{1}{4x+1} \qquad b) \; f(x) = 3 - \dfrac{3}{x^2}$

٤ -- په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع يو کيڼ او په کوم کې يو ښئ کږوالی لري؟

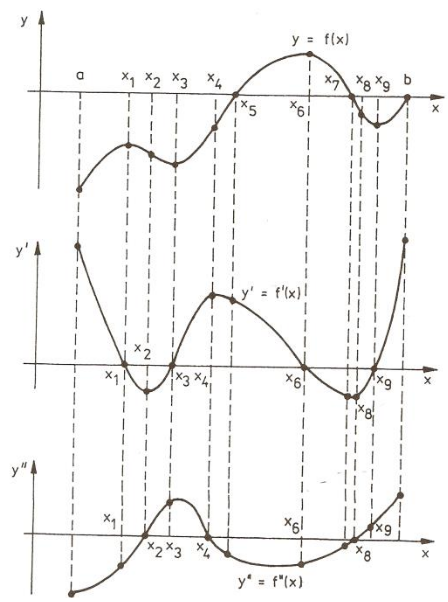
$a) \; f(x) = x \cdot e^{2-x} \qquad b) \; f(x) = \ln x^2$

٥ -- ولې د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع ګراف په ټل تلنه کې يوه ښئ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦-- ولې يو خلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره يو تلتلونی کينه انخنا(کږوالی) او ښئ انحنا لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي(اوړونټکي) Inflection Points



فعالیتونه:

- پورته څیره په ځیر وګورئ او وښایاست، چې چیرته یا په کوم ټکي کې منحني(له کینې و ښي لور ته) خوزښت - یا خپله د حرکت لور بدلوي؟

- د انعطاف ټکو شاوخوا هم فکر وکړئ، چې کوم ټکي غوره ټکي دي او د هغو له خویونو هم د

انعطاف ټکو خویونه وټاکئ.

- په شکل کې فکر وکړئ چې د انعطافټکي شاوخوا منحني څنګه ځغلي.

- د شکل په هکله په خپل فکر څه ووایئ او د خپل فکر په بنسټ خپل دلایل روښانه کړئ. موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چې: که د x_0 ځای کې ولرو: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$ ، نو یو ښی-کینې- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس(په ښټ): که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

دا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چې $f''(x)=0$ وي، دا چې دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f'''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

- شرایط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره یوائی اړیین یاضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

- شرایط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

ګورو چی $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

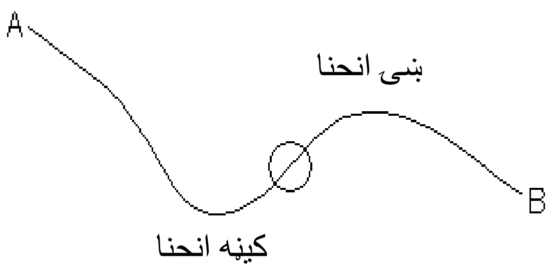
$$f'(x)=5x^4 \quad , \quad f'(0)=0$$
$$f''(x)=20x^3 \quad , \quad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=60x^2 \quad , \quad f'''(x)=0$$

ګورو چې دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه ونې:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسېږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د اندل حالت د ځغاستې په وخت کې په پام کې ولري. د کینې منحني(د کیڼ لورې د اندل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.



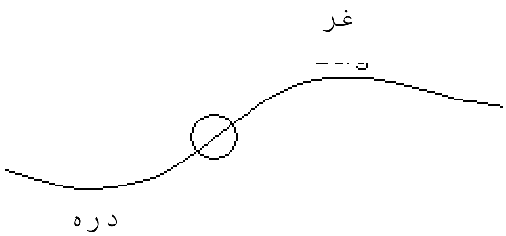
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کینې- او ښی منحني(کږې) ترمنځ باید د باسکل انډل نېغ ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کیڼې لورې و ښی لورې ته. دا د کیڼې او ښی منحني ترمنځ اوړیدنه یاد **انعطاف ټکی** بلل کیږي.

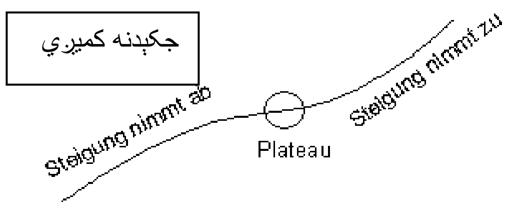
تاسو له بایسکل سره په یوه غونډۍ ځغلی.
وروسته له هغې، چې له تالې څخه تېرېږي، نو لار په جګېدو پیل کوي. په لومړي سر کې نرم او بیا په نیغه جګیږي، بیا په دې پسې جګوالی ښېرته کمیږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسیږي. یو چېرته په لار جګېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.

دا څېره بیا



د بایکل ځغلونکي بل حالت، چې له څنګ دیاګرام څخه یې رانیسو:
په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګېدنه لومړی کمیږي، چې له سره ښېرته جګه شي.
ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتآهواره). دې نسبتآ هوار ځای کې د ټوټه کرښې جګیدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.

دا څیره د ښېنتو نومونو سره بیا کښل...



له کیڼ ښي لور ته ژباړه: جګیدنه کیږي، هواره، جګیدنه زیاتیږي

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پیدا کړو.
دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع $f(x)$ لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع $f'(x)$ باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.
مخکی له دې چې یو لړ جملې د بحراني ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چې دا کلیمې تعریف کړو.

دواړه کلمې به د نسبي افراطي ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند:

په یوه چاپیریال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ یو کینې- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کینې- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y' = f'(x)$ ښخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري(یادونه ۴ دې پ‌ءتله شي) : چیرته چی $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چي د انعطاف ټکي موجود وي. مګرچیرته چی $f''(x) = 0$ وي ، د انعطاف ټکی شته کیدلی شي، خو اړیین یا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته ښخه لاندې جمله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

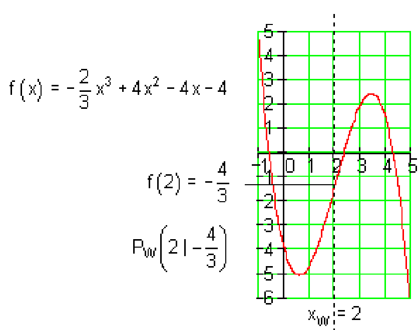
جمله: (د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)

که په $x = x_0$ کی د دریواره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که$f'''(x) < 0$ وي، نو یو کیڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کیڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلګه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف ټکی په نښه کوو.



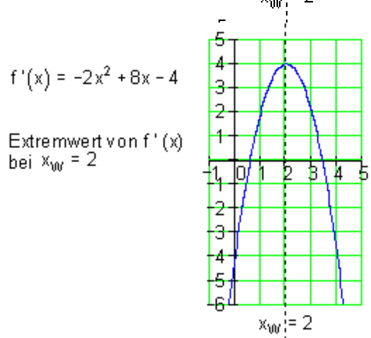
1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$

$$f''(x) = -4x + 8$$

$$f'''(x) = -4$$



2- دویم مشتق صفر کړئ.

$$f''(x) = 0 \iff -4x + 8 = 0$$

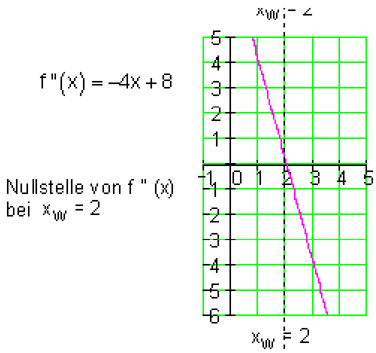
$$\Rightarrow x_W = 2$$

3- د انعطاف ټکي له مخي ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}$$

$$P_W(21-1.33)$$

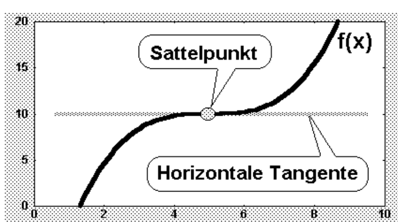
پام: په انعطاف ځای x_W کې د $f(x)$ ګراف کږیږي.

په یوه په خوښه ټکي x_0 کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:

$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کیڼ لور ته کږیږي(انحنا لري) دی.

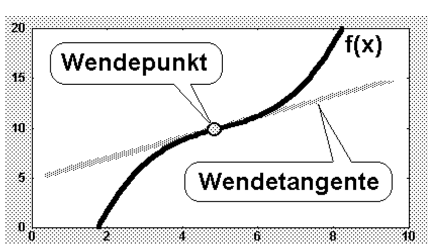
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ ګراف ښی لور ته کږیږي(انحنا کوي)

یو زینټکی <u>Der Sattelpunkt</u> څه شی دی؟



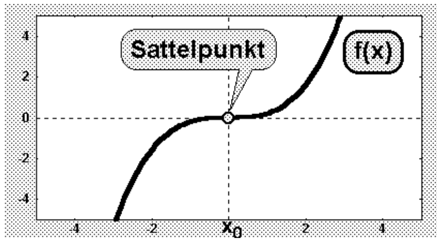
پېژند:

د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

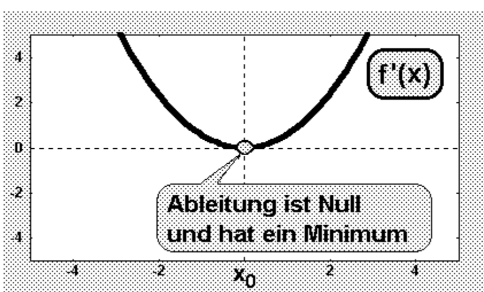


توضيح:

اوس فکر کوو، چې يو زينټکی ځنګه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چې يو زينټکی له بنې – و کينه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نيسو، يعنې لومړی مشتق: د زينټکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کميږي، په زينټکي کې صفر ارزښت لري، او له زينټکي څخه وروسته ېږته جګيږي.

يو زينټکی (د بنې – کيڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کيږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ يې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته يو نسبي ټيټکی (مينيموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق يعنې $f'(x)$ په زينټکي کې د صفر سره مساوي دی.

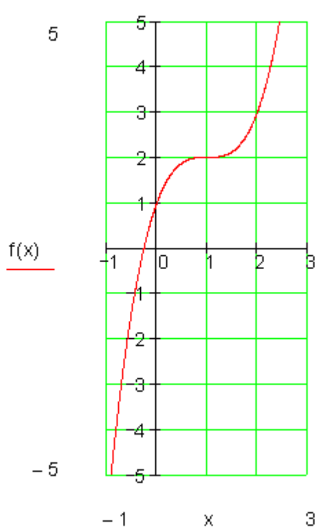
زينټکی(بنی-کيڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته يو نسبي مينيموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ بايد په صفر مساوي وي او مخنبنه له منفي و مثبت ته بدليږي.
له دې سره سم د زينټکي لپاره پوره کېدونکي قضيه ومېندل شوه:
د زينټکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د بنې –کيڼ- انعطاف سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف:د x_0 ځا کي لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کي لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دي معنا، چي دوم مشتق صفر دی، یعني $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بدیل(د ګرانو دوستانو وړاندیز)

زینټکی**Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي یو ځانګړی حالت زینټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګېدني سره.که د کیڼ لور ورتزدي شو فکر کېږي، چي، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که څوک د ښي لور ور نزدي شي فکر کوي، چي یو نسبي ټیټټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څېړو:
مشتق:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$$

$$f'(x)=3x^2-6x+3$$

$$f''(x)=6x-6$$

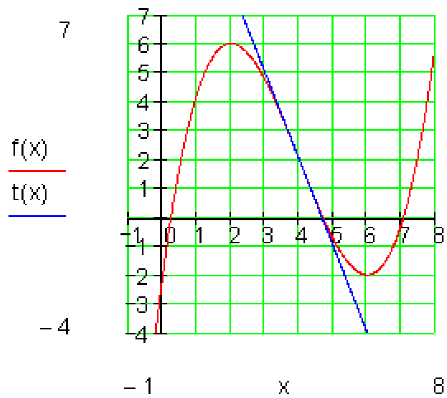
$$f'''(x)=6$$

$$f'(x)=0 \iff 3x^2-6x+3=0 \Rightarrow x_{1/2}=1$$

$f''(1)=6\cdot1-6=0$ $f'''(1)=6$	1=> د$x=1$سره د انعطاف ټکی	1=> د $x=1$ سره زینټکی

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.
دا چي د $f''(1)=0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینټکی دی.
د انعطاف ټکي پیداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کي تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پیدا کیږي لکه د تابع دګراف په یوه ټکي کې تانجنت، چي تانجنت مساوات تاکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x - 6 \qquad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 6 = 0$$

د $x_W = 4$ او $f'''(x_W) = \frac{3}{2} \neq 0$ د

$f(x_W) = f(4) = 2 \Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$ تانجنت

مساوات لپاره باور لري.

د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x) = f'(x_W)(x - x_W) + f(x_W)$$

د $f'(x_W) = f'(4) = -3$ سره په لاندې ډول

$t(x) = -x(x+4) + 2 = \underline{\underline{-3x+4}}$ دي

د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x) = -3x + 14$$

د انعطاف ټکي تانجنت پيداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کيږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ دلته تر څيړنې لاندې نه نيول کيږي.

پوښتنې

۱ -- د تابع f د $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}, x \neq 1$ سره د انعطاف ټکي پيداکونه

۲ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=\frac{2x-2}{x^2}$ $b)\ f(x)=\frac{x}{x^2+3}$

$c)\ f(x)=\frac{x^3}{3(x-1)^2}$ $d)\ f(x)=\frac{x^3-8}{4x}$

۳ -- و ښايئ، چې د $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}e$ تابع د انعطاف ټکی زينتکی دئ.

۴ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوړونټکي) پيداکړئ.

$a)\ f(x)-=x\cdot e^{-x^2}$ $b)\ f(x)=\ln\frac{1}{x^2+1}$

د منحني بحث : (Kurven Diskusion)

يوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بيا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چيرته له کيڼې لور و ښۍ لورې ته او له ښۍ لورې و کيڼې لورې ته ده.

فعاليت:

- تناظر تعريف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټيټ ټکي او د انعطاف ټکي يې پيدا اکړئ.
- x^3+x
- $3x^3+x+2$

ددې لپاره چې يوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پيژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وايو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې بايد سيستماتيک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعريف ساحه: د تابع ځيرنه يوائې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : بايد وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x)=-f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x\geq 0$ وڅېړل شي.
په ټوليزه توګه که ټول ريل تابع په پام کې ونيسو، نو ګورو چې که توان(د پولينوم درجه)يې جفت(جوړه) وي، نو پولينوم محوري متناظر دی او که توان(د پولينوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولينوم مرکزي متناظر دی.

انحرافي ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټيټټکی)
د جګټکی يا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:
$f'(x_1)=0 \ \wedge \ f''(x_1)<0$

انعطافټکی Inflection Point :
د انعطافټکواو همداسې زينټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:
$f''(x_W)=0 \quad \wedge \quad f'''(x_W)\neq 0$
زينټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوغوڅټکی):
د $x-$ محور سره ِغوڅټکی: $P_{xi}(x_i\,|\,0) \Rightarrow (x)=0$
د y محور سره غوڅټکی(صفرځای) ټاکي $P_y(0\,|\,y_s) \Rightarrow f(0)$
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی يو ارزښتجدول انځوريږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شميرل کيږي.

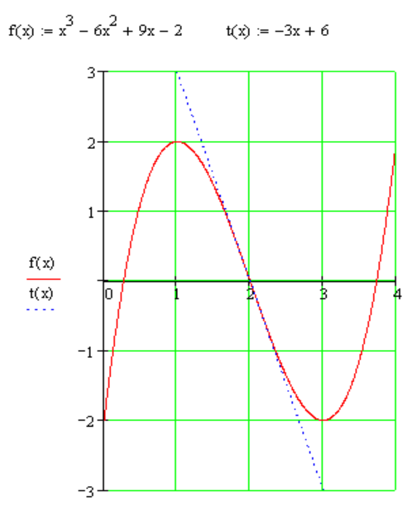
د انحنا حالت او يوغږيزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغير خوري.
په خوښه يوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0)>0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کينه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0)<0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)
يوغږيزوالی
1- که د ټولو $x\in I$ لپاره وي $f'(x)\geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جګيږي.
که د ټولو $x\in I$ لپاره $f'(x)\leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټيټېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې کره غښتلي مونوتون جګېدونکې ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلي مونوتون جګېدونکې ده.
د پېژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

مشتق کونه:



$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي انحرافي ټکي

$$P_{\min}(3|-2) \qquad P_{\max}(1|2)$$

انعطاف ټکی او تانجنت

$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره غوڅېکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغږیزوالی(مونوتوني یاجگ - ټیټوالی)   د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جگیږي.

په $I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جگیږي.

د انحنا حالت:

ښی انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کینه انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

تمرینونه:

په لاندې توابعو بحث وکړئ او غوره نقطې یې پیدا کړئ:

اول) د شمېرنې له لارې وښایاست.

دویم) په شکل کې په نخښه کړئ.

$a)\quad 2x^3+x^2+1$

$b)\quad x^3+x^2+3x$

$c)\quad x^3+2x^2+x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناټاکلو افادو یا وییینو=ګ\پولې

$$0.\infty\ ,\ \frac{0}{0}\ ,\ 0^{\infty}\ .\frac{\infty}{\infty},.....$$

که و لرو $x \neq 5;$ $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$، ومو لیدل، چې د داسې توابعو لیمیټ په پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایې، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کیدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود $x=0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

فعالیت:

- که تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ ورکړشوې وي.

اول - د تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ پوله یعني $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x}$ د پولې له درسه ، چې په لومړۍ بره کې لوستل شوې، پیدا کړۍ.د.

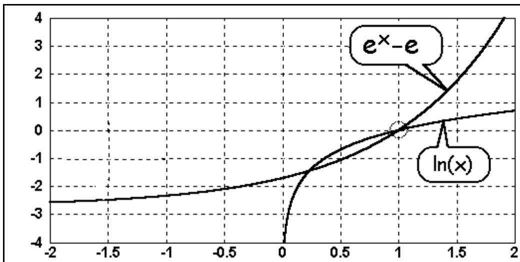
- پورته په ننوتنه کې و هڅېږۍ، چې د توابعو مشتقونه پیدا کړۍ.
- که ولرو $\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ ، نو د تابع مشتق د چېرته نیول کیږي، که د x=5شونی وي، نو مشتق یې ونیسۍ.

پیل ښیرنه: د $\frac{0}{0}$ حالت که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي یا صفر شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

په ځېره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعني د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه. ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)	

لیکندود(لیکنډول): د افادې

$$\frac{\text{Zähler} \to 0}{\text{Nenner} \to 0}$$

لپاره په حدشمېرنه کې لنډ لیکو: $\frac{0}{0}$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دۍ

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلې. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمېرل کېدی. دا کار د لوړې ریاضي سره دا شمېرنه شونی شوه(دبېلګې په توګه د لو پیټال قانون له مخې، چې پسبه وڅېړل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ونو ته تشريح:

اوس ښايو، چې د داسې توابعو شمېرل ولې ناشوني دي.

موږ بيا دا د تېر مخ بيلگه رانيسو:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

1- که هڅه وشي، چې حد پيدا کړو، داسې چې د $x = 1$ په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده $0:0$ به ترې لاس ته راشي. دا تعريف نه لري، $u = f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرويش اجازه نه شته.

2- ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمېرلو لپاره يعني د ناطق کسري توابعو پوله شمېرنه کې د چل يا د طريقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارلی، لکه په پورته بيلگه کې.

3- د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي ليد کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د 1 په لور وخوزيږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نژدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.0000000010\ 0}{0.0000000010\ 0} = 100$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه چې گورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مگر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني دی، (100)

د برنولي او د دې لو، پيتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

$$\frac{\sin 2x}{5x} \quad \text{او} \quad \frac{x^2+3x-10}{x-5}$$

د برونولي او د دو لو پيتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانگړی رول لوبوي. داحالت په ځانگړي ډول هلته رامنځ ته کيږي، چې مخرج او صورت همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$

هدفمنده نه ده. کيدی شي چې د ويش حد $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ وڅيړل شي، په کومو کی چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بيلگي په توگه تابع $f: \quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2 لري، سره له دې هم ليميټ شته دی.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شميرل کيدی شي، چی د صورت او مخرج توابعو له نتيجې څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضيې استعمال هم بلل کيږي.

د برنولي او د دو لو، پيتال قاعده:

Bernoulli and de l'Hospital

که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g'(x)\neq 0$ سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 د f ا و g یوصفرځاي وي،
د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$
ترڅو په ښي لور حد شته وي.
په ورته توگه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضي نيونى پوره کوي. د هر $x\in U(x_0)$ لپاره
یو x_m د $x_m\in(x_0,x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چې لرو:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0\ \wedge\ g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچې د $x->x_0$ سره $xm->x_0$ هم هڅه کوي.
د $x->oe$ په حالت کې $x=1/z$ ځای په ځای کوو. د زنځيري قضي په مرسته لاس ته راځي:

$$u=f(1/z)$$

د مشتق $du/dz=f(1/z)(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z})(\frac{-1}{z^2})$ سره، داسې چې لرو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کې $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي، نو په ویش بیاله سره دا
قاعده استعمالیږي. که سړي د $n-$ پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- -------

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چې $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع $n-$م مستق په معنی دی.

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلگه:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلگه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلگه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(جگعدد) α لپاره یو په خوښنه توان x^{α} د $x->oe$ لپاره په غښتلې توگه جگېږي، نسبت لوگاریتم تابع $1n$ ته $\alpha>0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قعاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلې جگېږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بڼه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

له تیپ یا بڼي ∞-∞ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته ددې لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼي $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د0<-x لپاره ښایي. په کوم کی چي ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندي لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0ته:

دلته د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x->0$ لپاره تر څېړنې لاندې نیول کېږي.

د بڼې بدلون یا فورم بدلون و بنسټ e ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}x^x=\lim_{x\to +0}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to +0}e^{x\cdot\ln x}=e^0=1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونې، د بیلګې په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او $x\to\infty$ د $x\in R^+$ سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}}=e^{\mu}$$

د $\mu=1$ لپاره لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

له بنې ∞^0 و بنې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته دا کارونه په یوې بیلګې روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$ سره

باید لاندې جدول کې پام وشي.

لاندې جدول د پورته ښوول شوو بڼویا ډولونو د بنې بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

بڼه بدلون یا لنډ: بدلون	$g(x)\to$	$f(x)\to$	تیپ(ډول)
$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$	0	0	$-\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

∞	0		$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\to\dfrac{0}{0}$ $\wedge (Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\to\dfrac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.

تمرینونه:

پورته کې دېرې بیلګې حل شوې. له هغوباید څه تمرینونه راوړل شي.

۱) لاندې پوله ارزښتونه وشمیرئ.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)$

د $x\to\infty$ لپاره د لاندې راشنل توابعو لیمیتونه د دې لو پیتال قاعدې له مخې وشمېرئ.

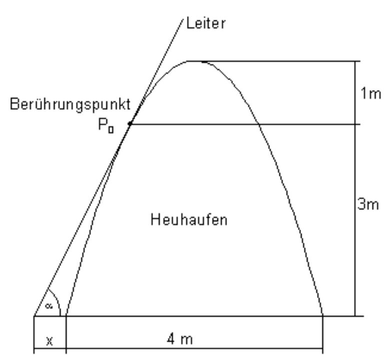
a) $f(x)=\dfrac{2x^3-x+4}{3x^3+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$

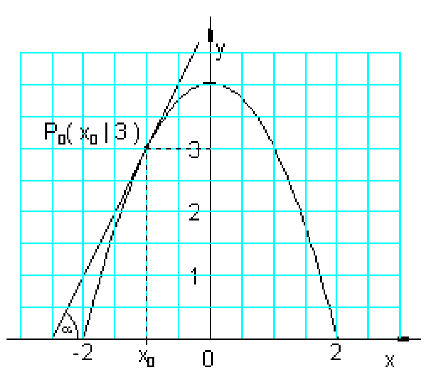
(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت لپاره د يوې تابع د استعمال بيلګې

له ځمکې څخه د وښو په ټوپۍ يوه زينه ايښول کيږي. دا زينه په درې متره جګوالي ټوپۍ لمسوي.



د وښو توپۍ دې د يوه کينکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ يې 4 متره سرور دی او 4 متره جګوالی لري. غواړو په دې يوه زينه کيږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاويه(کونج)بايد دا زينه کېښول شي؟
د وښو ټوپۍ له بيخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زينه کېښول شي؟



موږ د y محور داسې کا ږو،چې د پارابول له ککرې(څوکې) څخه تېرېږي.
پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمېرنه:
د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زينه ټوپۍ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1;\ f(x) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f'(x)=-2x$ سره لاس ته راځي:

$$f'(x_0)=f'(-1)=-2\cdot(-1)=2$$
$$\Rightarrow t(x)=2[x-(-1)]+3=\underline{\underline{2x+5}}$$

جوړه زاویه: $\tan\alpha=2\Leftrightarrow\alpha\approx 62.4^\circ$

د زینې او د وښو ټوپی تر منځ واټن د $f(x)$ د صفرځای او د تانجنت $t(x)$ د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x)=-x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 2$$
$$t(x)=2x+5=0 \Leftrightarrow x=-2.5$$

د x ارزښتونو -2.5 او -2 ترمنځ واټن 0.5 دی.

زینه د وښو د ټوپی له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د ستري ګټی(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د ستري ګټی مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چی په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کی ، چی په عمل کی کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومی چی موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کی په اختیار کې لرودی شو.

موږ یوائې هغه پروسی تر څیړنې لاندې نیسو چی د یوې واریابلی یا اووښتونې x په واك کی وي. دا د بل په واك کی د یوې تابع $y=f(x)\ ,x\in D$ له لارې څرګندولی شو.

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چې $f(x)$ مینیمال یا خورا کم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په څټ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسې لاس ته راوړل شي، چې $f(x)$ ماکسیمال یا خورا لوی شي. په قاعده کې اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك وار یا بل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیك پوهنې له امله، یواځې په ټاکلو پولو کې:

$$a \leq x \leq b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلې، په دې پورې اړه لري، چې آیا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \leq x \leq b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \leq x \leq b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخې پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینګ تړلې دی. دلته زموږ علاقه په ځانګړې توګه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

1- د بلواکیزو $y = f(x)$ ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفې ورکولو سره سم(موداليټي پرابلم).

2- د تخنیك پوهنې پولو په پام کې لرل $(*)$ دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

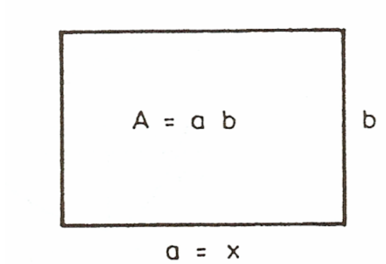
بیلګه: یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړ ي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یې L دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه(څلورګوډیزه هواره)، چې د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د مودالیټيArt und Weise پرابلم: غوښتنه مو د یوې ځلور ضلعي(څلورګوډۍ) پیداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي(څلور ګوډۍ) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ یې په b ښایو، د څیرې 14.20 له مخې).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په سر کې دوه اغیزې لرونکي یا تاثیر اچونکي لویېa او b دی.

د $L = 2a + 2b \ , \ b = (L/2) - a$

له امله یواځي یوې اغیزمنې(تاثیراچوونکي) لویي ته اړیو د بیلګي په توګه$a = x$، دا ګڼه (ستحهA)داسي ده $A = ab = x((L/2) - x)$ دا روښانه ده چې صدق کوي$0 \le x \le L/2$ له دې امله د سترې ګڼې پرابلم داسې دی.	

$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \qquad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله باید ماکس د 0 او L /2 ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یواځي x = L /4 په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y'' = f''(x) = -2 < 0$ دی.

په ریښتیا چی یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بیلګه: یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی تولسټ (تولډیری) M تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کیدې شي چي سملاسی د دې تولید په ټولسټ (ټولډیری) M کې تولید کړي، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته

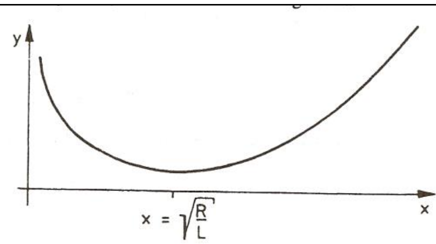
(c) ketabton.com: The Digital Library

د زېمتون(زخیره کوني) لګښتونه راپید کيږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر تل تولید په دې ډول تولید باندې دروړل، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه یی بولو. کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چې خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه ابنسول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیددیری M څخه نه شي سترېدلی ، لوئیدلی یا غتیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده :

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min}! \; (0 \leq x \leq M)$$

لومړی $f(x)$ دوه واره دیفرنځیال کيږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کيږي:

$f'(x) = L - R/x^2 \, , \, f''(x) = 2R / x^3$ د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$ پس لرو $x = R / L$ د $x \geq 0$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښې(منحني) تګلار په شکل کې انځور شوې. څرګنده ده: که $x=R/L<M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی.که $x=R/L>M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x=M$ لرو. نامساوت $x=R/L<M$ دا مانا لري $R/L<M^2$ په همدې ډول $R^2<M^2L$ پس مخ ته لرو: $x=R/L$ د $R<M^2L$ لپاره او $x=M$ د $R>M^2L$ لپاره؛ نو : که د چمتوالي لګښتونه , R زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید x = M صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه: د $M=10000, R=1000, L=10$ لپاره صدق کوي،

$R=1000<M^2L=108\cdot 10=109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x=R/L=1000/10=100=10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چې

10000 یوونه تولید کړي د $M=10, R=1000, L=1$ لپاره صدق کوي

$R=1000>M^2L=100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x=M=10$ ده، یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي.

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت:

یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په $K(x)$ سره یې ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع $K(x)$ د تولید سټ(ډېری) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمبښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځنې لګښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابع K مشتق.

(c) ketabton.com: The Digital Library

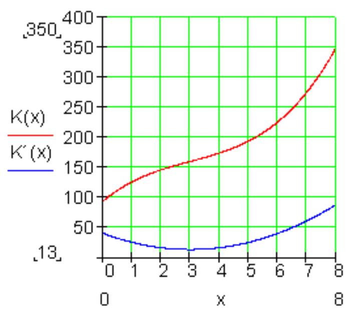
پېژند: د لګښت تابع $K(x)$ مشتق د مشتفارزښت $K(x)$ په نامه یادوو یا یې پوله لګښت $K'(x)$ هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکې، یو ارزښت جدول د $K(x)$ او $K'(x)$ لپاره وکاږی‌او په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د $[0\ ;\ 6]=1$ لپاره په1پل(قدو) پراخوالي سره.

ب: د ډېر کم لګښت زیاتوالی و ټاکی:



لاندې تابع

$$K(x)=x^3-9x^2+40x+94$$

لرو

مشتف ارزښت

$$K'(x)=3x^2-18x+40$$

ارزښت جدول

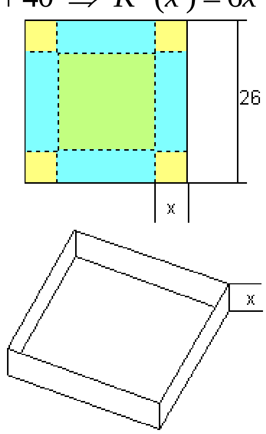
x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول $K'(x)$ په ککره(څوکه) کې پروت دی، یعني هلته چې تانجنت $K'(x)$ پروت یا افقي دی

$$K'(x)=3x^2-18x+40 \Rightarrow K''(x)=6x-18$$

دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره:

$$K''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$$



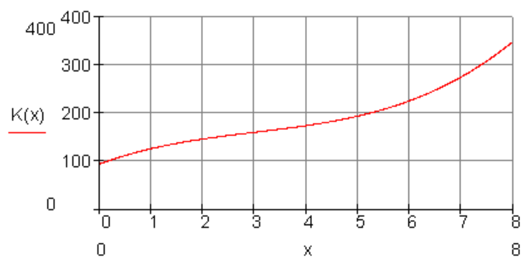
پوښتنې: دې، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه، چې 26 سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکئ، چې د بګس حجم(ډکی) v د x په واکوالي یا تابعیت کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښايي.

ب: ګراف وکاږئ او په نردې توګه يې
ماګسيما(خورا جګ) حجم و ټاکئ.

	د يوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع) $K(x)$ د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړيکي انځوروي، داسې چې $x=1$ د 100 ناروغانو معنی او $y=1$ دی معنی چې $1000 \in / \tan$ د روځې زر يورو ($1000 \in / \tan$). $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$

الف: د مصرف تابع په خپله کتابچه کې وليکئ.

ب: د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) يا دحدمصرف په نامه ياديږي. تاسو د لګښت زياتېدنه د ناروغانو په واکوالي يا تابعيت کې تشريح کړئ.(د $K(x)$ جګېدونه).
$K'(x)$ وټاکئ او ګراف يې په وضعيه سيستم (پروت- ولاړ-سيستم) کې انځور کړئ)

پ: د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زياتوالی خورا کم دی؟ دا قېمتونه وشمېرئ.

ټولګه:

د رول(Rolle) قضيه:
يوه د f تابع دې په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c \in (a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په واز اينتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې   ځيره په نوټ کې ده،

لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

پراخه شوې منځقضيه:

که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اينتروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه يوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضيه:

د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.

2. که د $f(x)$ تابع په اينتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$لپاره

- که $f(x)$ په اينتروال کې همغږيزټيټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.

- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې همغږيز جګېدونکې ده.

- که $f'(x)\leq 0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال Iکې همغږيز ټيټېدونکې ده.

- که $f'(x)>0$ وي ، د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې په کلکه همغږيزجګېدونکې ده.

- که $f'(x)<0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو يو نسبي ټيټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو يو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x=x_0$ په چاپېریال کې د $y=f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدی x لپاره باور ولري: $f(x)\le f(x_0)$ په همدې ډول $f(x)>f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):   که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وایي: چېرته چې $f'(x)\ne 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x=x_0$ کې دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x)=0$, $f''(x)\ne 0$ نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند: په يوه چاپيريال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ يو کيڼ- ښي- انعطافټکی په همدې ډول ښي- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):
که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ. ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال

پيزند: د زينټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهيږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت يې افقي (پروت) وي:

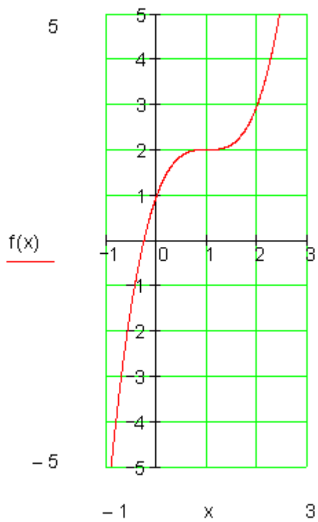
د پرتلي لپاره دې بيا يو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا يو مائل(نه افقي) تانجنت لري

په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):
که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

زينټکی(د اس زين) **<u>Der Sattelpunkt</u>**

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګېدني سره.که د کيڼ لور ورتزدې شو فکر کېږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لورې څېړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \ \Rightarrow \ x_{1/2} = 1$$

د برنولي او د دې لو، پيتال قاعده:
که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ سره او دټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f ا و g يوصفرځاي وي،
د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,
ترڅو په ښي لور حد شته وي.
په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

د څيړکي تمرينونه:

١ -- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{ax + 2}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \dfrac{1}{ax^2 + 1}$

٢ -- و څېړئ، چې ايا لاندې توابع په خپله پيزند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=\dfrac{e^x}{2+e^x}$ $\qquad b)\ f(x)=2x^5-7$

۳ -- لاندې ناراشنل توابع په یوغږیزوالي خویونو وڅېړۍ.

$a)\ f(x)=e^{x^2}$ $\qquad b)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

٤ -- د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پیداکړئ.

$a)\ f(x)=e^{-4x^2}$ $\qquad b)\ f(x)=(x^2-3)\cdot e^x$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $\qquad d)\ f(x)=\ln(x^2+1)$

٥ -- د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi \le 2\pi.$

$a)\ f(x)=\sin^2 x$ $\qquad b)\ f(x)=\sin(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{2})$

٦ -- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $\qquad b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $\qquad d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

۷ -- لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسې ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

$a)\ f(x)=|x|+x^2$ $\qquad b)\ f(x)=|x^2+2x-8|$

۸ -- د f تابع د $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بیداکونه

۹ -- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جګېدنه د $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۰ -- په صفرځاي کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جګېدنه لري.

۱۱ -- د $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ ګراف په کومو ټکو کې جګېدنه لري.؟

۱۲---- د $x0=-1$ ځاي کې د $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$ تابع ارزښت او د ګراف جګېدنه غواړو پیاکړو

۱۳ -- د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x \to \infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \qquad b)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱٤ -- د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱۵ -- د لاندې توابعو لپاره د پوره منحنیو مطالعه وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2} \qquad b)\ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c)\ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} \qquad d)\ f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

۱٦ -- د لاندې توابعو صفرځایونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3$

$b)\ f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

$d)\ f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}$

$e)\ f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

$f)\ f(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$

۱۷ -- د دریمې درجې تام راشنل ګراف د x -محور د 0 = x1=-2 , x2 او x3=4 په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې ګراف د P(2,-8) ټکي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د یوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x - محور د x1=0,5 او x2=3 په ټکو کې غوڅوي. د تابع برابرون څنګه دی، که پرسېره پردې ګراف د y - محور د P(0,9) په ټکي کې هم لمس کړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د یو تام راشنل تابع ګراف د وضعیه قیمت سیستم پیل او له $P(\frac{1}{2}/-\frac{15}{8})$. ټکي تېریږي. د تابع مساوات څنګه دي، که ګراف د x– محور هم د x1=-1 سره لمس کړي او په x2 = 2 کې غوڅ کړي.

۲۰ -- د لاندې توابعو صفرځایوه پیدا کړئ.

$a)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 4}$

$b)\ f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x}$

$c)\ f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x - 0.5}$

$d)\ f(x) \frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x}{x + 5}$

۲۱ -- د یوه مات راشنل f تابع د $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x + d}$, سره ثابتي a,b,c او d پیداکړئ، که د x1=-2,x2=-(1:2) او سره صفرځایونه پراته وي او تابع په x=0 کې یو تشځای ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

it $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}$, $(x \neq 0)$ l

۲۳ -- مات يا کسري راشنلf تابع په x1=1 کې د
سره درې ځله صفرځاي لري.

د يوې ساحې د ويش په مرسته وڅېړئ چې په همدې څلورمه(ربع) کې صفرځاي کې ځغلي او که صفرځاي څلورمه بدلوي.

۲٤ -- دا سې يو ترم وټاکئ، کوم چې د لاندې پريوديکي يا تل بېرته راګرځېدوني توابعو صفر ځايونه ورکوي.

$-2\pi \le x \le 2\pi$ l

د شمېرنې له لارې صفرځايونه ونوموئ، چې په انتروال 1 کې پراته وي.

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x \qquad b)\quad f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$c)\quad f(x) = 1 - \sin^2 x \qquad d)\quad f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

۲٦ -- ولې لاندې توابع صفرځايونه نه لري؟

$$a)\quad f(x) = \ln(x^2 + 3) \qquad b)\quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c)\quad f(x) = \frac{e^x}{x+1} \qquad d)\quad f(x) = 1 + \sin^2 x$$

۲۷ -- ولې کېدی شي چې يو تابع ډېر صفرځايونه ولري، مګر د y - محور سره يواځې يو صفرځاي ولري؟

۲۸-- د صفرځايونو د تعداد په هکله څه ويلاي شئ، که د يو f تابع لپاره په تعريفستې(- ډېری) کې يو f^{-1} معکوس تابع هم شته وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۹-- د y - محور سره د لاندې توابعو غوختکي وشمېرئ.

$a)\ f(x)=x^3+2x-1$ $b)\ f(x)=(x+1)\cdot\ln(x+1)$

$c)\ f(x)=\frac{x^4-3x^2+x}{x+2}$ $d)\ f(x)=\frac{4}{\sqrt{x^2+9}}$

$e)\ f(x)=(x-2)\cdot e^{x-1}$ $f)\ f(x)=e^{\frac{2}{1-x}}$

۳۰-- د یوه تام راشنل تابع $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ د $a_0\neq 0$ سره کېدی شي د y-محور غوختکي د ساده لوستلو له لارې و ټاکل شي.

په دې هکله دلایل راوړئ.

۳۱-- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جگېدنه د $f(x)=x^4-2x^3-x+1.$ سره.

۳۲--په صفرځاي کې $f(x)=x^3-x^2-2x$ تابع کومه جگېدنه لري.

۳۹-- په کومو ځایونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

a) $f(x)=x^2e^{-x}$ b) $f(x)=\ln(x^2+1)$

۴۰-- د a د کومو ارزښتونو لپاره د $f(x)=(x+a)\cdot e^x$ د گراف د $x_0=0$ په ځاي کې ۲ جگوالی لري؟

۴۱د لاندې توابعو ټول ځایزې(لوکال) خوراجگ ټکي وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ $b)\ f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

$c)\ f(x)=4x^3-18x^2+15x+7$ $d)\ f(x)=x^4-4x^2+5$

$e)\ f(x)=x^5-5x^3-20x$ $f)\ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{10}{3}x^3+6x^2-2$

۴۳-- د n-مې درجې یو تام راشنل تابع خورا زیات څومره لوکال (ځایز) افراطي ځایونه لرودی شي؟

۴۴-- ولې د جګتکي لپاره شرایط $f''(x)<0$ او اړیین نه دي؟

۴۵-- د لاندې توابعو لوکال(ځایز) انحرافي(افراطي) ځایونه وټاکئ.

$a)\ f(x)=\frac{2}{3}x^3+4x^2+8x-1$ $b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^4+1$

$c)\ f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^2+\frac{8}{3}x$ $d)\ f(x)=x^4-4$

۴۷-- د f تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi \le 2\pi.$

$a)\ f(x)=\sin^2 x$ $b)\ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

۴۸-- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

--- د fتابع د $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵۳-- په انتروال $0 \le x \le 2\prod$ کې د انعطاف ځایونه پیداکړئ.

a) f(x) = x + sinx b) f(x) = 2(1-sin2x)

۵٤-- لاندې توابع په x_0 کې په مشتقوړتیا باندې وڅېړئ.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\cos x & x\le 0\\ x^2+1 & x>0\ ,\quad x_0=0\end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ x^2 & x\ge 1,\quad x_0=1\end{cases}$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ e^{x-1} & x\ge 1\ ,\quad x_0=1\end{cases} \qquad d)\ f(x)=\begin{cases}\ln x & x\le 1\\ x-1 & x>1\ ,\quad x_0=1\end{cases}$$

۵۵-- ولې متمادیت د مشتقوړتیا لپاره اړین شرط، مگر مشتقوړوالی د متمادیت لپاره پوره کېدونکی شرط دی؟

۵٦-- په کوم دلیل تام راشنل توابع د $x \in R$ لپاره مشتقوړ دي؟

۵۹-- و څېړئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x} \qquad b)\ f(x)=2x^5-7$$

٦۱-- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کینې کږوالی لري او په کون کې بنی کږوالی لري.

$$a)\ f(x)=x^3-6x^2+5x+2 \qquad b)\ f(x)=-2x^3+3x^2-x-4$$

٦۲--د لاندې مات توابعو گرافونه هاپپاربول دي. د هاپارابول څانگې کوم کږوالی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x)=\dfrac{1}{4x+1}$ $\qquad b)\ \ f(x)=3-\dfrac{3}{x^2}$

٦٤-- ولې د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې يوه بنسئ انحنا(کږوالى) نه لري.

٦٥ ولې يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره يو تلتلونى کينه انحنا(کږوالى) او بنسئ انحنا لري؟

١٥٨(١٠٣): څنگه کېدى شي، چې د يوې f تابع د ١ . درجې مشتق څخه د د گراف په انحنا قضاوت وکړو؟

١٦٠(١٠٥): د لاندې توابعو حالت وڅېړئ، که $|x| \to \infty$ په لور لاړ شي.

$a)\ \ f(x)=x^3-4x^2-4x-5$ $\qquad b)\ \ f(x)=-3x^4+x^3-2x^2+x$

$c)\ \ f(x)=\dfrac{1}{3}x^5-x+6$ $\qquad d)\ \ f(x)=-\dfrac{2}{5}x^2-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}$

$e)\ \ f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{2}$ $\qquad f)\ \ f(x)=-x^3-x^2-x-\dfrac{1}{3}$

١٦٣(١٠٨):ولې د $x \to +\infty$ لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وينه نه شي کېداى:

$a)\ \ f(x)=x^3\cdot\dfrac{1}{\ln x}$ $\qquad b)\ \ f(x)=x\cdot e^{-x}$

١٦٧(١١٢): د جوړه(جفت) جگعدد(اکسپوننت) سره تام رينتونى تابع کوم ډول سيومتري لري؟

١٦٨(١١٣): د ناجوړه(طاق) جگعدد(اکسپوننت) سره يو تام رينتونى تابع تيک هلته د سر چينې سره ټکى سيومتري دى، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

١٧١(١١٦): لاندې توابع په بنسټ کې لوستل شوي سيومتري خويونه نه لري. وښايئ چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سره له دې هم سیومتریک دي.

$$a)\ f(x)=(x+2)^2 \qquad b)\ f(x)=1+\frac{1}{x}$$

$$c)\ f(x)=-(x+1)^2+3 \qquad d)\ f(x)=2+\frac{1}{x-4}$$

۱۷۲۱۷): لاندې تام ریښتوني اعداد په محدودیت وڅېړئ.

$$a)\ f(x)=x^2-2x+4 \qquad b)\ f(x)=3x^4-4x^3+12x^2-24x$$

$$c)\ f(x)=-(x+3)^2+1 \qquad d)\ f(x)=x^3-2x+1$$

۱۷۶(۱۲۱): د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x\to\infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ f(x)=\frac{2x^3-x+4}{3x^3+1} \qquad b)\ f(x)=\frac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$$

۱۷۸(۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د x=x0 په ځاي کې د تانجنت مساوات وټاکئ

۱۷۹(۱۲٤): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوې کربښې سره غبرگ دي؟

۱۸۸(۱۳۳):د لاندې تام ریښتوني توابعو د انعطاف ټکي(اوړونټکي) او د نورمالي مساوات ولیکئ.

$$a)\ f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3} \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+2x+10$$

۱۸۹(۱۳٤) د f_t تابع د انعطاف ټکي مساوات ولیکئ.

$$f_t(x)=\frac{4}{3}t^2x^3+3tx^2+3x \quad (t\in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹۲(۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنيو شننيز بحث وکړئ او ګرافونه يې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

په ټوټه ماتونو يا کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوموېش $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کربنيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ ...\ (x-x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3}\ \ ...\ \ \frac{N}{x-x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کيږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت: په پورته ننوتنه کې و ښایاست، چې دا ټوټه کسرونه چېرته تعریف لري؟

-- د یوه په خوښه پولینوم کسر ټوټه ونه او د تعریف ساحې ورکړئ.

بیلګه: اصلي پولینوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې څېړو .

د پولینوم ویش(لنډ: پولینوموېش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بیایي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمیرنو قاعدې له مخې کیدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه یې لاینیز (کرښیز-)ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضریبونو د پرتلي له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسیا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته باید د مساوي توانونو ضریبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 باید مساوي وي.

$$\begin{aligned} A+B+C &= 4 && \text{I} \\ A-3B-6C &= -1 && \text{II} \\ -2A-10B+5C &= 39 && \text{III} \end{aligned}$$

د فاکتور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$\begin{aligned} -8B &= -72 && \text{V} \\ -16B-7C &= -41 && \text{IV} \end{aligned}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B=-72 \Rightarrow B=3$

د $B=3$ په V کې ایښوونه: $-16.3-7C=-41 \Rightarrow C=-1$

د$B=3$ او $C=-1$ په I کې ایښوونه: $A+3-1=4 \Rightarrow A=2$

په ټوټه کوني فرمول کې ایښووني سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

ازمایښت:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)+3(x-5)(x+2)-1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}=\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه:

د لاندې اصلي پولينومکسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کړئ.

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x+6}\ ,\ b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}\ ,\ c)\ \frac{4x+10+12}{x^2+6x+8}$$

ب) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې مساوي لاينيز(کرښيز) فاکتورونه لري.

که د يوه اصلي پولينوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P\ (x)}{P_n(x)}$ د کرښيز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي، نو ددې کرښيزو فاکتورونو له پاره پولينوم لاندې بڼه لري:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښيزو فاکتورونو ټوټه کسرونو په بلده بڼه ورکول کيږي.

بيلګه:

د اصلي پولينوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښيزو فاکتورونو:

د پولينوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيدا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندي ټوټه کوني ته لاربنودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزوني له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضريبونو پرتله کونې له لارې.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \text{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \text{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \text{II}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دI ضرب له 4 سره او جمعه يې له IV سره : A = 2

د A = 2 ایښوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 ایښونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

تمرينونه:

د لاندې اصلي پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8} \qquad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$$

$$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1} \qquad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$$

پ) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولینوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولینوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کيدونکي ضريب ax²+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کيدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه دې کينول شي يا راوړل شئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د پولینوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دي په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښیزو ضریبونو:

لومړی حل دي $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پيدا کيږي.

بولینوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کوني ته بیايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چي مساوات x^2+2x+4 حقیقي حل نه لري، نو د حقیقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشوني ده.

نو له دي امله پولینوم کسر لاندې بڼه لري:

$$\frac{Ax}{x^2+2x+4}$$

د $\frac{c}{x+1}$ بڼي کسر سره یوځاي مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کوني ته بیايي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضریبونو A,B,C تاکنه د پرتله کولو له لارې:

$A+C = 5$ I

$A + B + 2C = 8$ II

$B + 4C = 9$ III

د III کمبنت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اوونتوني یا متحولي لري:

$A - 2C = 5$ IV

$A + C = 5$ I

مساواتIII منفي مساواتII :

د $C = 2$ په Iائېښوولو سره :

د $C = 2$ په III ایښوولو سره:

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

تمرينونه:

د لاندې اصلي کسري پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړی:

$a)\ \dfrac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \dfrac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \dfrac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج) نا اصلي پولينوم کسرونه:

که د يوه پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولينوم د مخرج له درجې څخه لويه وي، نو دا د پولينومويش له لارې په ټولناطق کسر او يوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بيلګه:

کسري پولينوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولينومونو ټوټه کړئ .

د پولينوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو يو نا اصلي پولينومکسر مخ ته پروت دی.

پولينوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتې کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عمليه) مخ ته بيايو.مخرج په کربنيزو ضريبونو ټوټه کړی:

د مساوات $x^2-2x-8=0$ له پاره حل $x_1=-2$ او $x_2=4$ لرو.

نو $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

د ټوټه کسر ټوټه کوني لپاره ځای په ځاي کوو: $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$
$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کووني په مرسته د A او B تاکل:

$$A+B=4 \qquad \text{I}$$
$$2A-4B=4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B=9 \Rightarrow B=\frac{3}{2}$

په II کې اينوول: $2A-4\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow A=\frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (بنتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندی بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

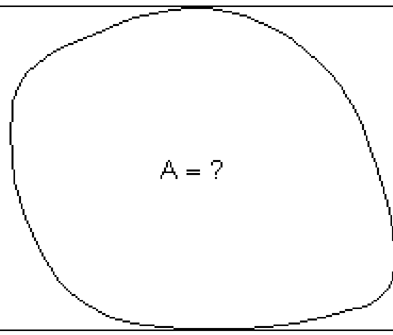
پوښتنې د لاندې پولينومکسرونو په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{3x^2+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $\qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $\qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيګرالشميرنې لپاره پيل راوړنې

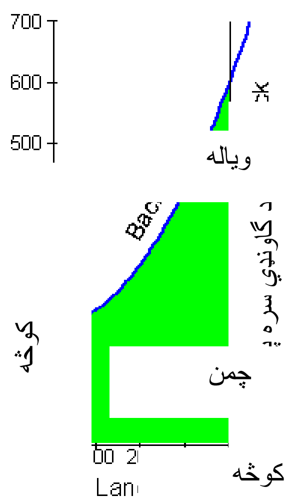


پخوانيو يونانيانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمېرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شميرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پيړۍپاي کې) د طبيعي علومو پوهانو د لايبنيځ او نيوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.

فعاليت:

- د پورته رابندې څېرې د سطحې د شمېرلو له پاره وړانديزونه وکړی.
- ايا تاسو د داسې سطحې شمېرلو سره بلد ياست ؟
- ايا تاسو دې ته ورنږدې سطحې مساحت شمېرلی دی؟ او که هو نو هغه وليکی.
- داپورته سطحه د وضعيه قيمت سيستم له لارې په څلورو نږدې برابرو برخو وويشئ او د انتيګرالونې په هکله يې فکر وکړئ.

بيلګه



دا څيره شوی چمن خرڅيږي. له پورته لور د ويالې را بند دی او له ښې لور د ګاونډي ځمکه ده او کيڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د يوې کوڅې را بند دی.

ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، بايد سطحه وپيژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه بايد نږدې پوره مګر هيڅکله کمه ونه شميرل شي.
اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پيسې بايد ورکړي، خو هيڅکله ځمکه د اصل څخه زيات ونه شمېيل شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره ټوټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.

$200 \cdot 50 = 10000$

$206 \cdot 50 = 10300$

$225 \cdot 50 = 11250$

$256 \cdot 50 = 12800$

$300 \cdot 50 = 15000$

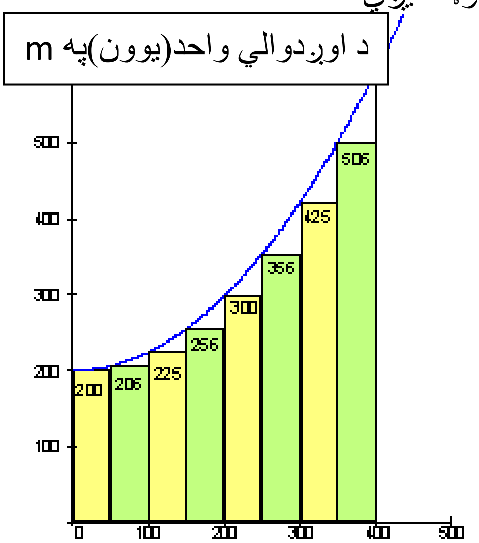
$256 \cdot 50 = 12800$

$425 \cdot 50 = 21250$

$506 \cdot 50 = 25300$

$\underline{123700}$

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو(پټیو) ټوټه کیږي

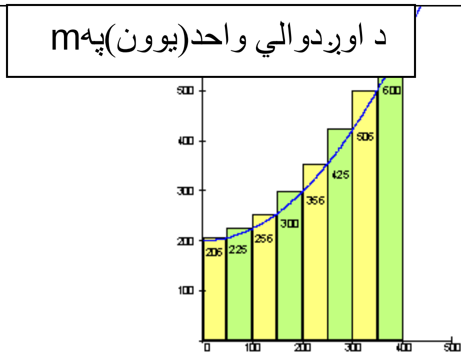


د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نزدې ***123700 m²*** ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$206\cdot 50=10300$$
$$225\cdot 50=11250$$
$$256\cdot 50=12800$$
$$300\cdot 50=15000$$
$$356\cdot 50=12800$$
$$425\cdot 50=21250$$
$$506\cdot 50=25300$$
$$600\cdot 50=30000$$
$$\underline{143700}$$

د د پلورونکي له پاره د تولې سطحې مساحت نزدې $\boldsymbol{143700\ m^2}$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2}=133700\ unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بیلګه کې دا ډول شمیرنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمیرنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

پوښتنې

د $3x^2+1$ تابع ګراف وکاږئ.

د انتروال [1,3] ترمنځ د تابع سطحه به نخښنه کړئ.

د دې ورکړ شوې سطحې پورته جمعه جوړه کړئ

د دې ور کړ شوې سطحې کښته جمعه جوړه کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتيګرالشميرنه Integralcalculation

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:
دا دانتيګرال هندسي مفهوم هم دئ.
په کارتيزي وضعيه قېمت سيستم کې د ګراف په سرچينه کې يوه کربښه رسموو.غواړو سطحه پيداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي.

د ريمن (ټاکلی) انتلګرال

دلته دې يوه څېره راوړل (د يوه ډنډ او يا.....)

فعاليت:

- يوه په خوښه هندسي څېره وکاږئ، چې په ترتيب له درې، پنځو او اوو کربښو رابنده وي. د د ې څيرو سطحه په ورسره بلد ډول وشميرئ.
- په يوه د وضعيه قيمت سيستم کې يوه کږه(منحني) وکاږئ او وهڅيرئ، چې سطحه يې په ورنزدي ډول پيدا کړی چې د x محور او منحني ترمنځ پرته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتیګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو ځوک یوې پردۍ ټولنې ته ورګډیږي یعني ددې پردۍ ټولنې خویونه خپلوي، یعني دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څیړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف:

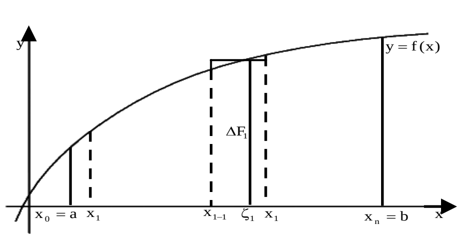
لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:

که یوه f تابع ولرو، نو د x مخور او تابع ترمنځ سطحې شمیرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کلیمي ته وده ورکړو. د سطحې کچوني یا اندازه کووني څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څټ یا برعکس کارونه یا عملیه ده.



یو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو او ترمنځ هواره (سطحه) وشمیرو داسې چې $f(x)>0$ وي. (څیره ۱ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اینټروال په n (نه اړیین) برابرو برخو انټروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} x_i < \ldots < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینټروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه $\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل سطحه (و لاړکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i (x) = f(\xi_l).\Delta x_i ;..........................(4,1)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعې (زیاتون) له لارې غوښتونکې، نزدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi) \Delta x_i ;..............................(4,2)$$

دا نزدیوالی تر هغې ښه کیږي خومره چې د اینټروال [a , b] ویش نری شي یعني $\max \Delta x \to 0$، هرخومره چې د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اینټروال [a , b]څنګه ویشل شوی او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینټروال [a,b] کی اینټیګرالوړ دی. دا د بیلګې په توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پیژند (تعریف ٤ . ١) : که لیمیټ

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F ; (\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کیدونکي لاندې(کښته)پوله او b د ایتیګرال کیدونکي پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرال کیدونکي اینتروال او f (x) (Integrand) (اینتیګرالیدونکی) او xد اینتیګرال کېدونکي متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

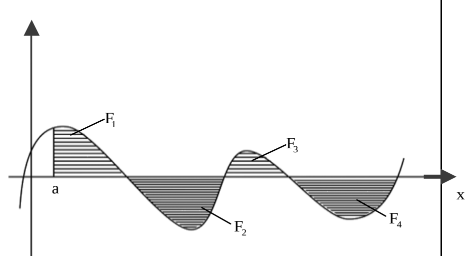
یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

موږ لرو: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\;dt = \int\limits_a^b f(u)\,du$

یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) 0 < باوري نه وي . که 0 > f (x) وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري .

که د f (x) = y (کږه - لکه په)ش ٤ . ۲) کی - داینتیګرآلونی په اینتروال کی د x-محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$



د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ . ۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بايدc له اينتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، يعنې ټکي a,b او c په يوه اينتروال کی بايد پراته وي، په هغه کی چې تابع f (x) اينتيګرالوړ دی.

موږ دا لاندې تعريف(پيژند) لرو :

پيژند يا تعريف ٤ . ٢ : f (x) په يوه بند انتروال[a, b] کې اينتيګرالوړ دی، نو باور لري: $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

د پيژند تعريف ٤ . ١ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

تمرينونه:

د لاندې توابعو ګراف و کاږئ او د ګراف او x محور ترمنځ د سطحې مثبته او منفي لور په نخښه کړئ.

الف : $4x^3 + 5x^2 + x + 6$ ،

ب: $x^2-4x-+16$ ،

پ: $x^4 + 5x^2 - 2x - 7$

بنسټيز- يا لومړنی تابع

$$F'(x) = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت

- په پورته مساوات کې به F (x) څنگه وليکلاي شو؟

- F (x) نسبت و f (x) ته څه بلل کيږي او په څټ، f (x) د F (x) څه بلل کئږي؟

په پورته دواړو پوښتنو کې فکر وکړي، چې پايلې يې دا لاندې دي:

ددې لپاره چې د مشتقنيولو او اينتيگرال نيولو ترمنځ اړيکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توگه تعريفوو:

پيژند (تعريف):

تابع y = f (x) دې په يوه واز اينتروال I کی تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرايط پوره کړي، د f (x) بنسټيز- ، ساده – يا لومړنی تابع بلل کيږي

په ساده توگه ليدل کيږي چې د يوې f (x) تابع لپاره نه يواځې يو بنسټيز تابع F (x) موجود دی، د بيلگې په توگه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکې په عمومي ډول

F (x) = x² + C، چې دا ټول مساوي مشتقونه f (x) = 2x لري.

د پورته ښوونو پايله، چې څنگه سړی د يوه متمادي تابع f (x) لومړنیتابع پيدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اينتروال I کی متمادي تابع وي، نو د a ∈ I لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ د f (x)، يوه لومړنیتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)$ هره بله لومړنۍ(بنسټيزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x)=F_a(x)+C,\ \ C\in R$$

ځواب : ښايو چې $Fa(x)$ د $f(x)$ بنسټيز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښايو چې د $Fa(x)$ لپاره د پورته پېژند شرايط باور لري. د $Fa(x)$ مشتق د $x\in I$ او $x\neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$\begin{aligned}F_a^{'}(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt\right]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_a^{x+h}f(t)dt\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(\xi),\ \ \xi\in[x,x+h]\end{aligned}$$

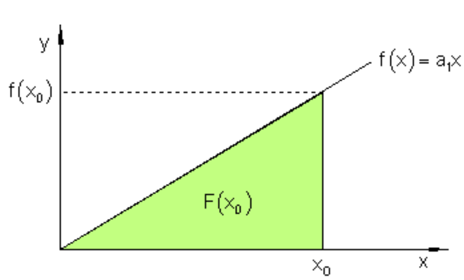
د ليميټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دی)

(د متماديت له امله $(f(\xi)\to f(x))$ $=f(x)$

سطحه او لومړنی تابع:

سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x)=a_1x$ ګراف په کارتېزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي.
يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي.
دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته



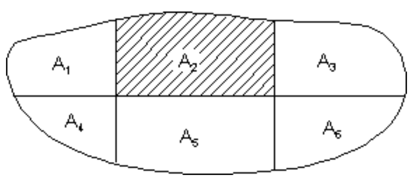
(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده پیدا کیږي: $A=\frac{g\cdot h}{2}$ زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیرو: $A\to F(x_0);\ g\to x_0;\ h\to f(x_0)=a_1x_0$	$F(x_0)=\frac{x_0\cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندې ډول دی: $F(x_0)=\frac{x_0\cdot a_1x_0}{2}=\frac{a_1}{2}x_0^2$

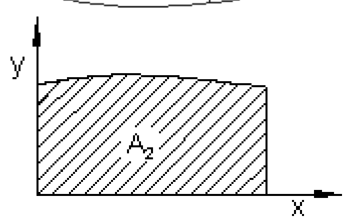
تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کې تشریح کوي یا ښایي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

د سطحې پرابلم:

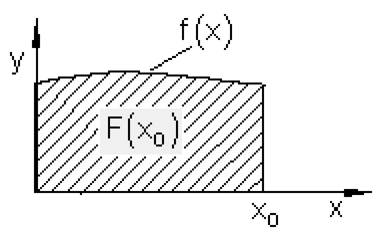
هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کږه کرښه رامنځ ته کیږي.



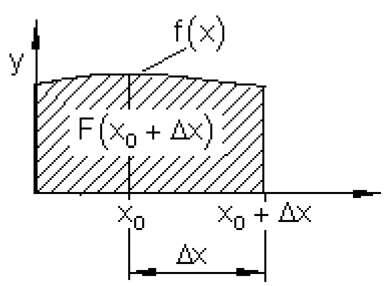
نورې ټولې رابندونې سیده کرښیزې دي. هره یوه د سطحې برخه(د بیلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحی په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.



که له کږوکرښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظیم کړي، لکه په پیلبیلګه کې؟

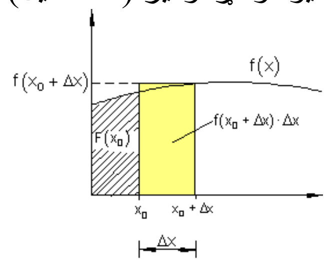


که داسې یو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه باندې تنظیم کړای شي.

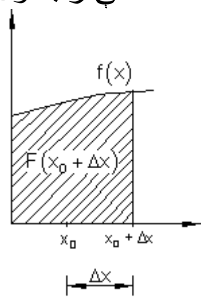


(c) ketabton.com: The Digital Library

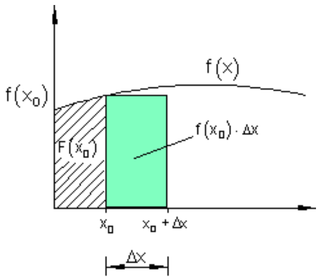
په يوه ولاړګوډيز (مستطيل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د ربښتوني سطحې څخه لويه ده



ريښتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوي سطحه له ريښتوني سطحې څه کوچنی ده.

که د سطحې پټې (يا کوچني مستطيلونه)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

$$\begin{aligned} F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x &\le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0) \\ \Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x &\le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x \\ \Leftrightarrow f(x_0) &\le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x) \end{aligned}$$

ليميټ يې نيسو:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) &\le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) \\ f(x_0) &\le F'(x_0) \le f(x_0) \\ f(x_0) &= F'(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کړې کرښې د تابع ارزښت $f\ (x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

موږ لیکو: $F'(x_0) = \dfrac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0)$ یا $\boxed{F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)}$

که موږ بریالي شو، داسې یو تابع F(x) پیداکړو چې مشتق یې د رابندې کړې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.

که موږ یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی. سړی کړی شي فورمال ووايي:

د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیداکړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انټیګرالول یې شمېرو.

د یوه ساده توان تابع په بېلګه د احساس له مخې یوه لار پیداکېدی شي، چې دا څنګه ایتیګرالوي.

توانتابع : $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربیږي.

انتیګرالونه (زیاتونه یاورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جګیږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کیږي.

دا همدا اوس ازمایو:

توانتابع: $f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{3}{2+1}x^{2+1} = \underline{\underline{x^3}}$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي یا را پیداکیږي یا راځیږي.

تمرینونه:

– و ښایئ، چې د F او دG توابع د f تابع لومړنۍ تابع وې ده.

$a)\ \ F(x) = x^3 + x + 4 \quad , \quad G(x) = x^3 + x + 1$

$b)\ \ F(x) = (x-3)^2 \quad , \quad G(x) = x^2 - 6x + 4$

$c)\ \ F(x) = \dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x) = \dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ \ F(x) = 1 + \sin x \quad , \quad G(x) = \sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناټاکلی انتیګرال

$$\int f\ (x\ )d\ x$$

فعالیتونه:

-- په پورته ځیره کې $\int$ په څه مفهوم دی

-- په تیر ه برخه کې مو F(x) د f(x)څه بللی وو او اوس به $F(x)=\int f(x)\,d\,x$ د لومړنئ تابع سره څه توپیر ولري؟

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنی تابع، یعني F(x) وپیژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دی).

مونږ د f(x) تابع د F(x) لومړنی تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f\ (x\ )\quad\Leftrightarrow\quad dF\,(x\ )=f\ (x\ )dx\quad\Leftrightarrow\quad F\,(x\ )=\int dF\,(x\ )=\int f\ (x\ )dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,d\,x$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

مونږ لومړنی توابع پلټو

بیلګه:
لومړنی تابع F(x) دې پیدا شي، چې مشتق یې f(x) = 2x دی.
قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

مونږ ازمایو: $F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د لومړنیو توابعو سټ(ډېری): بېلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د f(x) د لومړنییو توابعو سټ بولو.

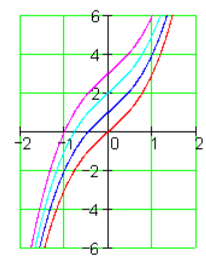
بېلګه: یو لومړنی‌تابع   F(x) دې پیدا شي، چې د هغه مشتق   f(x) = 3x² + 2 وي.

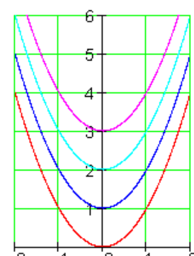
$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

د ټولو لومړنیو توابعو ډېری دې د منحنیو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپیر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ $\qquad$ $F(x) = x^2 + C$





تمرینونه:

د لاندې توابعو له پاره لومړني توابع پیدا کړئ او لاس ته راوړني یې د مشتق له لارې و ازمایئ.

$a)\ f(x) = x^2$ $\qquad$ $b)\ f(x) = 2x^2$ $\qquad$ $c)\ f(x) = x$

$d)\ f(x) = -2x$ $\qquad$ $e)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $f)\ f(x) = -\frac{1}{4}x$

$g)\ f(x) = x^3$ $\qquad$ $h)\ f(x) = 4x^3$ $\qquad$ $i)\ f(x) = 2$

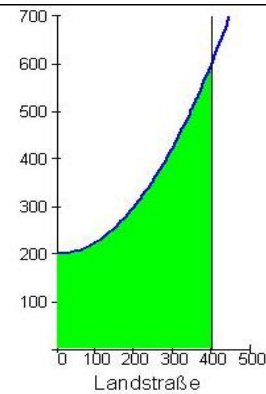
$j)\ f(x) = x + 1$ $\qquad$ $k)\ f(x) = x^2 + x - 3$ $\qquad$ $l)\ f(x) = x^n ;\ n \in N$

$m)\ f(x) = x^2$ $\qquad$ $n)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتيګرال شميرنه

ټاکلی انتيګرال همغه د ريمن انتيګرال دی، چې يوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شميري.



ټاکلی انتيګرال:

که f يو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتيګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتيګرال د پولي(حد) a تر پولي(حد) b يا د a او b حدونو ترمنځ يا انتيګرال په $f(x)$ باندي له a تر b) لاندې يوه لوريزه سطحه پوهيږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

فعاليت:

اول: ووايئ چې په پورته انتيګرال کې $f(x)$ څه نوميږي؟

G دې په بند انتروال $a \le x \le b$ کې د g(x) لومړنی انتيګرال وي، د $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ سره، نو

باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x)=\int_a^a f(t)dt=0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف:

f په انتروال a ≤ x ≤ b کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی : $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a).$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکي رامح ته کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_2^4 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې ربنتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د $F(b) - F(a)$ له امله د انتګرالوني ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه :

د ټاکلي انتیګرال $\int_1^3 x^2dx$ ارزښت و ټاکی. د توان قانون له مخې لومړنی تابع

یعنې $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^2}{3} + C\right]_1^3 = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C\right) = \frac{27}{3} + C - \frac{1}{3} - C$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$$

اساسات تکمیل کننده:

از د لیل F(b) – F(a) ثابت C انتگرال گرفتن از بین میرود. ازین بابت میتوانیم براي تعین ثابت انتیگرال بنویسیم C =0 .

مثال :

قیمت انتیگرال معین $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ را تعیین نمایید.

ثبوت: ما قرار زیل ثبوت میکنیم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

تمرینونه:

د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښتونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$$

$$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^0 e^x dx \qquad f)\ \int_0^{\pi} \sin x\, dx$$

$$i)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x}dx \qquad j)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad k)\ \int_{-2}^{2} x^3 dx$$

$$l)\ \int_2^6 (1+x)dx \qquad m)\ \int_1^2 (x^2 - x^5)dx \qquad n)\ \int_{-2}^{0}\left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}\right)dx$$

د ناټکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکې ثابتې کې یو له بل توپیر لري.

فعالیت :

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ تر منځ توپیر باندې فکر وکړئ؟

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ پایله څه ده ؟

- دا توپیر یې د یوې بیلګې په بنسټ روښانه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

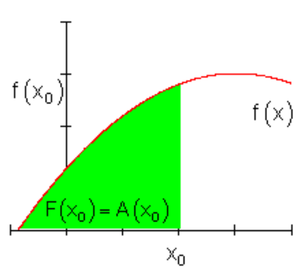
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

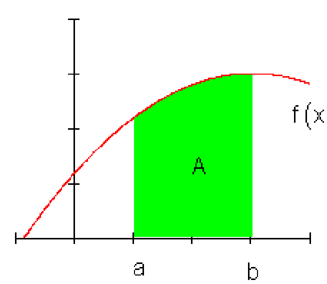
د مشتق- او انتیګرالشمیرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمیرنه د مشتقشمیرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

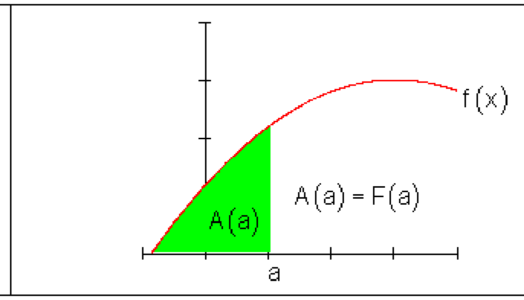


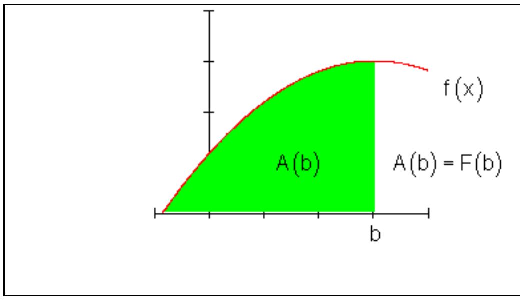


د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې

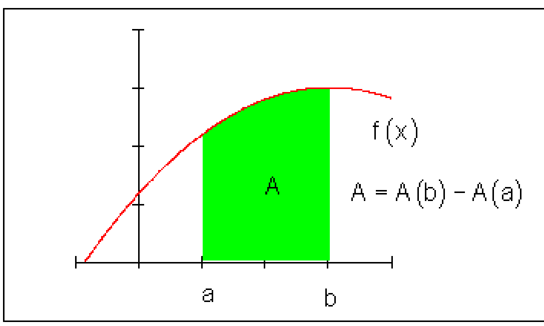
(c) ketabton.com: The Digital Library

او يوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعنې





د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې
پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت
څخه په ځاي (A(b)) b او سطحې په
(A(a)) a ځاي کې ،. يعنې
A= A(b) – A(a)په همدې توګه
F= F(b) – F(a) لاس ته راځي.



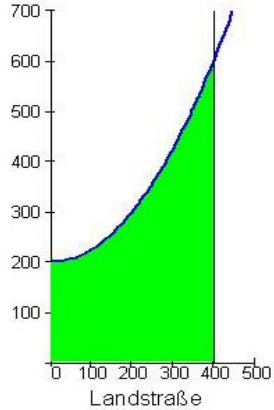
په انتروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشميرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره بنوولې:



$$A=\int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^3+200\cdot x\Big|_0^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400\underline{\left[\frac{1}{1200}0^3+200\cdot 0\right]}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400=\underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

تمرینونه: لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمېرئ.

$$\int_1^3 x\,dx\ ,\ \int_1^3 (x^2-1)dx\ ,\ \int_{-2}^{2} 4dx\ ,\ \int_3^4 dx\ ,$$

$$\int_0^4 (2x-5)dx\ ,\ \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx$$

د انتیګرالوني قاعدې

د ناټاکلي ایتیګرال انتیګرالوني قاعدې: په لاندې اینتیګریشن قاعدوکي د اینتیګریشن ثابته باندې صرف نظر کیږي‌دلته مساوات تر یوې ورجمع شوي ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده کیدی شي چې په ټاکلې انتیګرال کې ښوولې جملې سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چې د تیرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- ------------------------------------

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع (f (x په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو اینتیګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$
$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

تمرینونه: د لاندې توابعو انتیګرال ونیسئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\quad \int \frac{2x^3-3x}{\sqrt{x}}dx \quad , \; b)\int_1^2 \frac{\sqrt{x}-1}{x}dx$$

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو:

د تولیز اکسپوننشل تابع $\int e^x dx = e^x + C \quad (a\in IR^+, a\neq 1)$ لپاره لرو:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$$

بیلګه : دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3}dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+c = \frac{2^x}{8\cdot \ln 2}+c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2}+c$

تمرینونه:

لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int 3^{x+1}dx$ $b)\ \int 2^{-x}dx$ $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx$ $e)\ \int 2^x \cdot 3^x dx$ $f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$i)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $j)\ \int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $k)\ \int (1+2^x)dx$

د لوګاريتمي توابعو انتيګرالونه

بنسټ: د طبيعي لوګاريتم تابع $f(x)=\ln x(x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln xdx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټوليز لوګاريتم تابع $f(x)=\log_a x\ ,a\in IR^+,a\neq 1)$ لپاره $\int \log_a xdx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a}+c$ دی.

بيلګه :

ناټکلی انتيګرال $\int \ln 3xdx$ غواړو پيدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3xdx \div \int \ln xdx = x\cdot\ln 3 + x\cdot\ln x - x + c$$

$$\int \ln 3xdx = x\cdot(\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

تمرينونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لاندې ناټاکلي انټېګرالونه پيداکړئ

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\qquad$ $b)\ \int \ln \sqrt{x} dx$

$c)\ \int \log \frac{x}{2} dx$ $\qquad$ $d)\ \int 3\log \frac{1}{x} dx$

بنسټيز اينتيګرالونه په يوه جدول کې

د اينتيګرالولو او مشتق نيول د اړيکو په بنسټ کيدی شي چی د بنسټيزو اينتيګرالونو يو جدول ترتيب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټيزو توابعوبرعکس څرګنديږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x)=\int f(x)dx$	نيونه يا فرضيه
1	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x>0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x+C$	$a>0,\ a\neq 1$
5	e^x	e^x+C	
6	$\sin x$	$-\cos x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بيلګې :

د جدول او تيرو جملو څخه په ګټه لاندې اينتيګرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټيز توابعو بدليدلی شي .

a) $\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + C$,...............................1,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$, ...3,

c) $\int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0)$, ...3,

d) $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x}dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C$, ...(4,21) 6,

e) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi)$, (4,11) 9,

f) $\int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi)$ (4,12) 8,

g) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3}dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\ x \neq 0)$, $Nr.2$,

h) $\int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}$, ...5

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بدلون قانون Substitutionlaw

د ناټاکلي انتيګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

$$\int f(x)dx = \int (x^2 + 4x - 5)^n dx$$

فعاليت:

- د $\int (x^2 - x)dx$ انتيګرال ونيسى

- د $\int (x^2 + 5x)^3 dx$ انتيګرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتونېدی انتيګرال يې ونيسى.

تراوسه پورې مو فقط انتيګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنيو توابعو په انتيګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنيو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سيده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به وليدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اينوول (لنډ: بدلون) د فرضيو لاندې چې u = g (x) متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تيرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتيګراليدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چې يو فاکتور زنځيري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضريب) يی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سرِی د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي يا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاي په ځاي کويک: $u = g(x)$ مشتق جوړوي په

همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

۲۲۶ د بدلون قانون

د بريالي انتيګراليدو وروسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې اتنيګرال وشمپيرئ.

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بيلګه b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, مشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

وموليدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تيرې جملی سره سم د اينتيګرال تر مخ (موخه کيږ لور ده) ليکل کيږي.

بيلګه:

لرو $I = \sqrt{-3x+5}\; dx$

بدلون: $-3x+5=u$

(c) ketabton.com: The Digital Library

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b)\quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x-3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = -\frac{1}{2}du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^{u} du = -\frac{1}{4} e^{u} + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:
بیلګه: عواړو د $f(x) = e^{x}$ مشتق بیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x) = e^{x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^{x}dx = e^{x} + C$$

ګورو، چې $F'(x) = e^{x} = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^{2x}dx \neq e^{2x} + C$$

وي $F(x) = e^{2x} + C$ **دی، که** $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسی

۲۲۸ د بدلون قانون

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمایبنت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :
وښایی چې باور لري. $f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (x+1)^2dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^2dx=\frac{(x+1)^2}{3}+C$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

و ښايي چې باور لري: $f(x)=(3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(3x+6)^3dx$
بدلون: $u(x)=3x+6=u$
جوړوو: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=3 \quad \Rightarrow dx=\dfrac{du}{3}$
$\int f(x)dx=\int u^3\dfrac{du}{3}=\dfrac{1}{3}\int u^3du=\dfrac{u^4}{12}+C$
بېرته بدلون: $\dfrac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$
نو لرو: $\int(x)dx=\int(3x+6)^3dx=\dfrac{1}{12}(3x+6)^4+C$

تمرينونه: د $f(x)=x\cdot\ln(x^2)$ تابع انتيگرال وشميرئ.

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې

$$\int_3^8(x^2+4x-5)^n dx$$

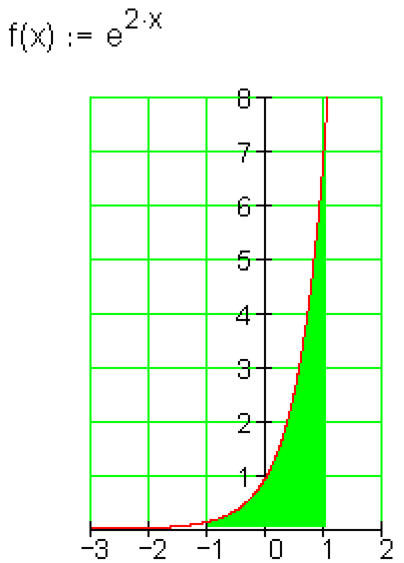
فعاليت:

- د $\int_a^b(x^2-x)dx$ انتيگرال ونيسى
- د $\int_1^5(x^2+5x)^3dx$ انتيگرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتوانېدى انتيگرال يې ونيسى.

ټاکلي انتيګرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

بيلګه : وښاياست: $f(x)=e^{2x} \quad \Rightarrow F(x)=\int_{-1}^{1}e^{2x}dx$ د انتيګرال حل د بدلون له لارې:	

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱ – بدلون $u(x)=2x$

۲ – د dx په ځای کیږدی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \quad \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

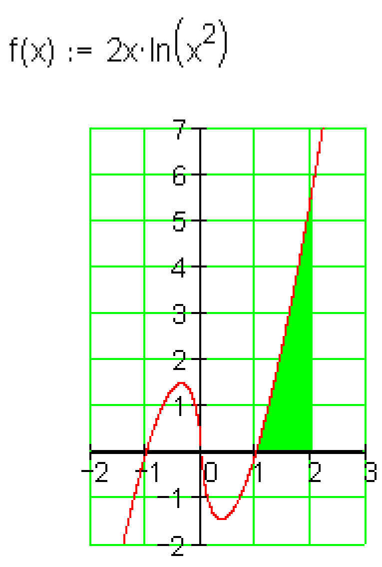
۳ – د پولو بدلون

- لاندي پوله $u(-1)=-2$
- پورته پوله

۴ - په انتیګرال کي ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^{u}du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left[e^{2}-e^{-2}\right]=\underline{\underline{3.627}}$$

بیلګه :



$$f(x)=2x\cdot\ln(x^{2}) \quad \Rightarrow F(x)=\int_{1}^{2}2x\cdot\ln(x^{2})dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x)=x^{2}$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2x \quad \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولي بدلون

- لاندې پوله $u(1)=1$
- پورته پوله $u(2)=4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_{1}^{4}2x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du=\int_{1}^{4}\ln(u)du=\left[u\cdot\ln(u)-u\right]_{1}^{4}$$

$$=\left[4\cdot\ln(4)-4\right]-\left[1\cdot\ln(1)-1\right]\approx\underline{\underline{2.545}}$$

تمرين: لاندې انتیګرالونه وشمیرئ یا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ - $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$ ۲ - $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

۳ - $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$ ۴ - $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

۵ - $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$ ۶ - $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

۷ - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ ۸ - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

۹ - $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ ۱۰ - $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

ټوټه انتیګرالونه

$$f(x).g(x) = x.\ln(x^2)$$

ټوټه انتیګرالونه، چې ضرب انتیګرالونه هم بلل کیږي، په انتیګرالشمیرنه کې د لومړنیو توابعو ټاکلو یا شمیرلو لپاره امکان دی. دا کیدی شي د مشتقشمیرنې د برعکسکونی په څیر وګڼل شي.

فعالیت:

- څه باید وشي، چې دا پورته په ننوتنه کې تابع انتیګرال نیونه شونې شي؟

___ ایا دا پورته ننوتنه کې راغلي بوښتنه دا تر اوسه ورسره بلدې لارې یعنې د (بنې) بدلون له لارې حل دی؟

د ټوټه انتیګرالونې له پاره لاندې قانون کاروي، چې د متمادي (نه پرېکیدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا قانون ټیک هلته ګټور دی، که دf مشتقکونی سره یو ساده تابع منح ته راځي.
پیل
د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چی لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندی انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالبرړ تابع $g'(x)$ او همداسی یو ساده مشتقوړ تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{او} \quad g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:
اوس دی u او v په خوښه توابع وي.U او V دې د u او V لومړني توابع وي ، او همداسې دې u' او v' د u او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړيتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړيتوب لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طريقه)
د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه :
کله کله کېیدی شي ګټور وي، چې د مساوات ښی لور ته ټوټه انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بیرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کیږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، **نو ترې لرو:**

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که دواړه لورې په 2 وویشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x).\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)+C$$

بیلګه ۲ :

د ځنو انتیګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) **له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بیلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کیدی شي دا بل ترم ،،له منځه یووړل شي،،.**

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کیږدو او د f(x) له پاره، **د انتیګرال لاندی ترم ، نو تری لاس ته راځي:**

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= [e^x\cdot(2-x^2)]-\int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)]+[e^x\cdot 2x]-\int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)]+[e^x\cdot 2x]-[2\cdot e^x]\\ &= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\ &= [e^x\cdot(2x-x^2)]+C\end{aligned}$$

بیلګه ۳ :

که تر انتیګرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسیږي(نه پایول کیږي)(نه ختمیږي) کېدی شي کله کله د ورزیاتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضریب "1" ټوټه انتیګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f(x)=\ln(x)$ او $g'(x)=1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x &= x\cdot\ln(x)-\int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot\ln(x)-\int 1\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot\ln(x)-x+C\end{aligned}$$

.

جمله :

موږ د دې لاندې انتيګرال نيسو:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv-\int v\,du\\ &= x\sin(x)-\int \sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x)+\cos(x)+C.\end{aligned}$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتيګرالونې د استعمال سره د انتيګرالونو لکه $\int x^3\sin(x)\,dx$

او $\int x^2 e^x\,dx$ کيده شي په همدې لار حل شي:

يوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x\cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بیلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$ نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه: دا لاندې انتیګرالونه وشمرئ.

اول: $I = \int x \cos x \, dx$ ، دویم: $I = \int x^2 \cdot e^x \, dx$

دریم: $I = \int \ln x \, dx$, څلورم $I = \int e^x \cdot \cos x \, dx$:

د ټوټه ـ ، یاراشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ تابع انتیګرال نیول

فعالیت:

-- د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول یعنې څه ؟

- د پورته تابع تعریف ورشو به نخښه کړئ.

د دې انتیګرال نیول تر واسه په ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو x1 = -2 او x2 = -4 سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کیږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)\ (x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې توګه پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزیږي او لاس ته ترې راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{[Ax-4A+Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]}=\frac{[A(x-4)+B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]}=\frac{[(A+B)x-4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعني کيڼ لور ته (A+B) افاده بايد پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځ**خه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:**

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

ليکلی شو :

$$\int\left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right]dx=\int\left[\frac{-1}{(x-2)}\right]dx+\int\left[\frac{8}{(x-4)}\right]dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ: $f(x)=\frac{1}{x}\ \rightarrow\ F(x)=\ln x$. دا چې طبيعي لوګايتم فقط له مثبت اعدادو شميرل کيږي، نو يواځې ارزښتونه نيسو.

$$\int\left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right]dx = -1\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع بايد لومړی په تول راشنل تابع او اصلي مات راشنل تابع ټوټه شي. دا د ټوټه کسرونو ټوټه کوونې له لارې کيږي يا صورت نيسي.

بيلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکې مربع تابع په صفرځايونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښيزو فاکتورونو تحزيه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بيا يې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضريبونو پرتلې کوني له امله، چې د x ترمخه يعنې کيڼ لور ته له (A+B) افادې ځخه بايد اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او يا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې يې حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو ليکلی شو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \int [\frac{-0.2}{(x-2)}]dx + \int [\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړئ :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

دا چې طبيعي لوګاريتم فقط د طبيعي اعدادو شميرل کيدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=-0.2\ln|x-2|-4.8\ln|x+3|+C$$

تمرينونه :

لاندې انتیګرالونه د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له طريقې وشمېرئ

$$a)\ \int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} \qquad b)\ \int\frac{x-2}{x^2-6x+13} \qquad c)\ \int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}$$

ناپاي انتیګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتیګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتیګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتیګرال څخه غږېږو. په يوه مناسب ډول ناپای انتیګرال د عادي انتګیګرال د حد په څېر تعرفيږي. په دې توګه په زړه پورې پوهيدنې لاس ته راځي د بیلګې په توګه، چې څنګه د منفي توان د پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسيدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_1^\infty x^{-2}dx=1 \text{ او } \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2$$

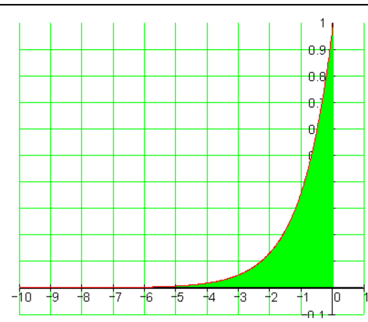
هم او د دې معکوس انتیګارلونه

$\int_1^\infty x^{-1}dx$ **او**

$\int_0^1 x^{-1}dx$ **ناپاي ته ځي يا له ټولو حدونو**

اوړي

يعنې د ناپای په لور ځي..



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = e^x$ ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty ; 0]$ کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعنې

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتېګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a ; b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.
فورمال دا په لاندې ډول بریښې:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمیرلو له پاره دا په لاندې ډول بریښې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلگه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^u \frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلگه:

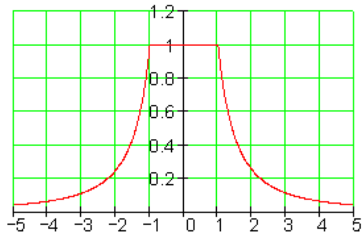
د یوه یوځاي ایښول شوې یا یو ځاي شوې تابع بیلگه لرو:

د $x<-1$ لپاراه د $-1\le x\ 1$ لپاره د $x > 1$ لپاره	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال په برخو وېشنه یا ټوټه کونه:
لاندې د انتیګرالونو تمعه دي و شمیرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$



لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتیګرال باید فقط یوځل وشمیرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

تمرینونه:

۱ -- د $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ تابع انتیګرال وشمیرئ، که د ناپاي په لور لاړشي.

۲ – و څېړئ چې ایا لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پوله ارزښت لري؟

a) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$

b) $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

c) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx$

۳ – د کومو توانونو p لپاره دا نا ټاکلی انتیګرال $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ پوله ارزښت لري.

٤ – لاندې انتیګرالونه د یوه انتیګرال پولې لپاره تعریف نه دي، و څېړئ، چې ایا دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی انتیګرال په دې انټروال کې پوله ارزښت لري.

a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$, $I = [0;1]$ b) $f(x) = \ln x$, $I = [0;1]$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, $I = [1;2]$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $I = [-1;1]$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-8}$, $I = [0;2]$ f) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$, $I = [0;1]$

ټولګه

د انتیګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو د x محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انټروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د a څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=a او x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

پېژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اینټروال [a , b] کې موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینټیګرال بولو، یا F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته a د اینټیګراله وني لاندې(کښته)پوله او د b

(c) ketabton.com: The Digital Library

ايتيګرالوني پورته پوله بلل کيږي او [a,b] د ايتيګرالوني اينتروال او((Integrand) (
x) fاينتيګرالپدونکی) او xد اينتيګرالوني (Integrationsvariable) متحول بلل
کيږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اينتيګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور
لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پيژند يا تعريف ٤ . ٢ : f (x)   په يوه بند انتروال[a, b]   کې اينتيګرالوړ دی، نو باور
لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پيژند تعريف 3.2: تابع y = f (x) دې په يوه واز اينتروال I کی تعريف وي. هر يوه
هلته موجوده مشتقوړ   F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرايط پوره کړي، د f (x
(بنسټيز- ، ساده – يا لومړنی تابع بلل کيږي

ټاکلی انتيګرال:

که f يو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتيګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتيګرال د a تر
b او په پولو يا حدونو يا انتيګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې يوه لوريزه سطحه
پوهيږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعريف:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په یوه ایتروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده),, (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضربونو انتيګرالونه

که د دوه توابعو د ضرب انتيګرال د ورسره بلدو متودونو يا لارو شميرو، نو زيات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln(x^2)\right) dx = ?$$

د ښېرکي تمرينونه:

۱ - لاندې نااصلي پولينومونه دې د يوه ټول ګويا عدد پولينومونو او يوه اصلي پولينوم د جمعې په څېر وليکل شي.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۲ - لاندې پولينومونه دد جمعې په څېر وليکئ

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6} \qquad b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$$

$$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8} \qquad d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$$

$$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x} \qquad f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$$

۳ – د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8} \qquad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$$

$$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1} \qquad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$$

٤ ـ د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

٥ ـ د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ړرکړئ.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8} \qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$$

$$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1} \qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$$

٦ ــ و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \quad f(x)=4x+4$$

$$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$$

$$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$$

$$e)\ F(x)=\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ - وښايئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتيګرالونه پيداکړئ او ټيکوالى يې و ازمايى.

$a)\ \int x^3dx \qquad b)\ \int 7dx \qquad c)\ \int xdx \qquad d)\ \int (1-x^2)dx$

$e)\ \int (x+\frac{1}{x})dx \qquad f)\ \int (e^x+\cos x)dx \qquad g)\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad h)\ \int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \qquad k)\ \int (2+e^x)dx \qquad l)\ \int (1+\ln x)dx \qquad m)\ \int (\sqrt{x}+\sin)\,dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx \qquad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \qquad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad i)\ \int_{-2}^2 x^3dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx \qquad k)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx \qquad l)\ 0\int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3})dx$

۱٦ = د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشميرئ او ارزښتونه پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und -\int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \quad \wedge \quad -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0} \sin x dx \quad \wedge \quad -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx$$

---

۱۷ – هر دوه انتیگرالونه د یوه انتیگرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3} 3x^{2}dx + \int_{5}^{3} 3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

- د لاندې ټاکلو انتیگرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8} \sqrt{1+x}\, dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x} dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi} \sin^{2} x dx$$

۱۹ – د کوموx ارزښتونو لپاره لاندې انتیگرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x} 5t^{4}dt \ , \quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^{t}dt \ , \quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتیگراند توابع ته د انتیگرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2}\ ,\ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x}\ ,\ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2} x}\ ,\ a=0 \qquad d)\ f(x)=2\ ,\ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیگرال په استعمال سره لاندې انتیگرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx, \quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad f)\ \int(\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx, \quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx, \quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx, \quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx, \quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\ \ ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt, \quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینتیګرال بدلون وروسته یي اینتیګرال ونیسی:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx, \quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx, \quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx, \quad e)\ \int(-2-2\tan^2 x)dx, \quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیری:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx, \quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx, \quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi \sin x\ dx, \quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2}(2x-1)\,dx, \quad h)\ \int_0^8\left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx, \quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du, \quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}dx, \quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې یي اینتیگرال وشمیري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\ e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\ f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int \frac{3x\,dx}{-x^2+1},\quad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

$$a)\ \int \frac{dx}{1+4x^2},\quad b)\ \int \frac{dx}{2+4x^2},\quad c)\ \int \frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\quad e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\quad f)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int \frac{dx}{x^2-10x+34},\quad h)\ \int \frac{dx}{3x^2-6x+30},\quad i)\ \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲۵- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې یي اینتیګرال وشیمرئ

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$a)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3},\quad b)\ \int_{-1}^{0} e^{3x}dx,\quad c)\ \int_{0}^{2} 2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\quad e)\ \int_{e}^{e^x} \frac{1}{x}\ln\times dx,\quad f)\ \int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\ dx,\quad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې ټوټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int 0,2x \cdot \sin x \ dx,\qquad b)\ \int 4x^{3} \cdot \ln x \ dx,\qquad c)\ \int \cos^{2} x \ dx$

$d)\ \int \cos x \cdot \sin x \ dx \qquad e)\ \int x^{2} \cdot \sin x \ dx \qquad f)\ \int x \cdot (\cos x + 1)\, dx$

$g)\ \int x^{3} \cdot e^{x} \ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x \ dx,$

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په   ځلورم ځپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د سطحې مساحتA ښايي ، چې له منحني y=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي يو چې y=f(x) د اینتیګرال اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

فعالیت:

--د يوې په خوښه تابع د منحني يا کرښې او د x محور ترمنځ او يا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړانديزونه وکړئ.

- دا هم په پام کې د شمرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني يا د تابه کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- يوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- يوه په خوښه تابع وليکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بيا وڅېړئ، چې ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: که مو‌ږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.
دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

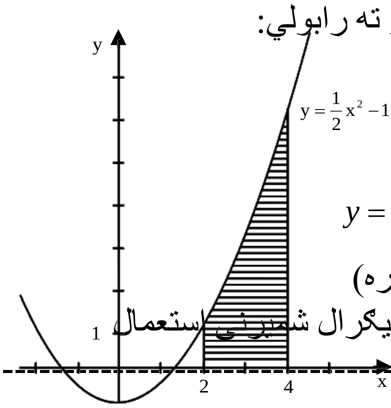


Bild 21,3

بېلګه ۵ . ۱ :
د سطحې مساحت د

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \;,\; y = 0 \;,\; x_1 = 2 \;,\; x_2 = 4$$

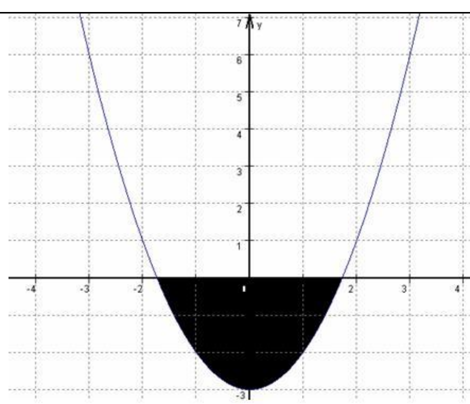
ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېره)

$$A = \int_2^4 (\frac{1}{2}x^2 - 1)dx = (\frac{1}{6}x^3 - x)\Big|_2^4$$

$$= \frac{1}{6}.64 - 4 - \frac{1}{6}.8 + 2$$

$$= \frac{22}{3}$$

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

	بdلګه ۵ . ۲ : د $f(x)=x^2-3$ ګراف د x محور سره یوه سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تګلار:	

۱ - د دي لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دي لپاره چې د انتیګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

---

۳ – اوس د سطحي د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پورې انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بیلګه ۵ ، ۲:

د سطحي مساحت د $x_2 = 2$ ، $x_1 = -1$ ، $y = 0$ ، $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ترمنځ دی: (لاندې ځېره)

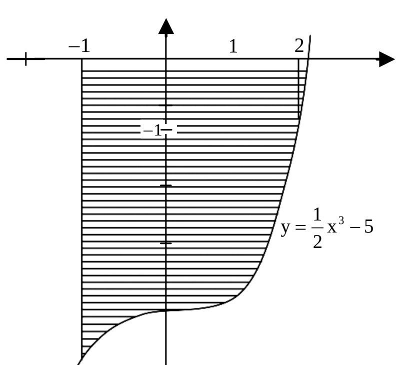
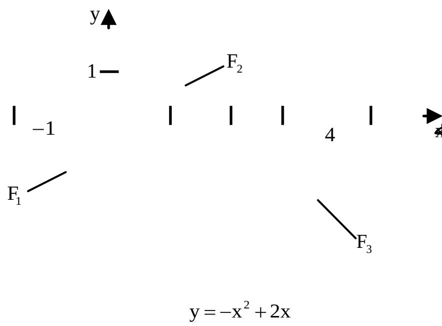


Bild 21,4

$$A = \left|\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx\right|$$
$$= -\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx$$
$$= (-\frac{1}{8}x^4 + 5x)\Big|_{-1}^{2}$$
$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}$$

بیلګه ۵ . ۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندې پولو x_1=-1 تر
$x_2=4$ اودمنحني y=-x²+2x او y=0
ترمنځ د x- محور پورته او کښته پرته سطحه
(په مخامخ ځېره کې نښانه شوې ده) دې
وشمیرل شي

حل : د تابع y=-x²+2x, د x1=0
صفرځایونو x_1=0 او x_2=2 تر منځ پرته

غوښتونکي سطحه د x-محور پورته، نوره
کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A = -F_1 + F_2 - F_3$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^2 + 2x)dx + \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x)dx - \int_{2}^{4} (-x^2 + 2x)dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{2}^{4} = \frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x = -1$ تر $x = 4$ او د کږې $y = -x^2 + 2x$

او $y = 0$ ترمنځ (د x – محور پورته او کښته)

تمرینونه

: - په ورکړ شوي انتروال کې د ګراف او x محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$a)\ f(x) = x - 2 \quad , \quad x \in [-2;3]$

$b)\ f(x) = x^2 - x - x \quad , \quad x \in [1;5]$

$c)\ f(x) = x^2 - 8x + 12 \quad , \quad x \in [0;8]$

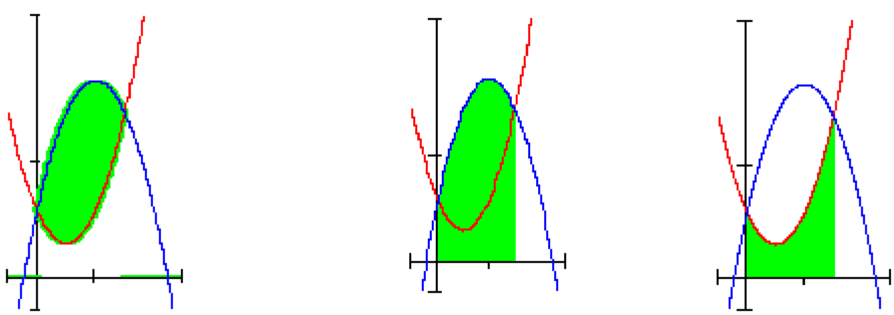
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت ځنگه وشمیرو؟

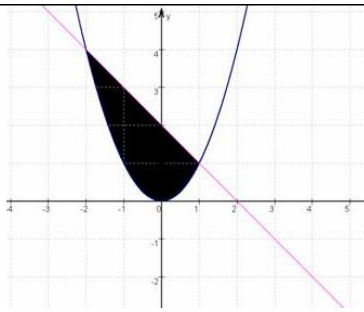
په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو گرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتگرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه گرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما ځخه مخ ته ځو :



A A_1 A_2

$$A = A_1 - A_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۵ . ۵ : د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحي مساحت غواړو وشمېرو: د تګلارې لار: دلته هم یو شکل یا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.	

۲ - د دې لپاره چې انتیګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

فرمول - P;q

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توګه لیدل کیږي. $\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

پس باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$

$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$

$$=-1,5-6++=-4.5$$

$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f گراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو گرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A=\int_{a}^{b} (f(x)-g(x))\,dx$$

بیلګه ۵ . ٦ :

د توابعو $f(x) = x^2 -2x +2$ او $g(x) = -x^2+4x +2$ گرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو گرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اینتیگرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 =0$ او $x_2 =3$ د اینتېکرال لیمیټونه یا پولې دي.

د اینتګرال جوړونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2-2x+2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

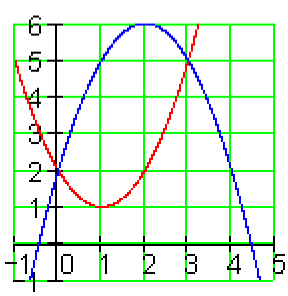
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2+4x+2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$

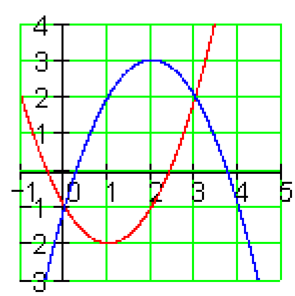
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** -محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ځېرو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمېرو.





که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوڅتکي هم او له دې سره د انتیګرال حدونه بې تغیره پاتیږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \text{ و } f(x) = x^2 - 2x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای په ځای کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي.

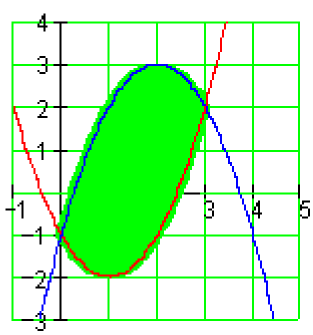
دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}$$

-- ----------------------------

د دې متود تولیزه ونه(عموميت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:



که يوه سطحه د يوې پورته او يوې ښکته منحني ښخه رابنده وي، چې تابع f(x) او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمېرل کيږي.

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

د انتيکرالوني حدونه a اوb دx – محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړو ګرافونو د وضعيه قېمتونو غوڅېكي دي،

د منحنيو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې
له$x=a$ تر $x=b$ پورې‌او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

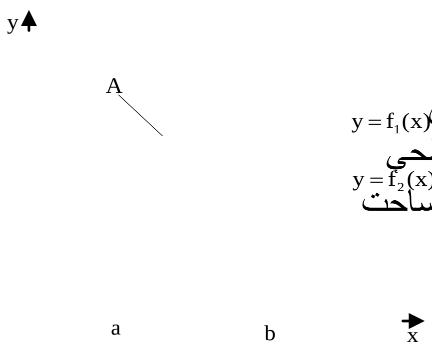


Bild 21,6

اینتیګرالوړاو $f_1(x)<f_2(x)$
په$[a,b]$ اينتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس
ته راوړل کيږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې
مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت
کم کړئ.

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك
چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اينتروال [a,b] کومه يوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

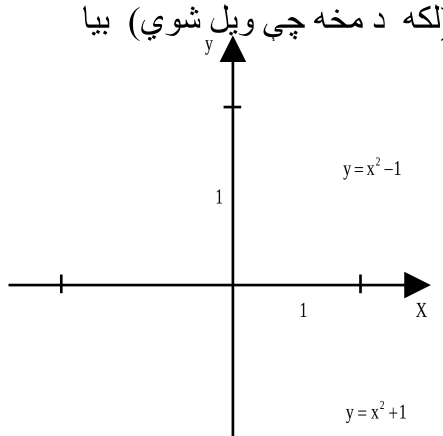
بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1)$

حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوڅېکي(د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$
$$2x^2=2$$
$$x^2=1 \qquad x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$$

د اینتیګرلولو په اینتروال [1 , 1 -] کی لرو$-x^2+1>x^2-1$

(که چیرې په اینتروال [a,b] او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کې ونه نیول
شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا
داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-1}^{1}\left[-x^{2}+1-(x^{2}-1)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^{2}+2)\,dx$$

$$=(-\frac{2}{3}x^{3}+2x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.

y=(x-1)²,y=-4x+4,y=4

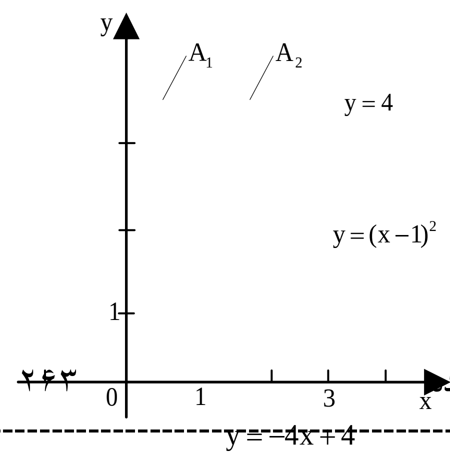


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه
سطحوA1 او A2 له یوځاي کیدو څخه لاس
ته راځي.

A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ
پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي

د دوه کرښو ځخه رابند

کواور ینات(x –محور) غوځېکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $x_1=0$ $4=-4x+4,$ په همدې ډول د

ښي غوځېکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2}+x-2}{x+1}=\frac{1^{2}+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{2,3} = -1 \pm 2,\ x_3 = 1.$$

ګورو چیA2د y=-4 او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعيه قيمت د بنی غوڅتکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوبنتوني سطحه داسې ده:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 [4-(-4x+4)]dx + \int_0^1 \left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 4x\,dx + \int_0^1 (-x^2+2x+3)\,dx = 2x^2\Big|_0^1 + (1/3x^3 + x + 3x)\Big|_4^3 = 7\frac{1}{3}$$

تمرينونه:

د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

---

1) $f(x) = x^2 - x - 6$; $g(x) = 4x - 10$

2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$; $g(x) = 3x$

3) $f(x) = 0.75(x^2 - 5x + 4)$; $g(x) = 0.75x + 3$,

4) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}$; $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$

5) $f(x) = (x-2)^2 - 4$; $g(x) = x - 1$

6) $f(x) = x^2 - 4x + 1$; $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

7) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

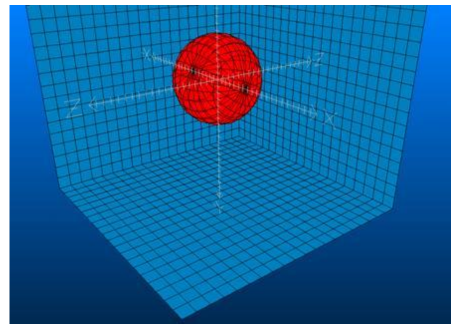
8) $f(x) = x^2 + 3x$; $g(x) = 0.5x^2$

9) $f(x) 0.5x^2 - 2x - 1$; $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$

10) $f(x) = -0.5x^2 + 2$; $g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخيدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعاليت:

- په ورسره بلده توګه د مستطيل حجم وليکئ.

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دې تل په پام کې ونيول شي: که د انتيګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

ځرخيدونکي تنونه:

ځرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه ځرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني ځرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به يې په لاندې کې و ځېړل شي.

د xپه محور ځرخيدنه(ځرخون)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

څرخېدونکي تنونه: ۲۶۶

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

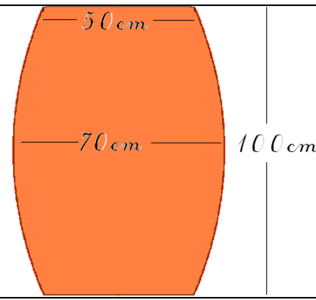
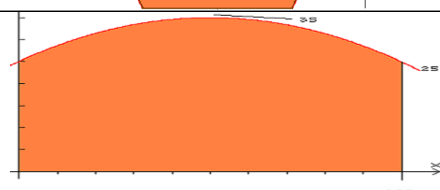
که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| \, dx$$

د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2 \, dx$$

	د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی يې 1 متر، وړانګه يې 25 سنتي متره په پاې او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.
	که مرتبان په 90° درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژی تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.

حل: د پارابول د تابع لیکبنه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

٢۶٧ خرخېدونکي تنونه:

تولیز باور لري:

$f(x) - a \cdot (x-5)^2 + 3.5$ (dm ارزښت په دیسیمتر)

په څرګند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزونې ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کېږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې امله a دی: $\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کيږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال يا عمودې فورم بدلوو:
$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنی تابع $f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$

د حجم شميرلو لپاره ټاکلی انتيګرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\;dx$$
$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot 10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$
$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$
$$=\pi\cdot 101.167$$

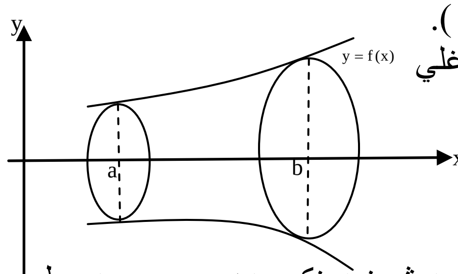
د حجم واحدونه (يوونونه يا يووالي)

دا چې موږ له پيله په ديځيمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په ليتر شمېرل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= 317.824\ liter$$

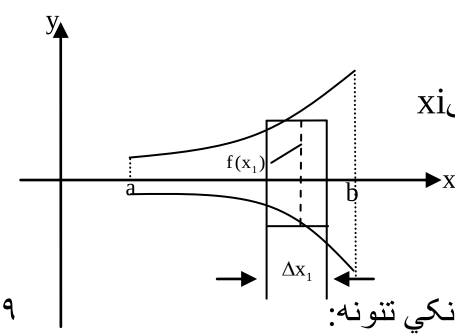
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ
سطحه چی دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹).
دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې راغلي
دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.
لاندېجمله باوري ده



جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینټروال[a,b]کي دی y=f(x) متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو
y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$

ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعې له
لارې چی وړانګه یې(f(xi، جګوالی یېxi
د i=1,2,3,...n لپاره لری.
(ش: 5. 10) دi-مې توتې
(سلیندر ډکی(حجم) دی.



څرخېدونکي تنونه:

------------------------------ --

$$\Delta_i V = \pi \cdot \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سلیندرونو یا توتو زیاتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اینټیګرال د تعریف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$ حجم (ډکی) راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

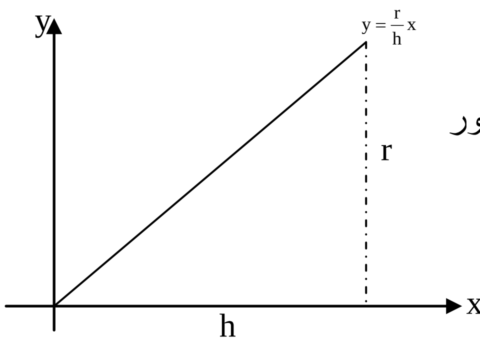
بیلګه ۵ . ۹ :) دمخروط یا کیګل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h}x$ کرښي (د سرچیني

تیره کرښه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور

(y =0) د حدونو x=0 تر x=h

پورې(ش . ۱۱)



$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

دا له بنستیزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلګه ۵ . ۱۰:

د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

ترمنځ د x-محور باندې ځرخېدلو جوړ(تولید) شوی جسم ځرخېدلی پارابولویید دی (خ ۵ ېږ ۱۲)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = 9\pi.$$

y

$y = \sqrt{2x}$

1

0 1 3 x

Archimedischer Satz د ارښیمد س جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

د 1886 زک یوه درسي کتاب څخه

Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: $„ : „ : „ = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

$„ : „ : „ = 6 : 4 : 2$

$„ : „ : „ = 3 : 2 : 1$

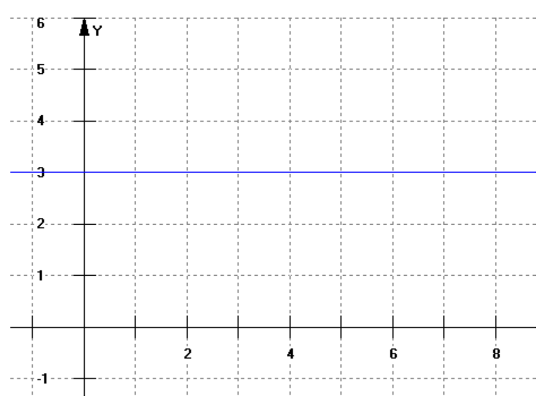
Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

د پورته الماني پښتو:ارښیمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب یې ومونده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښیمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بیلگه ٥ . ١١:

استوانه(توته):



(c) ketabton.com: The Digital Library

استوانه د x په محور د $f(x) = c$ یوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د یوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په $[0;5]$ انتروال کې د توټې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. د x هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیگرال په مرسته حجم وشمېرلاي شو. د سطحې مساحت د لاندې انتیگرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\, dx$$

که د دې ناپاې ډېرو مستطیلونو(د $f(x)$ د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغېلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیگرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

څرخېدونکي تنونه: ۲۷۲

دا په دې معنا چې دا انتیگرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توټې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

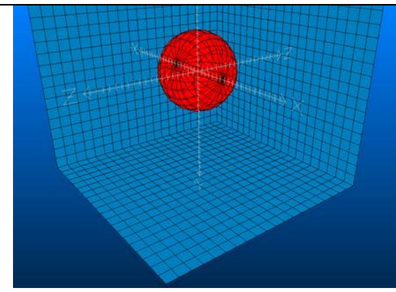
د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

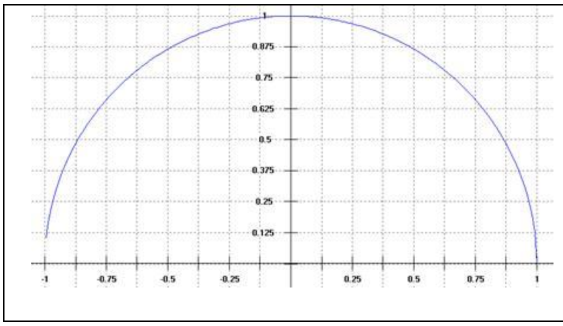
$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45-0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کره (غونډاری یا غونډوسکه):





فعالیت:

- د کري حجم بې له انتيګراله ولیکئ.

- د توتي حجم ولیکئ

- د مخروط حجم ولیکئ.

ځرخېدونکي تنونه: ۲۷۳

-دا درېواړه سره پرتله کړئ.

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع ځرخېدني ځخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتني شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوځوونکي تابع يي $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي ځخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

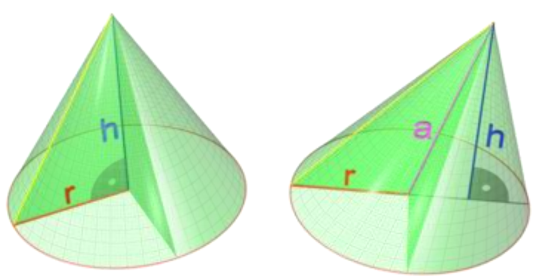
(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع ځرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعني په انتروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د يوه منظمn زاويو (اړخيزې(کونجيز) ځخه رابندې بنسټيزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نزدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتيگرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله
٢٧۴
ځرخېدونکې تنونه: ---------------------------

مرستندويه لار. يو د کارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په سرچينه (0|0) او منځ ټکی په ټکي (h|0)کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنيو توتو(استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جگوالی(پنډوالی) يې dx دی. داچې د داسې يوې توتې يا استوانې گردې ټوټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعيه قېمت سيستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانگې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې باور لري.

د يوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانگه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د يوې ناپاي کوچنی توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\, dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنيو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتيگرال جوړوو، د انتيگرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

يو مخروط د x په محور د f(x) = mx يوې کرښيزې (خطي) تابع(د بېلگې په توگه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د يوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولای چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې گراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انتيګرال په وركړ شوي [0;5] انتروال كې ونيسئ.

$$\pi\int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دې د يوه مخروط د حجم معياري (ستاندارد) بڼه وكتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

كه يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو كترو يا زونونو ټوټه كوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نږدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نږدې توګه لكه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال كې د وضعيه قيمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

$$V_x = \pi\cdot\int_0^2 \frac{x^4}{16}dx = 0.4\pi$$

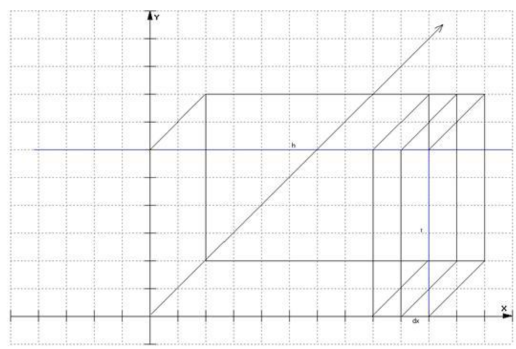
(c) ketabton.com: The Digital Library

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\,dy = 2\pi$$

د ناڅرخيدونکي جسم ډکی یا حجم.

مستطیل یا بربع المکعب (شپږ اړخیز جسم) Quader



دا لید شکل د استواني څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي ($V = r^2h$) او یا د صفر په لور تلونکې dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمېرل څرخېدونکي تنونه:

شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي. په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژی تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

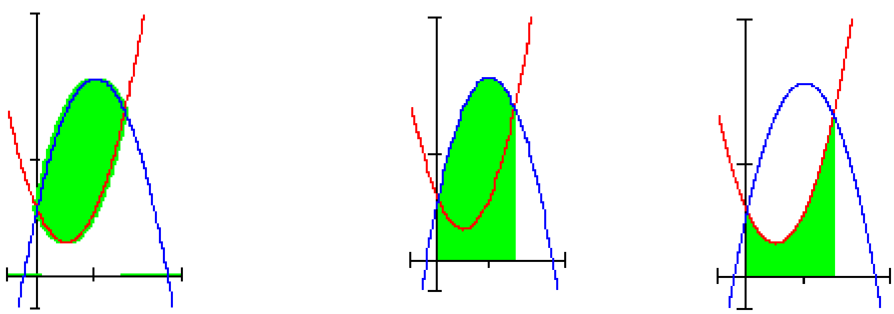
که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولګه

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A A₁ A₂

$$A = A_1 - A_2$$

ځرخېدونکي تنونه: ۲۷۸

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له x=a تر x=b پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه ځرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په ځرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع گراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کې دی y=f(x) متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چې د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

د توتې، غونداري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بیلگې په توگه f(x) = 0,5x) څرخیدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخیدني څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کیدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمیرل شي.

تمرینونه:

۱ - د $y = f(x) = x^2$ او د دې د معکوس تابع تر منځ سطحه وشمیرئ.

۲ - د ګراف او X محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$a)\ f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$

$b)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

$d)\ f(x) = -x^2 + 6x - 5$

۳- د هغې سطحې مساحت وشمیرئ، چې د وکړ شوو مساواتو منحنیو څخه را بنده شوي وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{0,5x}, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

b) $y = \frac{1}{2}x^3, \quad y = 0, \quad x - 2, \quad x = 2:]$

c) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0 \quad x = 9, \quad x = -3, \quad x = 3:$

d) $y = \cos x, \quad y = 0$

e) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{5\pi}{6}:$

$f)\ y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4:$

$g)\ y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

$h)\ y = x^3 + 7, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2:$

$i)\ y = x^3 + 7, \quad y = x^3 - x^2 + 3x + 5:$

$j)\ y = 3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y = 3 - 4x:$

$k)\ y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10:$

$l)\ y = \cos x, \quad y = \sin x$

$m)\ y = \sqrt{3x + 1}, \quad y = 1, \quad x = 8:$

$n)\ y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4 + x^2}:$

$o)\ y = x^2, \quad x = y^2:$

$p)\ y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3:$

٤-- - د ساين د منحني ګراف او د کوساين د منحني ګراف يو بل په انټروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوځوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو غوڅېدونکو تر منځ له دواړو منحنیو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۵- د اکسپوننشل منحني g د $y = e^x$ سره او په انتروال $[0,1]$ دp پارابول د $y = -x^2 - 1$ سره را بنده سطحه وشمېرئ.

۶ - د کرښې g د $y = 2x^2 + 1$ سره او په اینتروال $[0, 2\pi]$ د ساین منحني د y=sin x سره څخه رابنده سطحه وشمېرئ.

۷ - پارابول p_1 د $y = x^2 - 3$ سره او p_2 د $y = 2x^2 + 1$ سره د $[-1,2]$ په اینتروال یوه سطحه را بنده وي.

د ا بنده سحه و شمېرئ.

۸ – د پارابول P د $y = \sqrt{x}$ سره او کرښه g یې د y = -x-1 سره په اینتروال رابنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه وشمېرئ.

۹ - په اینتروال $[-2,1]$ د g_1 کرښې د $y = x + 3$ سره او g_2 د 2x+1 سره څخه را بنده سطحه وشمېرئ.

۱۰ - – پارابول $y = x^2 - 6x + 5$ د p سره او کرښهg د y+-x+1 سره رابنده سطحه.

د دې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۱-- د g یوه کرښه یو پارابولp د $y = x^2 + 2$ سره په $x_1 = -1$ او $x_2 = 2$ کې غوځوي.

د کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ – د g یوه کرښه یو پارابول p د $y+0,5x^2+x+4$ سره په د $x_1=-2$ او $x_2=4$ ټکو کې غوڅوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۳ - د ساین د منحني ګراف او د کوساین د منحني ګراف یو بل په انتروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوڅوي.

د دواړو غوڅټکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د $y=-\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د y=a.(1-sin2x), (a>0) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یوونونه (واحدونه) دی.

۱۵- د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ \ f(x)=2+\sqrt{x}\,,\quad I=[0;4]$

$b)\ \ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+1\,,\quad I\,[2;4]$

۱٦ - د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په مخور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې و ازمایئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x)=-x+5,\ \ |=[0;3]$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ ,\ \ |\,[1;5]$

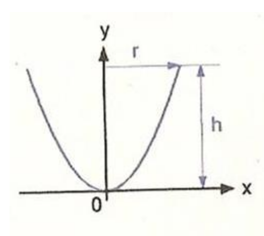
۱۷--د لاندې توابعو گرافونه هر یو د y په مخور ځرخي. د منځ ته راغلو ځرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ \ f(x)=\sqrt{x}\ \ ,\ 1=[0;4]$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=(x-2)^2\ \ ,\ 1=[1;3]$

۱۸- د لاندې توبعو گرافونه هر یو دy په محور ځرخي. د منځ ته راغلو ځرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره يې و ازمايی.

$a)\ \ f(x)=x+1\ \ \ ,\ \ 1=[1;4]$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\ \ ,\ \ 1=[0;4]$

۱۹ د پارابول په سیومتري محور yد پارابول د ځرخيدو سره یو لوښی منځ ته راځي. وښايئ، چې دا $v=\frac{\pi}{2}\cdot r^2\cdot h$ حجم لري.



$$v=\frac{\pi}{2}\cdot r^2\cdot h$$

۲۰ - د ساین د منحني گراف او د کوساین د منحني گراف یو بل په انتروال $0\leq x\leq 2\pi$ کې غوځوي.

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۲۱ - د f تابع گراف د $t\ \ y=-\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مساحت وشمېرئ.

۲۲ - د f تابع گراف د $y=a.(1-\sin 2x), (a>0)$ سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یونونه (واحدونه) دی.

۲۳---- لاندې د څرخیدونکي بدنونو گراف په x محور څرخي. د داسې منځ ته راغلو څرخېدونو تتونو حجمونه(ډکي) وشمېرئ.

$a)\ f(x)=2+\sqrt{x}\quad , \quad I=[0;4] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2 \quad , \quad I=[2;4]$

۲٤---د لاندې څرخېدونکو بدنونو گرافونه د x محور باندې څرخي داسې منځ ته راغلي حجمونه(ډکي) وشمېريئ او په ساده حساب سره یې وشمېرئ.

$a)\ f(x)=-x+5 \quad , \quad I=[0;3] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad , \quad I=[1;5]$

۲۵--- د لاندې توابعو د څرخون له لارې منځ ته راغلو تتونو حجم وشمېرئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad |=[0;4] \qquad b)\ f(x)=(x-2)^2 \quad , \quad I\ |=[1;3]$

۲٦---- د لاندې توابعو گراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تتونه و شمېرئ او په ساده شمېرنه سره یې هم و شمېرئ.

$a)\ f(x)=x+1 \quad , \quad |=[1;4] \qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2 \quad , \quad |=[0;4]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۷--- د لاندې توابعو ګراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه و شمېرئ او د ساده شمېرنې سره يې هم و شمېرئ

$a)\ f(x)=\sqrt{x}\quad , \quad | = [0;4]$ $\qquad$ $b)\ f(x)=(x-2)^2 \quad , \quad | = [1;3]$

$a)\ f(x)=x+1\quad , \quad | = [1;4]$ $\qquad$ $b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2 \quad , \quad | = [0;4]$

هغه ناټيکاوي، چې د نصاب په کتاب کې شته، داسې لړڅه به يې زه دلته له تاسو سره شريک کړم

د ډاکتر ماخان (ميرزي) شينواري چاپ او ناچاپي ليکنې:

په ډېره منته، چې زما کتابونه به ټول www.ketabto.com ته پورته شي.

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شنوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمككچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډيرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکني ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

د ښوودځي کتابونه له ۷-م لګي څخه تر ۱۲-م ټولګي پورې.

۱ – د دولسم ټولګی شميرپ،هنه

زما ليکونه:

Dr. Makhan Shinwari ډاکتر ماخان شينواری

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي حمهوريت جمهور ريس جلاتمآب

ډاکتر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بخښنه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ډک وخت نيسم، خو دا راته ډېر اړيين برېښي او پرته له تاسو به يې څوک دومره جدي هم ونه نيسي.

پوهيږو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغذ جوړوي، پوهه له همدې ځايه پيليږي، چې بنسټ يې بايد سم وي. همداسې نصاب د يوه هيواد د پوهنې مغذ دی، نو بايد همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترګه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول ګوته نيسم او په همدې ډول ستونځوبيو يا د ستونځو حل ته يې.

ما د ۱۲ –م ټولګي د پښتو او دري کتابونه وليکل او زه ترې المان ته لاړم، قرارداد پای ته ورسيد. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما ليکنه مل ده. دا کتابونه ما بيا له سره ترتيب کړل(ليکني مې يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

درلودلې) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کيده، چې دا به بيا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د ليکلو لپاره پيسې اخستې او دا ليکنې هم دا دې لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وګڼله، چې دا کتابونه هم زه له سره وليکم، مواد يې لرم، ځکه چې ما ډېر د شميرپوهنې يا رياضي کتابونه ليکلي او ژباړلي(نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانګه د ښوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنيکي کارونه يې بايد له يوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې يې په ليکلو او د ښوونځي لپاره په سمون پيل کړي دی.

زما ليکنې مسلکي ناسمون نه لري، معياري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخرنيو اوولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هيوادوال څه نه دي ويلي يا ليکلي، نو باور لرم، چې زه يوائنی کس يم چې دې ته مې فکر را اوښتی. زه دا څه چې ليکم دا په پوره مسئوليت ليکم.

ما چې دا څومره ليکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروړی بولم.

که د دې کتابونو د ليکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار ميوه به مې وي او دا کار به په نړيوال معيار او ښه توګه سرته ورسوم.

دا اخر يونيم کال مې يوائې د ښوونځي له کتابونو سره سر خوږولی، چې د هر ځل لوستنې سره يې پوره زوريږم او د هر ځل لوستلو سره يې په ناسمون سر خوږوم.

زه هيله لرم، چې دا وخت راته راکړئ، چې د افغانستان رياضی معياري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معياري يې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې ګوته ورته ونيوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت راکړ شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کيدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونځي د رياضي لپاره به يو ښستې کيښوول شي، چې په هغې د راتلونکی وخت شميرپوهنه يا رياضي ابادېدی شي. دا ښستيز مسلک به په نړيواله کچه سم شي.

زما مسئوليت مې په دې ليکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شينواری

د نصاب د کتابونو د ناسمون په څنو برخو د نموني لپاره لنډه څيړنه شوې، چې د دې ليک سره مل ده.

د پوهنې محترم وزارت ته زما ليکنه هم مل ده.

ډاکتر ماخان شينواری

د ۲۰۱۳ زکـ لومړی نيمايي

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې محترم وزير صاحب ته په ډېر درنښت!

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شریک کړم:

لومړی: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز ک پورې د درسي کتابونو لیکنه کې ونډه لرله او د ۱۲ ـم ټولګي د شمیر پوهنې یا ریاضي کتابونه مې په پښتو او درې ولیکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهنې وزارت په ن ج پاڼه کې د ۱۲ ـم ټولګي د شمیرپوهنې (ریاضي)کتاب ولوسته، چې ګورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دویم : د کتاب خوندېوني یا متن ته چې ننوتم، ګورم، چې هغه څه چې ما لیکلي وو هغه یا نه شته او یا تخریب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه یعني د ،، پولې ارزښت،، یا لیمیټ برخه وکتله، چې ګورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه ریا ضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا لیکلې نه دا چې په ریاضي نه پوهیږي په پښتو هم نه پوهیږي.

زما په لیکنو کې نوښت:

دا باید په ګوته کړم، چې زما لیکنه په نړیوال معیار وه، چې منځپانګه یا متن یې طبعآ زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بیا په درې ولیکه.

دویم: دا لومړۍ لیکنه وه، چې په لیکنه کې له ایراني کتابونو ګټه نه وه اخستل شوې او لیکنه له الماني ادبیاتو او داسې څه له انګرېزي ادبیاتو رانیول شوي وه.

دریم: زما کتاب معیاري لیکل شوی وو او ترې ښه لیکنې یې شونتیا نه لرله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ټوګه مې غوښتنه او هیله :

اول - زه باید پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که یوائې یوه لیکنه هم په کې زما پاتې وي، نو باید زما نوم په کې وی. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو ګاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تیری بریښي؟

تاسو پوهیږی، چې د ۱۲ ـــم ټولګي کتاب لیکلو لپاره ماډیرې پیسې اخستي او لپاره مې یې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه یې باید داسې نه وی.

دویم- د کتاب دا لیکلي لومړی او هم داسې سرسري دویمه برخه، چې ما لوستلې، د ښوونځیو لپاره د زغم نه دي.

زما وړاندیز: دا کتابونه باید راټول شي او بیا ولیکل شي، ځکه چې په دې خو لیکونکي نه پوهیږي ، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهیدی شي او نه زده کوونکي او د پوهیدلو معقول څه هم نه لري. دې ته ګوته نیسم، چې په دې نورو کتابونوکې به هم ورته ستونځې وي، خو زما یې کتنه اوس د لاسه نه کیږي، ځکه چې .....

د داسې کتابونو لیکل او ښوونځیو ته وېشل د پوهنې وزارت لپاره توهین دی.

زه له دې امله د کوچنې اختر وروسته کابل ته درځم او هیله لرم، چې د هرچا لومړی له تاسو سره وګورم. زه به د اګست په ۱۷ یو ځل وزارت ته درشم.

یادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځایونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړی، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زورېدلی یم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه به په دې هکله – که لوي څښتن کول- له تاسو سره په کابل کې وغږیږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکټر ماخان شینواری

یوه هیله

زه د افغانستان د ټولو ن ج ، نورو پاڼو او رادیو تلویزیونو څخه هیله لرم، چې دا زما لیکنه ګرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده لیکنو هم همدا مرسته وکړي.

د ریاضي کتابونو د چاپ مخه ونیول شي

ولې؟

په دې نږدې څو میاشتو کې د نصاب کتابونه بیا چاپ ته وړاندې کیږي او ګومان مې دی، چې داسې د معیار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله یې د چاپ مخنیوی اړیین او په همدې ډول یې سمون هم اړین دی، چې په لاندې کې یې ستونځو او ستونځوبیو (د ستونځو حل) ته هم ګوته نیسم.

زه د شمیرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هیله ده، چې دا لیکنه شخصي وه نه نیسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د شمیرپوهنې په کتابونو پیل وکړ، چې تراوسه مې نږدې څه کم څلوېښت کتابونه لیکلي، چې له جملې یې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ غوره یې په www.kitabtoon.com (دې پاڼه کېاوس نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه شمیرپوهنې ته ځانګړې شوې پاڼه کې تر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ کتابونو ن ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وار ن ج ته پورته شي. زما پاڼه smakhan.wordpress.com

دا زما ن ج پاڼه په نا ښکلي ډول يواځې زما د شميرپوهنې کتابونو ته ځانګړې شوې، چې زما زيات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه ښکلې نه، خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شميرپوهنه په ګډه سمه او معياري کړو.

ګرانو هيوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جګړې په هر اړخ کې بې ساری زيانمن کړی او همداسې په پوهنيز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دی پاتې شوی.

لکه څنګه چې پوهنه د هيواد مغذ جوړوي، همداسې نصاب د پوهنې مغذ دی، نو له دې امله زياته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولګي پښتو او درې کتابونه وليکل، د قرارداد وخت پوره شو، پيسې مې واخستلې او زه ترې لاړم، چې متآسفانه له ما ليکلي کتابونه چاپ نه شول – علت يې دا وو، چې ګران ليکونکي يا ليکونکي وښايي، چې دوي دا کار ښه کوي، نو ولې دا د هيواد دباندې افغانان دې دې کار ته راوبلل شي- او په ځای يې متآسفانه ناسم کتابونه چآپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهنې وزارت ته يو ليک هم ليږلی وو، چې

ما متآسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځي چاپ کتابونه وکتل او دې نتيجې ته ورسيدم، چې د رياضي کتابونه بايد سم او معياري چاپ شي او نه دا ناسم بيا چاپ شي.

دا وړانديز ولې ما په نصاب کې نه دی کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خواشينۍ سره به ووايم، چې د کار په سر کې مسئولو چې په کار پوه نه وو، بل څوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غوږ ته هم نه رسيږي. ما په همغه وخت کې هم د ټولو ليکنو لپاره وړانديزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په ميز ايښودلي وو، خو چا نه غوښتل ګټه ترې واخلي او يا يې ترې د ګټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د ليکنې متود ښه ونه برېښيده، ځکه چې استادان د دارنګه ليکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې څو واره زياتې ځنګيزې ليکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پټيل، چې د کتابونو د چاپ مخه بايد ونيول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی بايد ښوولی وي، چې د کتابونو معياري او سم ليکلو امکان هم بايد شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړې، چې زياتو برخو ته يې ، څو واره وړانديزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار بايد ډېر په بيړه وشي، نو دا کار هم کيدونکی دی، خو بايد څو تخنيکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې ليکنه کړې، چې ګران لوستونکي يې په
smakhan.wordpress.com کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مينه وال او په دې هکله ليوال يې د برېښنا پتې له لارې لاس ته راوړی شي..

ما د هرکتاب څخه لږ ترلږه يوه برخه داسې د نمونې په څير څيړلې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د ښمیرپوهنې مینه وال ګران لوستونکي په ستونځو وپوهیږي، نو اړیین بولم، چې د ښوونځي کتابونه هم وګوري او اړونده موضوعګانې زما د چاپ او ناچاپه لیکنو سره پرتله کړي(کتابونه په پورته ن ج کې شته دی، چې ځنې یې راکښته کیدی شي او هم یې هلته ګران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغیزمنو هیوادوالو څخه هیله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زموږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د شمیرپوهنې معیاري کولواو سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:
لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له المان څخه هم سرته ورسوم او په ښه توګه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجورې - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تیر شم.

دویم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسیږي، دا به ګټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داځه وروستی خبرې ما هم رامخ ته کړې.

په لاندې کې زما لیکنې د افغانستان اسلامې جمهوریت جمهورر ریس جلالتمآب اشرف غنې او د پوهنې محترم وزارت ته لیک کې هم لوستلی شی او هیله مې ده، چې ویئ لولی.

ستاسو له ګنو مشورو به ډېر مننذوی یم.

زما د بریښنا لیک پته: smakhan1946@gmail.com

ستاسو ماخان

د نصاب د دولسم ټولګي کتاب ناسمونونو ته کتنه:

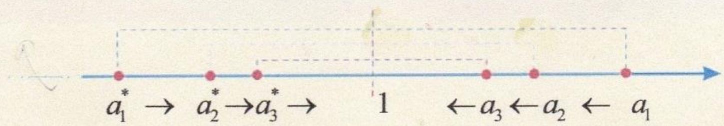
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي: په دولسم ټولګي کې پيل له ترادفونو شوی او په سر کې يې دوه ترادوفونه راوړي او دا يې بيا په يوه ګراف يا کرښه د ښي او کيڼې لورې يوې پولې ته ځغلولي.

د کتاب ۳ ـــم مخ

پايله:ليدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کيڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زياتېدو سره نږدې کېږي، يعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهايت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهايت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لېميټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړی پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګـراف پـه پـام کې نيولو سره تر څيړنې لاندې نيسو.

زه پوهيږم، چې دا کار دې درنو ليکوالانو ولې کړی؟

له همدې پيله روښانيږي، چې محترم ليکونکي د درس سره کومه بلدتيا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هيڅکله له) ۱ « سره نه برابريږي، لکه ښاغلی ليکوال چې ليکي.

پسې يې بيا د پرلپسي يا رديفونو لپاره بيل بيل ګرافونه کښلي.

په پرلپسيو يا رديفونوکې چې موږ ليمټ راوړو، نو موخه ترې د پرلپسي کونورګنت او ډيورګنت دي. په پرلپسي کې اړين نه ده، چې د کونورګنت حالت کې دې پرلپسي له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه يو ترادف دی نه دوه.

دويم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه يې ليکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسي داسې يوې موضوع ته راغلی او بيا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي او کيڼ لورې لیمیټ ته راځي او که وکتل شي، نو په لیکنو کې کوم توپیر نه شته.
دلته د زده کړې څه نه لیدل کیږي او دا اخره کرښه یې داسې ده، چې په دې موضوع کې کومه پوهه هم نه لري.

که چیرې دا تیک هم وي، نو ځای یې بې ځایه ځکه راوړې، چې د ښی او کیڼې لور لیمټونه، چې هلته هم ناسم دې، په اووم مخ کې څیړل(که چیرې څیرنه یې وبولو)

په لاندې کې ،، د متحول تقرب،، یعنې څه؟ دا هیڅ مفهوم یا ترې پوهیدنه نه لري. که ... ترادف وي هم باید د ترادف په ډول ولیکل شي او که تابع وي هم باید د تابع په ډول ولیکل شي.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a} x = a \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چیرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x : a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چیرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x : a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\forall\delta>0:|x-a|<\delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a}x=a \quad \text{یا} \quad x\to a \quad \text{یا} \quad |x-a|\to 0$$

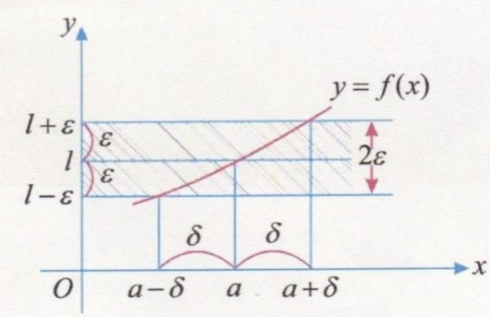
ډول لیکنو سره ګران لیکونکي بلدتیا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوې وي

داسې لیکنې د ښوونځیو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ماهم په خپلو لیکنو کې نه وې راوړې. ګورو چې د کتاب ناسموونکي هم دا څه ناسم یا بې له تشریح کارولې.

په دې هکله زما لیکنه په لاندې کې شته.

دریم: په لاندې تعریف کې د پوهیدلو څه نه شته او په دې ریاضیکي تعریف خو نه پوهیږي، ځکه چې په لاندې یې د پوښتنې د حل نتیجه راوستلې او دا بحث له دې سره په ربښتیا کې هیڅ سر او کارنه لري.

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کیږي، نو ویل کیږي چې د $f(x)$ تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim_{x\to a}f(x)=l$ یا $\begin{matrix}x\to a\\ f(x)\to l\end{matrix}$



$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \ : |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=l \ \Leftrightarrow \ (|x-a|\to 0\Rightarrow \ |f(x)-l|\to 0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سومبولونه $\forall$ او $\exists$ نه دي ښوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کيږي.

ښاغلي ليکونکی په اووم مخ کې بيلګه راوړي او بيا دا ښايي، ښي او کيڼې لورې ليميټ يې شميري.

باید د $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$، لپاره $x \neq 3$ وليکي،چې هلته فنکشن تعريف نه دی. دی بيا په ناسمه توګه په جدول کې ليکي. دا چې دا بايد څنګه وليکل شي، زماپه ليکنو کې شته.

دويمه بيلګه: و ښيئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼي خوا لېميټونه تر څېړنې لاندې نيسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

ليدل کېږي چې د ښی خوا او کيڼې خوا لېميټونه سره مساوي دي، نو $6 = \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}$ دي.

په پورته کې xد 3 قيمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعريف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د ښۍ لورې او نه د کيڼې لورې دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کيږي.

د بيلګې حل يې هم بيا سم نه دی کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغي او د زرکې خبره ده.........

دويمه طريقه: د لېميټ د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد ε لپاره يو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right| = \left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right| = |x+3-6| = |x-3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې د حل نتیجه

$$\varepsilon = \delta$$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري یعني دا مو موخه نه ده، نو باید ووایم، چې دروند لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي.(بخښنه دې وي، که زما لیکنې داسې لږ توندې برېښي)

او بې ځایه مخ ته ځي، چې څه ترې پوهیدل کیږي هم نه.

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لیمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لیمیټ لري، یعني: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او ټیکاوی:

د کتاب په پیل کې راوړل شوې د ترادف یا پرلپسې موضوع باید د یوولسم ټولګي کتاب کې پوره څیړل شوې وی، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي – بې له دې، چې د موضوع اړیین څه راوړي - له موضوع څخه تیر شوی.

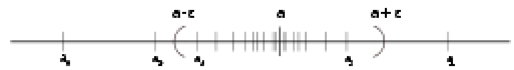
د دې موعوع څخه موخه د ترادف پولې ته تلنه یا کونورګنت او له پولې اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورګنت او... دي، چې بې له دې په رښتیا کې د ترادف یا پرلپسې څیړنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعنې خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د ترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړیینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ ـــم ټولګي کتاب ته:

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: دا چې ګومان کيږي د داسې ليکنو سره به بلدتيا لږ وي، نو تشريح به راڅخه لږ ډېره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څيره کې ښوونه



که $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د حقيقي اعدادو (ګڼونو) ترادف يا پرلپسي وي، نو عدد $a\in\mathbb{R}$ د دې ترادف يا پرلپسي پوله ارزښت بلل کيږي او پرلپسي a ته کونورګير کيږي يا a ته هڅيږي يا نږدې کيږي، که د هر $\varepsilon > 0$ لپاره په انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ کې له يوه اندکس يا پيژند نخښې اخوا يا وروسته يا پسې د پرلپسي يا ترادف ټول غړي(دوي يې حدونه يا جملې بولي، نه پوهيږم ولې؟) د انتروال په دننه کې او فقط پای ډېر غړي له انتروال څخه دباندې پراته وي.

(دنورې اوږدې روښانه ونکي شننې څخه تيريږم)

لنډ پيژند يې:

عدد $a\in\mathbb{R}$ د ترادف $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ پوله بلل کيږي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو طبيعي يا پيداېښتي عدد N شتون ولري، داسې چې $|a_n - a| < \varepsilon$باور ولري، که $n \geq N.$ وي.

دا پيژند راکوي، چې: د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس N شته، داسې چې له دې ايندکس يا پيژندنخښې وروسته د پرلپسې(ترادف) ټول غړې د ε څخه په کم واټن له a لرې پراته دي يعني له ε څخه چې a ته څومره نږدې دی دا نور هم a ته نږدې دي.

د $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د پولې ارزښت ليکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

د دې ليکدود سره سم د يوې پرلپسې پوله ارزښت تعريف داسې رالنډولی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \iff \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ |a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې لیکنو لپاره د ε (لوستل: اپیسیلون) توری ورځنی یا مروج شوی.

بیلګه:

په یوه بیلګه کې یې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د$\frac{1}{n}$ پرلپسې یا ردیف و 0 ته کونورګنت وښایو، یو د مخه ورکړ شوې ε ته یوه په خوښه طبیعي عدد یا ګڼN ټاکو، چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وی، نو د ټولو $n > N$ لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا یو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

یادونه: د دې ۱۲ – م ټولګي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توګه پیژنو یا تعریفوو:

پیژند: د فنکشن f پوله ارزښت، د x لپاره چې p ته نږدې کیږي، L دی او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to p} f(x)=L$

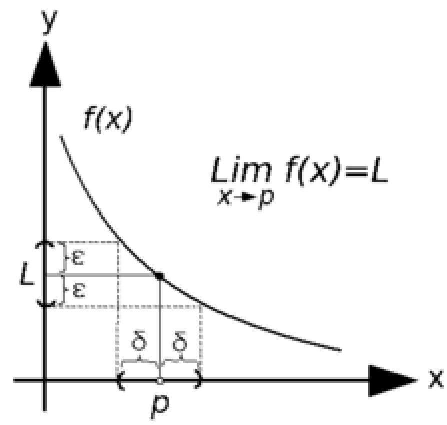
لوستل یې هم همداسې دي لکه پورته تعریف

داسې یې شمیرپوهنیز لیک دود باندې تعریفوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن f پوله ارزښت L لري، که د هر $0 < \varepsilon$ لپاره یو $0 < \delta$ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د $0<|x-p| < \delta$ سره $|f(x)-L| < \varepsilon$ هم باور ولري.

د پورته شمیرپوهنیز یا ریاضیکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې ځیره



پورته دوه تعریفونه برابر ارزښته دي یعنې له یوه څخه بل لاس ته راځي او په څټ یا برعکس یعنې لیکو:

تعریف: د فنکشن f پوله ارزښت، چې x و p ته نږدې کیږي، L دی، تیک هلته یا هلته او هلته یا هلته او په څټ، یا له دې لاس ته راځي او په څټ یا برعکس چې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو $0 < \delta$ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د $0<|x-p| < \delta$ سره $|f(x)-L| < \varepsilon$ هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسیا کوو، که څه هم روښانه کیدل نورې شننې ته هم اړتیا لري.

دې ته دلته په اخر کې بیا ګوته نیسم، چې دا شمیرپوهنیز یا ریاضیکې ډول لیکنې ستونځمنې دي او باید ترې تیر شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتیب ګران لیکونکي لیکلی چې زه نور پرې نه غږیږم.

دا بسیا کوي، چې کتاب د ښوونځیو څخه راټول شي او له سره ولیکل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستاسو له سرې سينې څخه – که ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاکتر ماخان شينوارى.

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتوـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې يو پيل   دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو تولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو تولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ -   شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی توک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دویم توک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دریم توک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګې له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میړي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي ځښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې ځانګه او اباسین نومیږي. ځانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library