

د شميرپوهنې بنسټونه

ډاکټر ماخان ميري شينواری

Ketabton.com

وينا

د وينا لاندې يوه ژبنيزه افاده يا ويينه پوهيرو، چې د دې لاندې دوه رښتيا ارزښتونو
،، رښتيا،، (wahr) w همداسې ،، نارښتيا،، يا ناتيک (falsch) f څخه د يوه سره
تنظيم کيدی شي.

ويناوې په لويو تورو A سره په نخښه کيږي: ، او کېدی شي د منطقي يا سم انديزو
عمليو سره وتړل شي. بنسټيزې شمېرپوهنيزې ويښې يا افادې ، چې له نورو افادو څخه
منځ ته نه شي راتلی اکسيومونه بلل کيږي

لاندې بيلگه د دې شميرپوهنې وينا روښانه کوي.

وينا

A : هر طبيعي عدد د لومړنيو عددونو ضرب دی. دا يوه رښتيا وينا ده.

وينا

B : هر لومړنی گڼ يا عدد ناجوره يا طاق دی. دا چې 2 جوړه يا خفت عدد او پريم
دی، نو وينا نارښتيا ده.

دا تروسه ښوول شوي اټکلونه

C : ناپای ډير د پريم اعدادو غبرگوني شته. دا يوه شميرپوهنيزه وينا ده، ځکه چې دا
يا رښتيا ده او يا نارښتيا. دلته موخه د لومړني عدد د غبرگوني څخه هغه لومړني
گاونډي ناجوره عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بيلگې په توگه.

$(3, 5), (5, 7), (11, 13), \dots$

دا تراوسه حورا لويه د لومړنيو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$16869987339975 \cdot 2^{171960} \pm 1$

د کره کونې سره

D : د جمعي ۱۳ مه يوه د بدبختۍ روځ ده.

دا يوه وينا نه ده، ځکه چې دا په يوه رښتيا ارزښت نه شي تنظيمېدو.

ليکونکي: هوليگ، هورنر

منطقي (سم انديزې) تړنې (که غواړې: عملي يا نښلوني)

منطقى يا سم انديزې ويناوې کېدې شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عمليو سره و تړل شي.

يادونه : له کين و ښي لور ته.

نومونه	ليکندود	ويښود	ټيک هلته رښتيا، که
نه والى	$\neg A$	نه A	A نارښتيا ده.
Konjunktion يا د او تړنه	$A \wedge B$	او A) (B	او A رښتيا دي B
Disjunktion د يا تړنه	$A \vee B$	A يا B) (	A يا B رښتيا ده.
Antivalenz نابرابر ارزښته	$A \neq B$	(يا A يا (B	A او B بيل رښتيا

			ارزښتونه ري
Implikation ترې لاس ته راوړنه	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	له A څخه B له B څخه A	A نارښتي يا B رښتيا ده
Äquivalenz برابر ارزښته	$A \Leftrightarrow B$	(A و B ته برابر ارزښته دی (يا له A څخه B لاس ته راځي او برعکس	او B همغه يا برابر رښتيا ارزښتونه لري

د دې لپاره چې په منطقي افادو يا وینو کې نوکان يا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې
 $\neg$ له $\wedge$ او $\vee$ څخه کلک يا قوي نښلوي او دا بيا له $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ او همداسې له $\neq$.

دا ایمپلیکیشن په پام کې ونیسئ، چې B ټیک هلته رښتیا ده، چې A رښتیا وي. له
 ناتيکو نیونو (فرضیو)، ټیک يا رښتیا او يا هم نارښتیا پایلې را وپستل کېدی شي.

دا د يا ترنې لپاره نښه یوه $\vee$ په شان نښه ده، چې د (vel (lat. oder) (لاتین. يا)
 لپاره ځای په ځای شوي. د يا ترنې لپاره کېدی شي چې سومبول $+$ ، $\cdot$ ، وکارول شي
 او د او- ترنې لپاره $\cdot$ ، $+$ ، که سومبول 0 د ناتيک يا غلط لپاره وکارول شي او
 هر بل ارزښت د رښتیا په څیر و کارول شي، نو کېدی شي منطقي ترنې د طبیعي
 عددونو شمېرنې له لارې هم پر مخ بوتلای شو يا استعمال کړای شو.

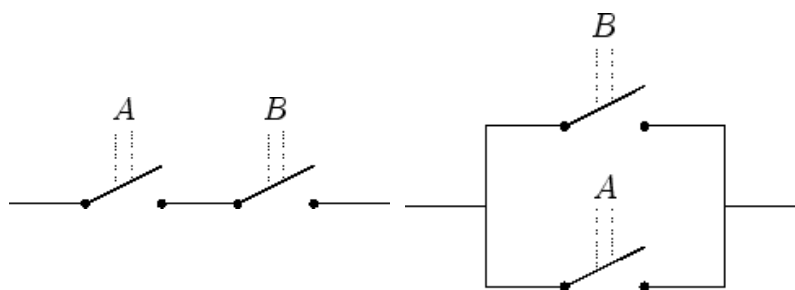
په شمېروني (کمپیوتر ژبه کې له انگریزي راغلي کلیمې NOT (Negation) نه والی)، AND (Konjunktion) (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (دیسجنکشن)، یا EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) (بی له یا نابرابر ارزښته) او د هغې نه والی NAND (negierte Konjunktion) (نه شوی کنجکشن)، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی دیسجنکشن) او NXOR (Äquivalenz) (برابرازښته) لپاره کارول شوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر، کیمرلي

که وینا د سویچ په څېر انځور کړو، چې ترلي وي، که وینا رښتیا وي، په همدې توګه واز، که وینا نارښتیا وي، نو کېدی شي مسلسل سویچونه د یا – ترني په څېر او غبرګ سویچونه د او-ترني په څېر صورت ومومي.

د او-ترنه

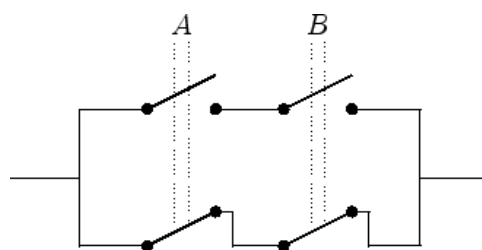
د یا-ترنه



یوه نه-شوي وینا یو سویچ دی، چې ترلی دی، که وینا نارښتیا وي. له دې سره کېدی شي سویچ څېرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ایمپلیکیشن لپاره ورکړل شي.

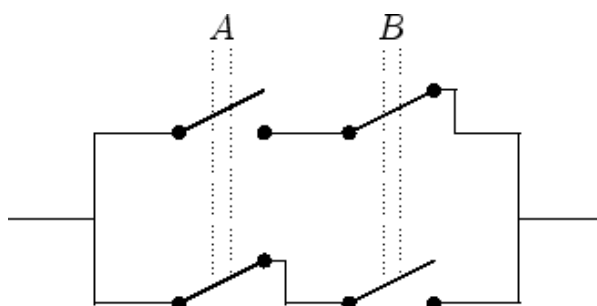
برابرازښته: $A \Leftrightarrow B$ همداسې $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Äquivalenz:

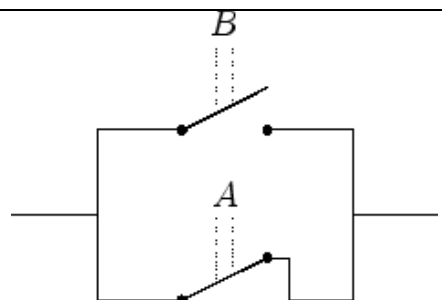


$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ $A \not\equiv B$
همداسي نابرابر ارزښته:

Antivalenz:

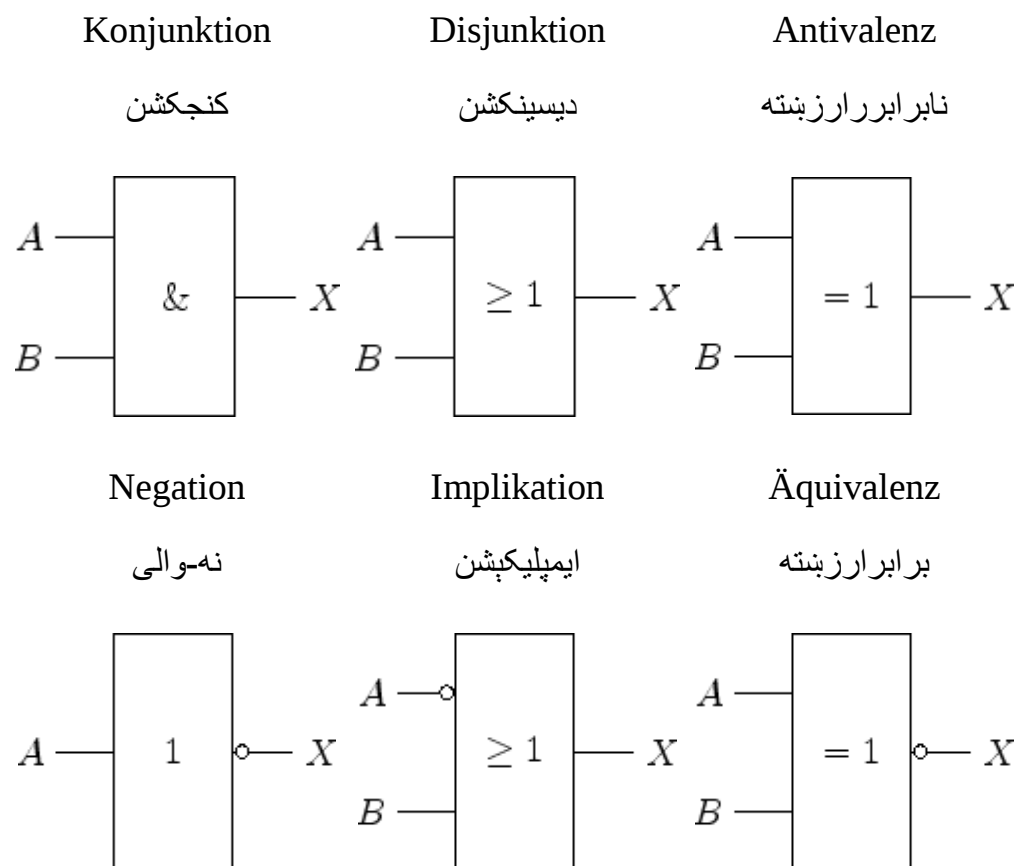


ایمپلیکیشن یا تری لاس ته راتلنه:
 $\neg A \vee B$ $A \Rightarrow B$ همداسي



سویچونه کیدی د ترانزیستور له لاری منځ ته راشی یا صورت ومومي، چي په جگ یا ټیټ ایښوول شوي شپانونگ جریان مومي یا تیریري. د (1) ارزښت جگ شپانونگ دی ټیټ یا کم شپانونگ ارزښت (0) دی.

د دین DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونگ تعریف ورکول کیږي. دا د ولاړگوډیز (مستطیل) خڅه جوړ دی، په کومو کې چې اړونده ټرنی ورکړ شوي دي. یو نه-والی د یوې گردۍ (دایرې) سره په نڅښه شوی دی.



منطقی عملیو لپاره لاندی کتبتوالی Identitäten باوری دی.

اسوخیاتیو قانون: Assoziativgesetze:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

کموناتیو یا بدلبدنقانون: Kommutativgesetze:

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

د دې مورگان قانون: De Morgansche Regeln:

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

دېسټریبوتیو قانون: Distributivgesetze:

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور:

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

الترناتیو یا بدیلی انځورونه: Alternative Darstellungen:

$$\begin{array}{l} \text{ایمپلیکشن} \\ \text{Implikation:} \end{array} \quad A \Rightarrow B \quad = \quad \neg A \vee B \quad = \quad \neg A \Leftarrow \neg B$$

$$\text{Äquivalenz:} \quad A \Leftrightarrow B \quad = \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\text{Antivalenz:} \quad A \nabla B \quad = \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

بدیلي فرمولونه زیات وخت په بنوونو کې استعمال مومي.

یوه منطقي افاده یا وینه ، چې د رامنځ ته شوی وینا رښتیا ارزښت خپلواکه تل رښتیا همداسې نارښتیا وي، تاوتولوجي Tautologie همداسې کونترادیکشن Kontradiktion بلل کیږي. داسې یوه افاده کړی شي د ښه بدلون سره همداسې د سره بدله شي. په ځانګړې توګه دا کټمټوالی باور لري:

$$A \vee \neg A = w \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = f ,$$

همداسې

$$A \vee w = w \quad \text{bzw.} \quad A \wedge w = A ,$$

همداسې

$$A \vee f = A \quad \text{bzw.} \quad A \wedge f = f .$$

همداسې

لیکونکي: هیولیک،، هیورنر

د دې مورگان قانون او د دېسټریبوتیو قانون کېدې شي وېنول شي، داسې چې د وینا د رېسټیا ارزښت لپاره ټول امکانات وځیرل شي. د دې مورگان قانون داپه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ایمپلیکېشن، برابر ارزښتوالي او نابرابر ارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعریف څخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وینا

$$\underbrace{|x - 1| > 1}_A \implies \underbrace{(x < 0) \vee (x > 1)}_B$$

بڼه دلیري.

د دې مورگان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x < 0) \wedge \neg(x > 1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1).$$

له دې سره سم ایمپلیکېشن $A \implies B$ د وینا د

$$|x - 1| \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 1.$$

سره برابر ارزښته دی

بيا هم دا نتیجه لاس ته راځي ، که ایمپلیکېشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x - 1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بېلگې په توګه افاده یا ویېنه

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د ایمپلیکېشن پېڅای ایښونه او د دېموران قانون له امله لاس ته راځي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B).$$

د دېتریبوتیو قانون له مخط دا وینا برابر ارزښته ده د $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$ سره.

پېژندل کيږي، چ د B ارزښت بې اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او $L = \neg A$.

د منطقي افادې L د ازمایښت ته الترناتیو یا بدیلې کېدې شي یو د رښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا استعمال شي.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	L
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

f	f	w	f	w
---	---	---	---	---

له دي دا هم لاس ته راځي: $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو، شتون لري....،، د ټولو لپاره،، لپاره لنډونې شتونکوانتور $\exists$
او ټول کوانتور $\forall$ استعمالیږي.. دا کوانتورونه زیات وخت د $A(p)$ سره په تړاو کې
استعمالیږي، چې د یوه پارامتر p چې د ډېرۍ یا ست P توکی دی، په واک کې دي.

Schreibweise لیکنډود	Bedeutung معنا
$\exists p \in P : A(p)$	یو توکی p له P شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ رښتیا دي.
$\forall p \in P : A(p)$	د ټولو p لپاره چې له P دی $A(p)$ رښتیا دی.

د دواړو وینا ډولونو د نه والي سره کونتوونه هم بدلیږي.

$$\neg(\exists p \in P : A(p)) = \forall p \in P : \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P : A(p)) = \exists p \in P : \neg A(p)$$

دا $\exists$ لیکن ډول هم روځنی دی د فرمولولو لپاره، چې،، ټیک یو ... شته،،

د کوانتورونو د شمېرنې بنوونې لپاره وینا

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n \in \mathbb{N} : n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon$$

راوړل کيږي. دا په دې معنا چې یوه لړۍ (ترادف)

$$a_1, a_2, \dots$$

د 0 په لور یا 0 ته هڅيږي، دا په دې معنا چې د پوره لوی n لپاره د a_n مطلق ارزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند یا بندیز ε څخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړې وینا نه شي او کوانتورونه سره بدل شي،

$$\exists \leftrightarrow \forall.$$

د ایمپلیکېشن یا لاس ته راوړنې یا – راتلنې ایښوونه او د مورگېن قانون څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \neg(n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon) &= \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) = \\ &= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

له دې سره د نه شوي وینا دا بڼه لري:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_\varepsilon \exists n \in \mathbb{N} : n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon.$$

دا په دې معنا چې پرلپسې (ترادف) (a_n) د 0 لور ته نه هڅيږي. دا په دې معنا چې یو لرزښت $\varepsilon > 0$ شتون لري، چې له هغه پرلپسې $|a_n|$ تل بیا اوږي یا تېرېږي.

لیکونۍ:ک. هیولیک

سیده بنوونه

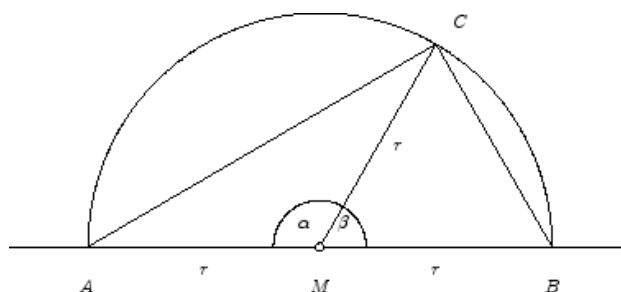
یوه غوښتنه ثبوت B کېدی شي و ښوول شي، چې هغه له رښتیا وینا A څخه را منځ ته شي او یا په داسې بېرته وړول شي.

$$A \Rightarrow B.$$

ویناوې A کړی شي وړاندنیونې (فرضیې) هم ولري، چې هغه د غوښتنې B لپاره اړینی دي.

لیکونکی: هیولیک

د بېلګې لپاره یې د تالس جمله را اخلو، چې هر په یوه نیم گردۍ (نیم دایره) کې رابند درېګودی (مثلث) ولاړګودیز یا قایم الزاویه دی.



دا سیده بنوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول: په یوه مثلث کې د دننیو کونجونو جمعه π ده.

دویم: د یوه برابر پښیز (یا که غواړی: متساوی الاضلاع) مثلث بنسټکونجونه برابر لوي دي.

که دا په مثلث $\Delta(CMB)$ او $\Delta(AMC)$ و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\angle ACM = \frac{\pi - \alpha}{2}, \quad \angle MCB = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

$$\angle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

او له دې سره دی

او د $\alpha + \beta = \pi$ له امله په $\pi/2$ سره برابر.

ناسیده بنوونه

د دې لپاره چې وښایو چې له یوې وړاندنیونې (فرضیې) V څخه غوښتنه (ثبوت) B لاس ته راځي یعنې $(V \Rightarrow B)$ ، کېدی شي ونیسو ، چې وینا B د V د وړاندنیونې له امله نارښتیا ده ، دا مو یوه تضاد ته بیایي:

$$V \wedge (\neg B) \Rightarrow F,$$

د F سره یوه نارښتیا وینا ده، په ځانګړې توګه $F = \neg V$ یا $F = B$.

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \Rightarrow F) = (\neg B \Rightarrow B),$$

که وړاند نیونې نه وي شوي.

لیکونکي: هیولیک، کنش، اببریش

ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \Rightarrow F$$

$$\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$$

د سره برابر ارزښته دي.

که ایمپلېکشن رېښتیا وي، دا په دې معنا چې د شمېرپوهنیزو قوانینو څخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه (ثبوت) B رېښتیا وي، ځکه چې $\neg V$ نارېښتیا ده او F یا نارېښتیا او یا د B سره برابر دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د دې ناسیده ښوونې د روښانه ونې لپاره ښایو، چې $\sqrt{2}$ ایراشنل دی، دا په دې معنا چې د مات یا مسر په څېر نه شي انځورېدلای.

$$\neg B : \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

نیسو، چې غوښتنه B نارېښتیا ده. بس باور لري

$$p, q \in \mathbb{N}, \quad \text{ggT}(p, q) = 1. \quad \text{د سره.}$$

دلته ggT انگرېزي يې gcd خورا عټ کډپروېښونې (ذوالاضعاف الاقل) دی.

د نیوني څخه د مربع کوني او د q^2 سره ضربوني له امله لاس ته راځي

$$2q^2 = p^2,$$

دا په دې معنا چې p^2 او له دې سره p یو چوره یا جفت عدد دی. په ځانګړې توګه یو $r \in \mathbb{N}$ شتون لري د $p = 2r$ سره. د $q^2 = 2r^2$ له امله q هم یو چوره عدد دی او له دې سره $\text{ggT}(p, q) = 2$. دا د نیوني نیوني جوړښت $\neg B$ سره په تضاد کې ده، چې $\text{ggT}(p, q) = 1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B) \implies B.$$

له دې امله یا د دې په تعقیب باید غوښتنه B رېښتیا وی،

د پوره اندکشن له لارې ښوونه

وینابڼې د طبیعي پارامتر سره کېدې شي ډ پوره ایندکشن له لارې وښوول شي. که $A(n)$ یوه د $n \in \mathbb{N}$ په واک کې وینا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د ښوونې پلونه (قلمونه) روښانه- یا و اخستل شي. .

لومړی : د ایندکشن پیل : ښایو چې $A(1)$ رښتیا دی.

دویم : اینوکشنپایونه یا ختم: ښایو چې د نیونې چې $A(n)$ رښتیا دی (د ایندکشن هیپوتیزې)، لاسته راځي، چې هم رښتیا دی، یا په دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1).$$

نو دا باوري دی، چې $A(n)$ د ټولو $n \in \mathbb{N}$ لپاره صدق کوي.

د یوه اندکشن ښوونې سره یو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه څخه لاس ته راځي.

که د اندکشن پیل د $n_0 = 1$ لپاره نه بلکه د $n_0 > 1$ لپاره سرته ورسیري، نو وینا بیا فقط د $n \geq n_0$ لپاره صدق کوي.

د مربع (خُلوړی) عددونو د جمعې لپاره فرمول

$$A(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

کیدې شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پیل $A(1)$: ()

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

د اندکشن هیوپوتېزې، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېری (سټ)

یوه ډېری A له توکو $a_1, a_2, \dots$ جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}.$$

که توکي د یوه خوی له مخې خوی لرونکي (کرکټرېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

$$A = \{a \mid E \text{ خوی لري: } a\}$$

د دې لپاره سړی لاندې نڅښې کاروي یا استعمالوي:

لیکنډول	معنا
---------	------

$a \in A$	a د A توکی دی .
$a \notin A$	a د A توکی دی .
$A \subseteq B$	B د A برخېږي (برخست) ده
$A \subset B$	B د A برخېږي (برخست) ده
$ A $	د توکو گڼون یا تعداد په... کې
$\emptyset$	تشېږي یا تشست

که $|A| < \infty$ همداسې $A = \infty$ باور ولري، نو دلته د پای ډېری همداسې ناپای ډېری څخه غږیږو.

دوه یا څو ډېری برابرزوریزې بلل کیږي، که د دوی د توکو ترمنځ یو بیجکتیو بلواک یا تابع یعنې برعکسکیدونکی بلواک شتون ولري ($|A| = |B|$ د پای ډېری لپاره).

د A د ټول برخو ډېری $\mathcal{P}(A)$ توانېږي بلل کیږي، دا په دې معنا چې

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ او $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

لیکونکي: هیولیک، کنش

د گڼونو (اعدادو) ډېری

د لاندې گڼونو ډېری لپاره معیاري نڅېنې استعمال مومي:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

طبعي اعداد:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

ټول اعداد:

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ggT}(p, q) = 1\}$$

راشنل یا هوښیار اعداد:

$$\mathbb{R} = \{x : x = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n, q_n \in \mathbb{Q}\}$$

ریل یا حقیقي (ریښتوني) اعداد:

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

کومپلکس اعداد:

په همدې توگه لاندليکنډول هم کارول کيږي:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

او دې ته ورته یا په همدې ډول

$$\mathbb{R}_0^-, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{Q}_0^-, \mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}_0^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}_0^-, \mathbb{Z}^-$$

لیکونکي: کږ هیولیگ

په ډېریو کې عملی

د دوه ډېریو A او B لپاره لاندې علمي تعريف دي:

ټولنه (اتحاد)

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

غوځی (قطاع):

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$$

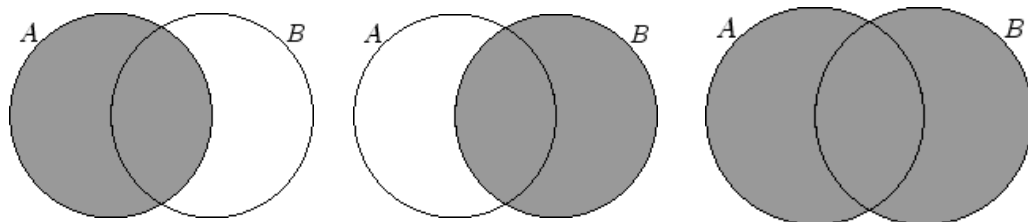
کمنبت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکې ډېری،

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\},$$

سیوتریکي کمنبت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

په لاندې خبرو کې د ډېریو عللي داسې په نامه ون-ډیاگرام Venn-Diagramme سره بنوول شوي دي.

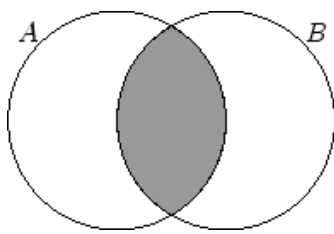


ټولنه

A

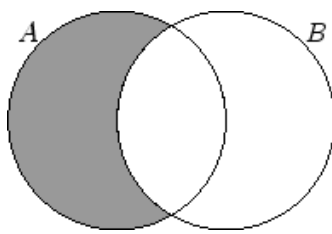
B

$A \cup B$ Vereinigung:



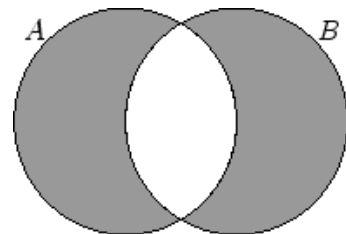
غوځی

$A \cap B$ Schnitt:



کمښت

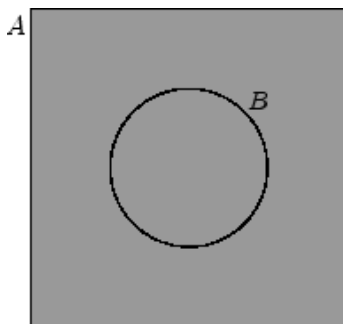
$A \setminus B$
Differenz:



سیومتريکي کمښت

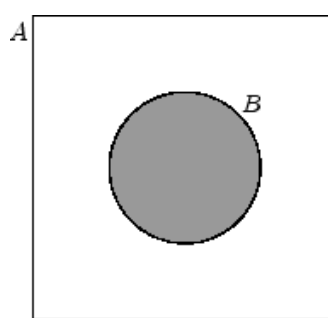
symmetrische
 $A \Delta B$ Differenz:

که $B \subset A$ وي، نو یوڅو دیاګرامونه یو بل سره خوري یا یو په بل پریوځي:



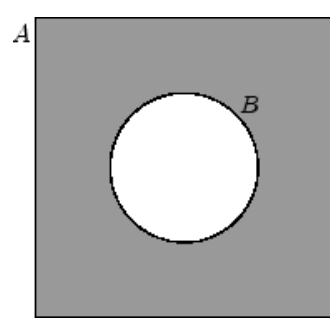
ټولنه

Vereinigung:
 $A = A \cup B$



غوځی

$B = A \cap B$ Schnitt:



پوره کېدنکي ډېری

Komplementärmenge :
 $A \setminus B = A \Delta B$

لیکونکي: هوليگ، هورنر، کنیش

د ډېریو عملیو لپاره شمېر قوانین:

اسوځیاتيو:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموناتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Morgansche Regeln: •

• د مورگان قانون یا قاعده

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

• دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د $\cup, \cap$ عملیو په ځای $\wedge, \vee$ کېږدو او $C \setminus$ په ځای $\neg$ کېږدو.

لیکونکي: هیولیک، هیونر

د نمونې په توګه به د دې مورګان لومړی قانون و ښوول شي. باور لري:

$$x \in C \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د دېستريپوتيو قانونو له مخې اخرنی افاده يا وېينه د لاندې سره برابر ارزښته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C \setminus A \cup C \setminus B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کټمټوالی ښوول شوی.

ليکړنکی:ک. هیولیک

د دې مورګان قاعدې له مخې د بېلګې په توګه لاس ته راځی

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د دېستريپوتيو قانون د بېلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B = (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري $(A \cap B) \cup B = B$ ، ځکه چې $(A \cap B) \subseteq B$ دی

کارتېزي ضرب (ځل)

د دوه ډېریو A او B کارتېزي ضرب دواړو ډېریو د ټولو منظمو جوړو ډېری ده:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

باور لري:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b').$$

دایه دې معنا چې د ډېرې برابروالي ($\{a, b\} = \{b, a\}$) په عکس یا په خټ د لړۍ پرلپسې غوره ده

په ورته توګه n - واره یا ځله کارتېزي ضرب تعریفوو

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

د ټولو منظمو n - ګونونو $(a_1, \dots, a_n)$ د $a_i \in A_i$ سره . که ډېرې برابرې وي، نولیکو:

$$A^n = A \times \cdots \times A$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اریکي Relation

که د ډېرې A توکي د ډېرې B له توکو سره په اړیکو کې قرار ولري یا ولاري وي، نو کېدی شي دا د یوې اړیکې سره افاده یا وویل شي. دا د توکو له منظمو جوړو (a, b)

جوړه ده، چې دا د اړیکو له لارې سره تړلي دي. نو یوه اړیکه R د A او B د کارتېزي ضرب برخه ډېرې ده. وایو چې a د b سره په اړیکو کې ده او د دې لپاره لیکو $a R b$:

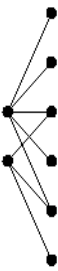
$$a R b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B.$$

لیکونکي: ژ. هیورنر

د اړیکو د داتا بانک Relationale Datenbank

یوه نمونه یي بېلگه د اړیکو د ،،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلگې په توګه یو د درسونو (لکچرونو) جدول او یو د زده کړو جدول ورکول شوي چې یو له بل سره په اړیکو کې راغلي. دا په لاندې څېره کې روښانه شوي.

په لاندې کې کین لور ته نومونه دي

			کوټه	درس		
Mtr.-Nr.	Name		<table><tr><td>V57.01</td></tr><tr><td>V47.02</td></tr></table>	V57.01	V47.02	لور شمیرپوهنه ۱ د زده کوونکو...
V57.01						
V47.02						
1000000	Anton Antonius					
1000001	Berta Bethel					
1000002	Cornelius Cornell					
1000003	Damian Damien					
1000004	Egon Ekel					
1000005	Frank Frankfurth					

دا هم دلته روښانه شوي چې د یوې ډېرې توکي د بلې ډېرې د توکو سره په اړیکو کې راځي یا که غواړئ: قرار لري.

لیکونکي: بوسلر، هیورنر

د اړیکو خویونه

په یوه ډېرې A کې یوه اړیکه $R \subseteq A^2$ په لاندې توګه بلل یا نمول کیږي:

رفلکسیو reflexiv، که هر توکی د خپل ځان سره په اړیکه کې وي:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

سیومتری symmetrisch، که د توکو لړۍ پرلپسې کوم رول نه لوبوي.

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

انتی سیمتری antisymmetrisch ، که که له سیمتری خُخه کټمټوالی لاس ته راشي:

$$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

ترانزیتیو transitivity ، که له یوه زنجی خُخه منځنی توکی لري کېدی شي:

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

توتالي total، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړیکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتريک او ترانزیتیو وي، نو دا ،، ورته اړیکې،
(برابرازېسته اړیکې) بلل کېږي. دلته بیا زیات وخت $a \sim b$ د $a R b$ په ځای
لیکل کېږي. یو ورته اړیکې ډېری A په توکي پرډیو برخډېریو ویشي (ورته یا برابر
ارزېسته ټولګیو)، د کوم سره چې د یوې برخډېری دوه توکي یوېل سره په اړیکو کې
درېږي (برابرازېسته دي). په داسې حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډېریو خُخه
داسې حالت نه لري.

که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتري او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره

د $a \leq b$ په ځای لیکل کېږي. که یو نیم نظم د دې برسېره (سربېره) توتالي

وي، نو دا (توتال) نظم بللکېږي او A د $\leq$ سره منظمه ده.

لیکونکی: ژ هیورنر

د یوې ډېری M پوټنځېږی $\mathcal{P}(M)$ کې د ډېری خونډیونه یا په کې ځایېدنه $\subseteq$ نیم
نظم دی، ځکه چې باور لري:

$$A \subseteq A \quad \text{رفلکسیو} \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B \quad \text{انتیترانزیتیو}$$

ترانزیتیو $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ قوانین. که M له یوه زیات توکي ولري، نو خونديونه نظم نه ی، ځکه چې لاندې باور لري:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$$

دا په دې معنا چې دا ټوتالي منظمه نه ده.

اړیکي،، ټیک دومره توکي لري لکه،، د یوې پای دېری M په تواندېری کې

$$P(M) \quad |A| = |A| \quad \text{برابر ارزښته ده ځکه چې باور لري:} \quad \text{(رفلکسیو)،}$$

$$|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A| \quad \text{(سیومتري)،}$$

$$|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C| \quad \text{(ترنزیټیو)}$$

لیکونکی: ژ هیورنر

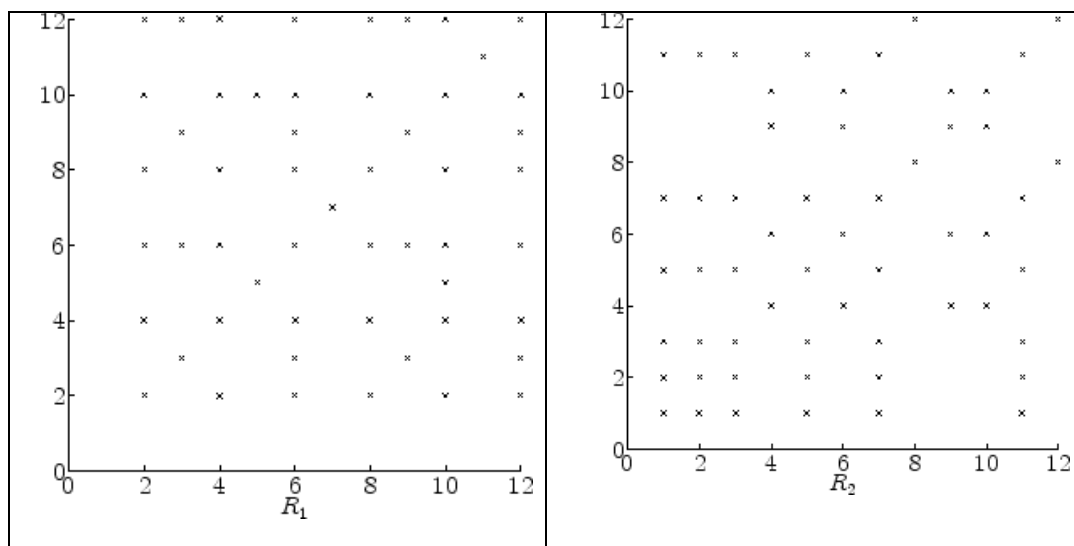
په یوې دېری باندې زیات وخت اړیکي یا په همدې ډول برابر ارزښته – اړیکي د توکو د خویونو له لارط تعریفیږي. د بېلګې په توګه دوه اړیکي په

$$M = \{1, 2, \dots, 12\}$$

کې ترڅېړنې لاندې نیسو:

لومړی $x R_1 y$ او x یو ګډ پروېشونی (مقسوم علیه مشترک) $\neq 1$ لري .

دویم $x R_2 y$ او x برابر دېر پروېشوني لري



ځيرونه يا يا تابع (بلواک) د $M \times M$ برخدېريو په څير د اړيکو گراف بڼايي .
 اړيکې R_1 سيومتريک او رفلکسيو دي، مگر نه ترانزيتيو. د بيلگې په توگه $x = 4$
 او $y = 6$ گډ پروېشونی 2 لري او $y = 6$ او $z = 9$ گډ پروېشونی 3 لري، مگر
 $x = 4$ او $z = 9$ گډ پروېشونی نه لري. نو

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

باور نه لري.

اړيکې برابر ارزښت - اړيکې دي. رفلکسيويټي، سيومتري او ترادزيتيويټي په څرگنده
 توگه پوره دي. برابر ارزښته - ټولگي

دي د يوه، دوه، درې څلور او شپږ پروېشونو سره.

ليکونکي: هيلېک، کرايخ

فنکشن (بلواک يا تابع)

د يوه فنکشن f لاندې له يوې ډېرې A په يوه ډېرې B باندې يوه قانونمدي پوهيرو،
 چې هر $a \in A$ توکی په يواځني ډول يو ټاکلي $b = f(a) \in B$ باندې تنظيم
 کړي.

$$f : A \longrightarrow B .$$

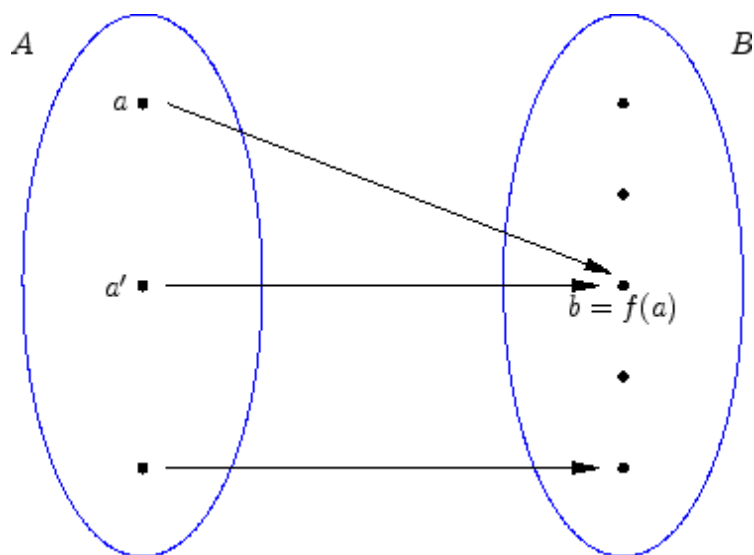
د توکو- نظم لپاره لاندې لیکندود استعمالیږي

$$a \mapsto b = f(a)$$

او b د a څېرې یا ارزښت په حیث بلل کیږي او همداسې a د b (د پخوا څېرې) د تعریف توکي په څېر بلل کیږي.

لکه د لاندې څېرې څخه چې کتل کیږي، باید د B توکي د A د یوه توکي د څېرې توکي په توګه رامنځ ته شي او د B یو توکی کېدی شي د A د ډېرو توکو څېره یا نظم وي. په هر حالت باید د A د هر توکي لپاره په یواځني توګه یوه څېره شتون ولري، دا په دې معنا چې له هر a څخه باید یو غشی وتلی وي.

پیژندل کیږي چې څیره زیات تعریفونکي یا د څیرې پخوانۍ یا نوره هم ښه مخکنې لري (دا په دې معنا چې څیره کېدونکې دی)، دلته د بیلګې په توګه a او a' د څیرونی لپاره کلیمه فنکشن هو کارول کیږي، په ځانګړې توګه په ریل ا حقیقي او کمپلکس انالیز کې.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کیمرلي

د تابع يا څيرونې يا بلواک (تابع) خويونه

د دوه ډبريو A او B ترمنځ يوه تابع

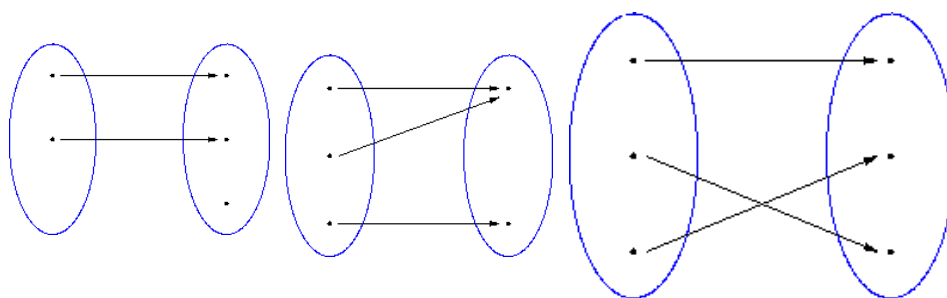
$$f : A \longrightarrow B$$

داسې يا په لاندې تگه بلل کيږي:

په کې بلواک injectiv : که د هر
 $a, a' \in A$ لپاره د $a \neq a'$ سره دا
 $f(a) \neq f(a')$ صدق وکړي.

په باندې (بلواک) surjektiv : که هر
 $b \in B$ لپاره يو $a \in A$ شتون ولري د
 $f(a) = b$ سره.

په (بلواک) bijektiv : که (تابع) f په کې او په باندې وي.
دا کليمې کېدې شي د ډبرې دياگرام له لارې روښانه شي.

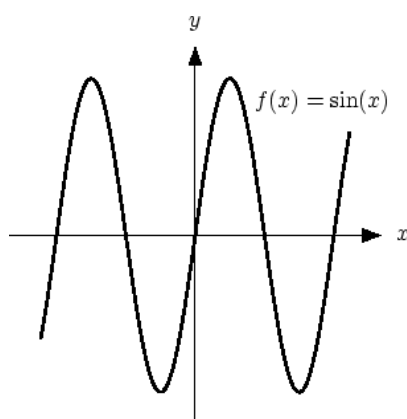


injectiv په کې

surjektiv په باندې

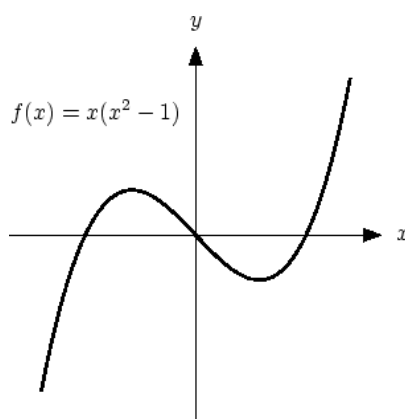
په bijektiv

د يو څو بلواکو (توابعو) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
خويونه ورکړ شوي دي



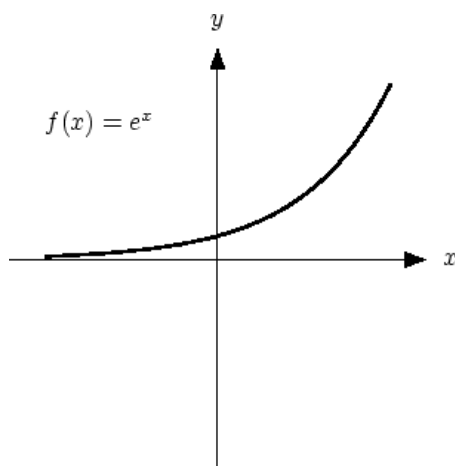
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې



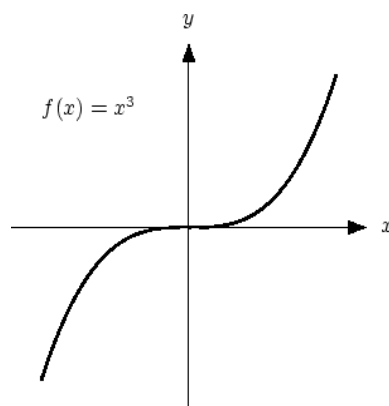
surjektiv, aber nicht
injektiv

په باندې، مگر نه په کې



nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مگر په کې



bijektiv, d.h. injektiv und
surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په
باندې

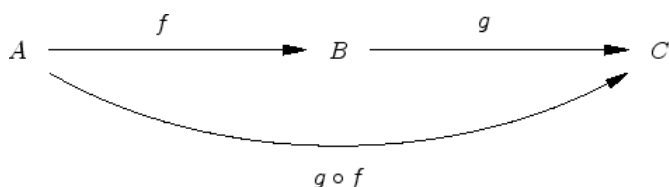
د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) ترنه یا عمليي

Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو سره گډ اېښونه) د
ترنه یا کمپوزیشن (زنځيرونه یا
 $g : B \rightarrow C$ او $f : A \rightarrow B$

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعريف شوی او په لاندې دياگرام کې ليدور گرځېدلی.



تابع اسوحياتيو ده، دا په دې معنا چې $\circ$ ترنه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مگر په څرگند ډول کموناتيونه نه ده.

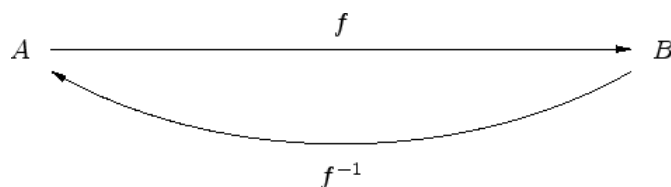
ليکونکي: هيوليگ، کنش

په څټ يا برعکس فنکشن (بلواک يا تابع) Inverse Abbildung

د يوه په فنکشن يا تابع $f : A \rightarrow B$ لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې په څټ فنکشن يا برعکس تابع $f^{-1} : B \rightarrow A$ تعريف ده.



په ځانگړې توگه ورته تابع دی. $a = f^{-1}(f(a))$ دی، داپه دې معنا چې $f^{-1} \circ f$ کټمټ يا

ليکونکي: هيوليگ، کنش

فاکولتي يا فکتوريل Fakultät

د لومړيو n طبيعي اعدادو يا گڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

سره په نڅېنه کيږي. (لوسټل يي: n فاکولتي). له دې سره کلک تړلی يا له دې سره ه کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو: $0! = 1$.

گڼ يا عدد $n!$ د n مختلفو شیانو دمختلفو امکاناتو د ترتیب يا نظم گڼون يا تعداد ر ښايي

د لوی n لپاره د $n!$ اسپيټوتيکي حالت د سټرلینګ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(1/n)).$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د بېنوم ضريبونه (خلووني) Binomialkoeffizient

د $n, k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د $n \geq k$ سره د بېنوم ضریبونه تعریفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د $0! = 1$ له امله په ځانګړې توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بېنومي ضریب $\binom{n}{k}$ د n توکوسره یوې ډېرې k - توکیزو برخېږیو ګڼون یا تعداد ورکوي.

د پاسکال درېګودی (مثلت) Pascalsches Dreieck

د بېنوم ضریبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

د لاندې رېګورزیون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په یوه درېګدیزې شیمې یا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې یا له لارې وشمېرو.

$\binom{0}{k}$				1					
$\binom{1}{k}$				1			1		
$\binom{2}{k}$			1		2		1		
$\binom{3}{k}$		1		3		3		1	
$\binom{4}{k}$		1		4		6		4	
$\binom{5}{k}$	1	$\swarrow$	$\searrow + \swarrow$	$\searrow + \swarrow$	$\searrow + \swarrow$	$\searrow + \swarrow$	$\searrow + \swarrow$	$\searrow$	
			5	10	10	5			1
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			

ليكونكي: هيوليگ، کنش

دا د بنوولو کټمټوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

د $n!$ سره وېشنې او $(n-k+1)!k!$ سره ضربونې له لارې د

$$n+1 = k + (n+1-k).$$

سره برابرازېسته دی.

ليكونكي: هيوليگ، کنش

د بېنوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

د بینوم درسي جملې سره کېدی شي د دوه متحولو یا اوونستونو د زیاتون یا جمعي توان وشمېرل شي.

د ټولو $n \in \mathbb{N}_0$ لپاره صدق کوي:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \\ a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \end{aligned}$$

په ځانګړي توګه د $n = 2, 3$ لپاره:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

د بینوم جمله کېدی شي د پوره ایدګشن له لارې وېنول شي.

د $n = 0$ او $n = 1$ لپاره کټمټوالی د

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a + b$$

له امله د په خوښه a او b لپاره رېښتیا یا ټیک دی.

نیسو چي د n لپاره صدق کوي. نو دی:

$$\begin{aligned}
 & (a+b)^{n+1} \\
 &= \\
 & (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
 &= \\
 & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
 &= \\
 & a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
 &= \\
 & a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
 &= \\
 & a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
 &= \\
 & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
 \end{aligned}$$

د بېنوم ضریبونو لپاره کټمټوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

د بینوم ضریبونو لپاره لاندې کټوتوالی صدق کوي:

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0.$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

لومړي دواړه کټوتوالي ترلې د بینوم د درسي څخه لاس ته راځي،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو $a = b = 1$ همداسې $a = -b = 1$ سره .

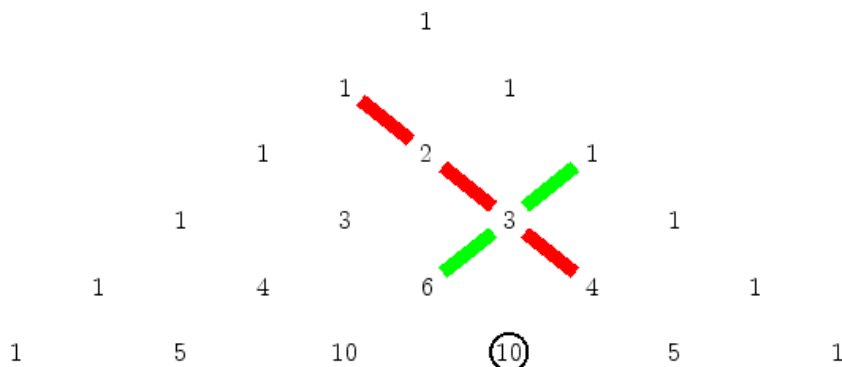
دریم کټوتوالی د ریکورزین فرمول په بیا بیا استعمال له لارې لاس ته راځي.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \dots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}$$

په دې مساواتو کې د په ځای ایښولو یا سبستیچیشن Substitution

له لارې څلورم کټوتوالی لاس ته راځي. $(n-k) \leftrightarrow k$

دا اړخني دواړه کټوتوالي کېدی شي په پاشکال درېګوډي کې جمعه کونې لڅ لارې انځور شي.



د دېریو یا ستونو کمبیناتوریک Kombinatorik von Mengen

(د کمبیناتوریک د نورې زیاتې کتنې لپاره دې زما د شمیرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو ګڼون یا تعداد ورکوي، چې د یوې د n مختلفو توکو سره دېرې څخه k توکي ټاکلې شو، د کوم سره چې باید توپیر شي، چې ایا د لړۍ پرلپسې یو رول لري (ترتیبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم (د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتیب	nicht sortiert نا منظم
له تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1) \cdots (n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

لیکونکي: هیولیک، کنش

لومړۍ : نا ترتیب یا نا منظم ټاکنه بې له تکرار څخه

که د لړۍ پرلپسې په پام کې ونیو لي، نو د لومړي ځل لپاره n امکانات شتون لري،
 $(n-1)$ امکانات د دویم لپاره، تر $(n-k+1)$ امکاناتو پورې د k -م
توکي لپاره، نو په ټولیزه توګه

$$n(n-1) \cdots (n-k+1)$$

امکانات شتون لري.

دا باید د ګڼون یا تعداد $k!$ سره وه وېشل شي چې د k توکو پرموتیشن (د توکو ځای بدلون : لنډ: ځای بدلون) دی.

دويم : نانتیب شوي انتخاب د تکرار سره

یو برابر ارزښته پر اېلم دادی، چې $n - 1$ په نځېنه شوي (نشاني شوي) د $n + k$ ټکو تر منح ځای په ځای شي.



د $(i - 1)$ -م او i -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د i -م ټوکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نځېنه کېدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n + k - 1}{n - 1},$$

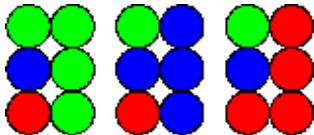
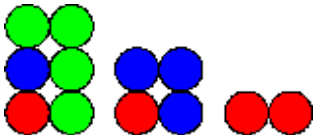
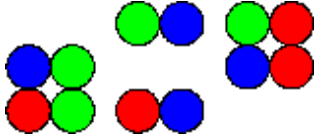
کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

دریم : د تنیب شوي انتخاب لپاره فرمول پسې تړلی لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیگ، کنش

په یوه مرتبان کې یو سور یو شین او یو اسماني توپونه (غونډوسکې) پراته دي. په جدول کې د دوه واره راوستنې د امکاناتو تعداد کتل کیږي ($k = 2, n = 3$).

ناترتیب شوي یا نامنظم	ترتیب شوي	
$\binom{n + k - 1}{k}$	n^k	د تکرار سره (دبېرته وراچونې سره)

		
	$3^2 = 9$	$\binom{3+2-1}{2} = 6$
بي د تکرار سره (نه دبېرته وراچونې سره)	$n(n-1) \cdots (n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
		
	$3 \cdot 2 = 6$	$\binom{3}{2} = 3$

لیکونکي: هیولیک، کنش

د موټر نمره Autokennzeichen

د یوه الماني موټر نمره د ایالت یا ښار لپاره د ≤ 3 تورو کمینېشن، ≤ 2 د نورو تورو او تر یوه څلور ځایز عدد څخه د بېلګې په توګه :



له n تورو څخه 26^n کمپینشنونه شتون لري او له دې سره

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې (که د ښار یا ایالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نیول شي

لیکونکي: هیولیک، کنش

پوښتنې

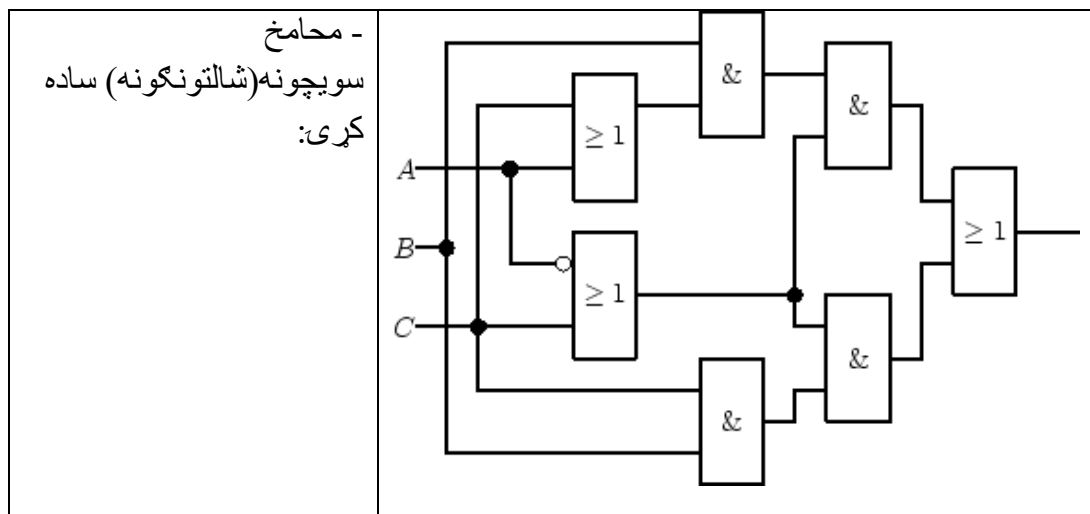
- د ښه بدلون او همداسې د رښتیا جدول سره و و زامی، چې ایا افادې یا ویېنې تل ټیک دي یعنی Tautologien دي:

$$(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$

پای.

- اړیکې $\square, \diamond$ د ډېرې پوهنې څخه د منطقي علیو $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:



- ډېری ، یوه تابع $f : A \rightarrow B$ ، همداسې برخې $U, V \subset A$

او $X, Y \subset B$ ورکړ شوي دي. د لاندې اړیکو رښتیاوالی همداسې نارښتیاوالی د یوې مناسبې برعکس بېلګې په مرسته وښایي:

$$f(U \cap V) = f(U) \cap f(V) \quad f(U \cup V) = f(U) \cup f(V) \quad \text{الف-} \quad \text{ب-}$$

$$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \quad \text{پ-}$$

$$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \quad \text{ت-}$$

- د یوه تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ په هکله لاندې ویناوې په فورمال لیکندود افاده کړی:

الف - f په باندې نه دی ب - f په کې نه دی

پ - f په نه دی ت - f نه په کې او نه په باندې دی

لیکونکی: کریستیا اپیپین

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ایدکشن له لارې وښایي:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{a)} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{b)}$$

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ایدکشن له لارې وښایي:

الف : $a_n = n^3 + 5n$ په 6 وېشونی دی.

ب : $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ یو طبیعي عدد دی.

- په یوه میلمستیا کې 25 کسان سره یوځای کیږي. څومره لاسونه سره ورکول کیږي، که هر میلمه هر بل میلمه ته لاس ورکړي. .

د شمیرپوهنې له لومړني کورس څخه

- و بنایي:

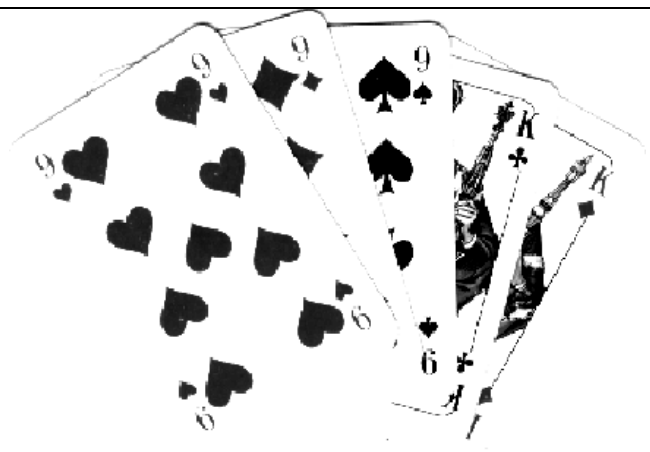
$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \quad \text{a)}$$

$$\sum_{\ell=1}^n \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1} \quad \text{b)}$$

لاس ته راوړي یې په پاسکال درېځوډي کې انځور کړی. لیکونکی: کلاوس هیولیگ

- په یوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده (8 ارزښتونه 4 رنګونه) څومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابر ارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتې لاس ته راوړل شي؟

د دې لپاره څومره امکانت شته چې دا څېره شوي کارتې د دوه کارتو بدلولو سره یو پوکر) څلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟



ازمايننت Test

لومړۍ پوښتنه:

د لاندې منطقي ابادې رښتيا ارزښت پيدا کړۍ

$$D : (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د ويناو A, B, C د رښتيا ارزښتونو تابع يا په واک کې وي.

هر ځل يا 'w' او يا 'f' ورکړۍ.

دويمه پوښتنه:

$$B = \{4, 5, 6, 7\} \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

او

دېرۍ ورکړۍ.

په گوته کړۍ، چې ايا لاندې ويناوې رامنځ ته کيږي که نه (J) د هو لپاره او N د نه لپاره)

دريمه پوښتنه:

د دوه هره يوه د درې توکيزه دېريو A او B ترمنځ څومره اړيکې شتون لري؟

له ې څخه څومره بلواک يا تابع دي او څومره بلواک يې په باندې (سورجکتيو) دي؟

څلورمه پوښتنه:

و څېرۍ چې ايا لاندې توابع يا بلواک $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ په باندې، په کې او په دي:

$$\text{a) } f(x) = x \sin x \quad \text{b) } f(x) = \exp(-x^3 + 1)$$

$$\text{c) } f(x) = x \ln \frac{1}{|x| + 1}$$

پنځمه پوښتنه:

خومره پنځه ځایزه ګڼونه یا عددونه شتون لري د لاندې سره

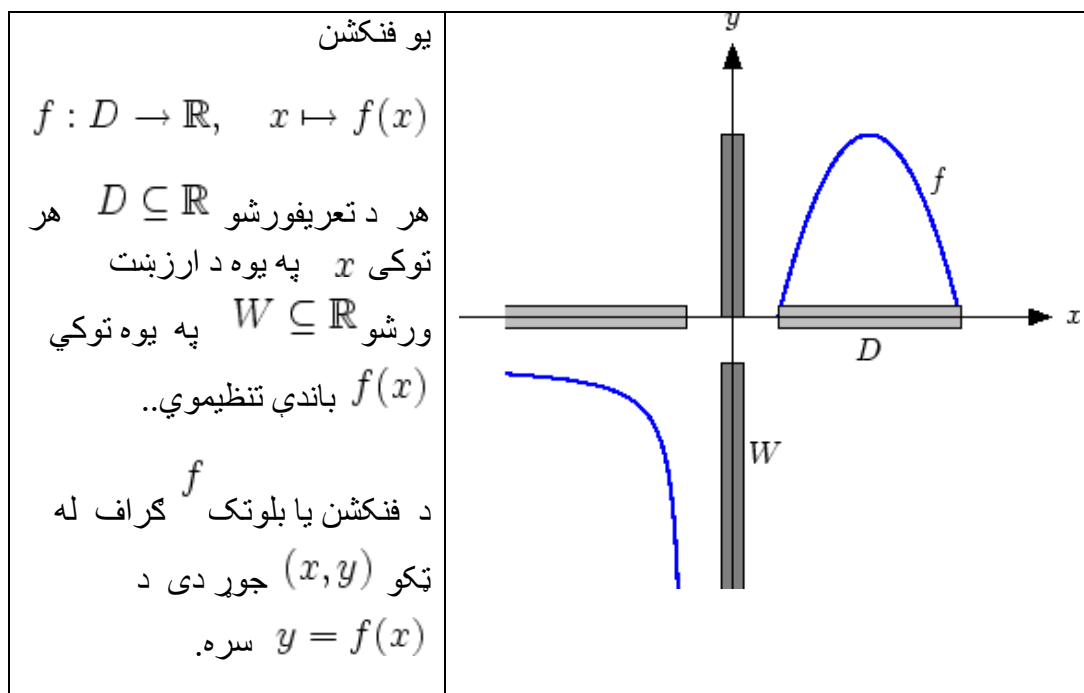
الف: پنځه مختلف عددونه

ب) تیک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

خومره امکانات شتون لري، چې ناه کسان په درېییز ګروپ ووېشو؟

تابع یا فنکشن یا بلواک Funktion



لکه د تابع څخه چې لیدل کیږي، د تعیف ورشو (رون شین) او د ارزښت ورشو (تیاره

خړ) x - محور همداسې د y -محور پرېستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، باید په ساده تابع رامنځ ته شوي بندیزونه په پام کې ونیسو. د لوگاریتم ارگومنټ باید مثبت (زیاتیز) وي:

$$x \geq 0. \quad 3-x > 0$$

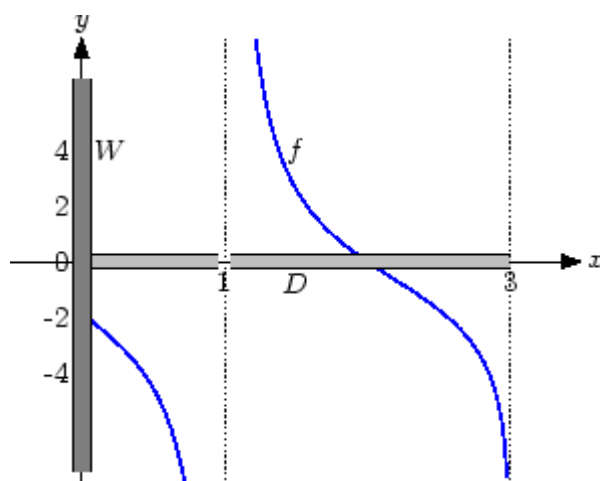
یعنې

په هر حالت مخر-(ماتلاندي) بای صفر نه شي، دا په دې معنا چې $x \neq 1$.

په ټولیزه توګه لاس ته راځي:

$$D = [0, 3) \setminus \{1\} = [0, 1) \cup (1, 3).$$

د f ارزښت د رسم سره روښانه یا واضح کیږي.



دا چې f د $x \in (1, 3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي یا اخلي، نو باور لري. $W = \mathbb{R}$.

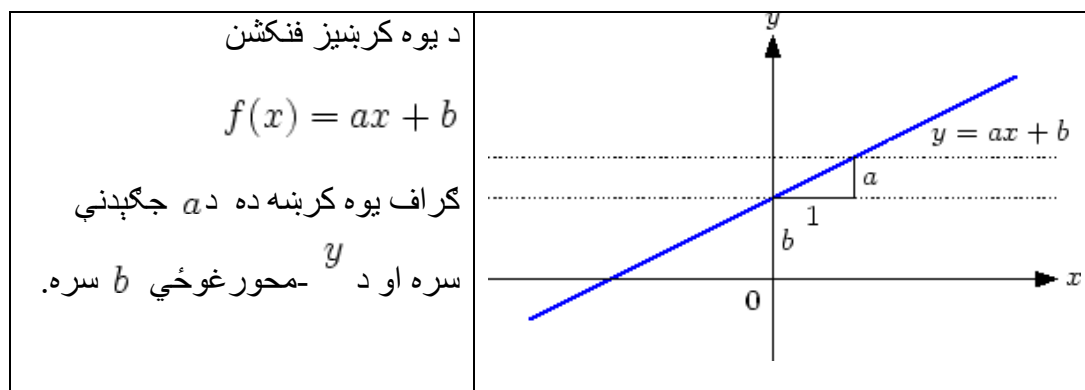
لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کنش

لاندې جدول د څو بنسټيزو بلواک يا توابعو د تعريف - او ارزښت ورشو بڼايي:

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k + 1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر، کنش

کرښيز فنکشنونه Linear Funktion



الترناتيو يا بدیلې انځورونې يې ټکي-جگيدنې-بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

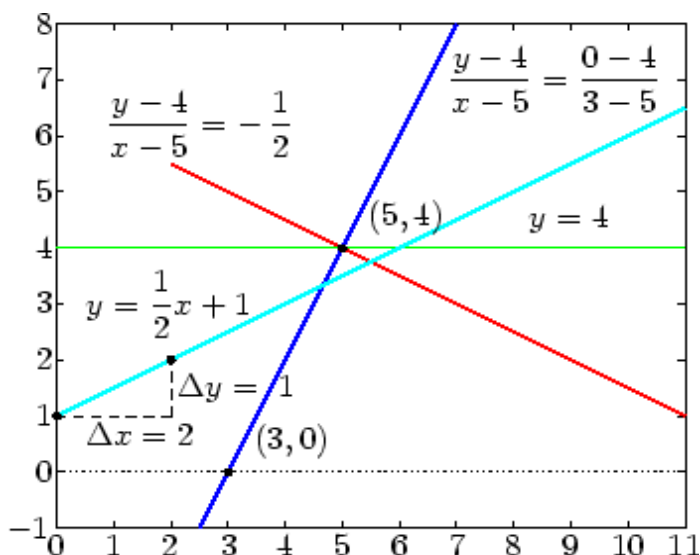
او د دوه ټکو-بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

دي، د کوم سره چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه ټکي دي.

ليکونکي: هیولیک، هیورنر

تابع د کرښو فنکشنونو مختلفو انځورونو بڼې ښايي یا په نڅښه کوي.



مربعیز فنکشنونه Quadratische Funktion

د یوه مربعیز تابع گراف

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

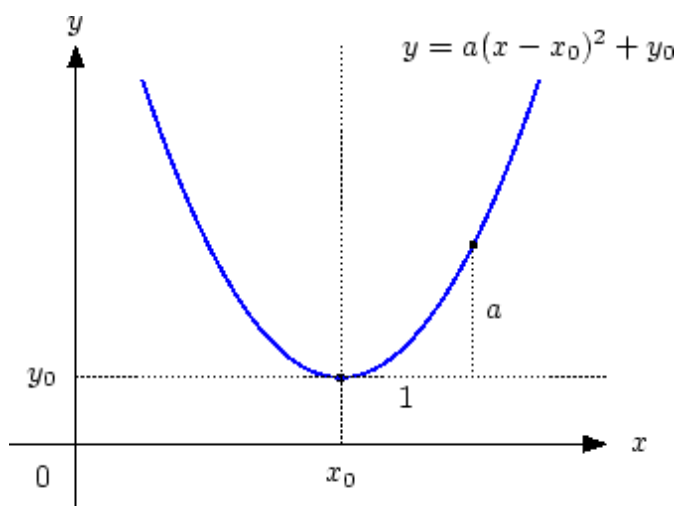
یو د

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بني پارابول دی د ککړې

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c \right).$$

سره.



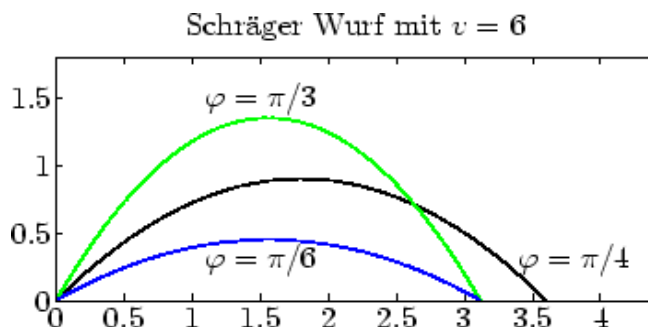
مايل گوزار يا - غورځونه Schräger Wurf

که یو تن د کونج φ لاندې د یوې چټکتیا v سره وغورځول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x \tan \varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \varphi} x^2$$

بڼایي، چېرته چې g د ځمکې بیرته (تعجیل) ده.

مایله گوزارونه یا - غورځونه د $v=6$ سره.



مسافات د برابر د ولیز خوزښت څخه لاس ته راځي د پیل چټکتیا v سره په x - او y - کمپوننتونو یا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځونې بیره ییز خوزښت سره.:

$$x(t) = vt \cos \varphi \Rightarrow t = \frac{x}{v \cos \varphi}$$

$$y(t) = vt \sin \varphi - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{vx \sin \varphi}{v \cos \varphi} - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \varphi} = x \left(\tan \varphi - \frac{gx}{2v^2 \cos^2 \varphi} \right).$$

د غورځونې واټن دی:

$$x = \frac{2v^2 \cos^2 \varphi}{g} \tan \varphi = \frac{v^2}{g} \sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \hat{=} 45^\circ$ لپاره ماکسیمال کیږي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیک، کنش

پولینوم Polynom

یو د n -م دجې پولینوم P په لاندې بڼه لیکل کیږي:

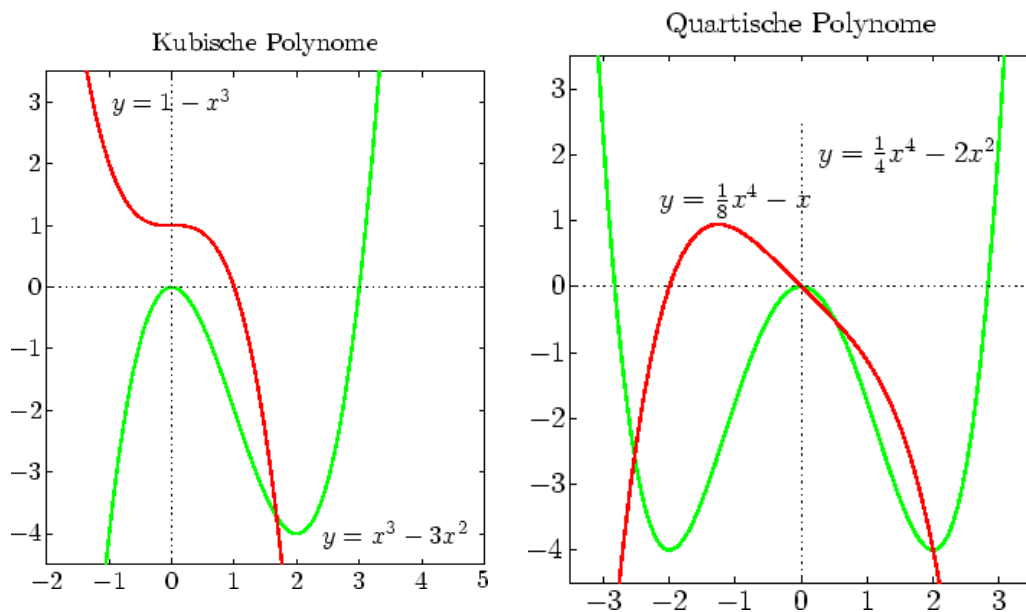
$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

د $a_n \neq 0$ سره .

اووښتونې یا متحوله x او ضربیونه a_k کېدې شي ریښتونی (حقیقی) یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې امله له حقیقی همداسې کمپلکس پولینومونو غږیږو.

لیکونکي: هیولیک، هیرنر

لاندې توابع مکعبی $n = 3$ او مربعی $n = 4$ پولینومونه په ګوته کوي، د څرنګوالي (کوالیټي) مختلف تابع ګراف سره



لیکونکي: هیورنر، هیولیک، کنش

راشنل فنکشن یا بلواک (تابع) Rationale Funktion

یو نسبتي تابع د صورت (ماتباندي) درجي m او مخرج (ماتلاندي) درجي n سره یو د دوه پولینومونو وېش دی.

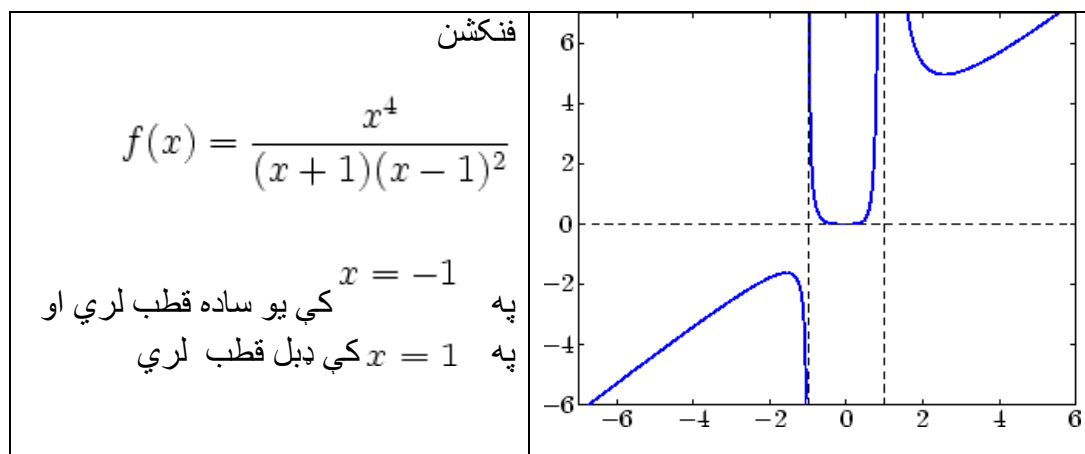
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n}.$$

دا انځورونه ناوېشور irreduzibel بلل کیږي، که p او q کوم ګډ کرښیز ضریب ونه لري.

د مخرج صفرځایونه راشنل تابع r د تعریف تشیاوې دي او د پول ځایونو په نامه یادېږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی دی.

د اووښتونې یا متحولې x او ضریبونه a_k, b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي یا کمپلکس رېښتونې فنکشن څخه غږیږو.

لیکونکي: هیولیک، اپې



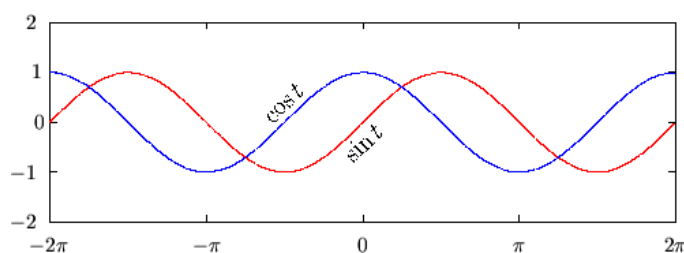
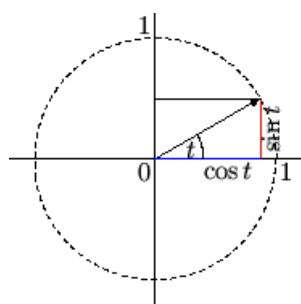
د تابع څخه پېژندل کیږي، چې f په یوه ساده قطب کې مخنښه بدلوي او په ډبل قطب کې مخنښه نه تغیروي. لیکونکي: هیولیک، اپې

ساین او کوساین Sinus und Kosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره کواوډینات چې په سرچینه کې په کونچ t څرخول شوی ټکی $(1, 0)$ په نڅبنه کیږي.



دواړه د گردۍ یا دایرې توابع کوسان او ساین 2π - پریودیکی (تل بېرته راگرځېدونې) دي او باور لري

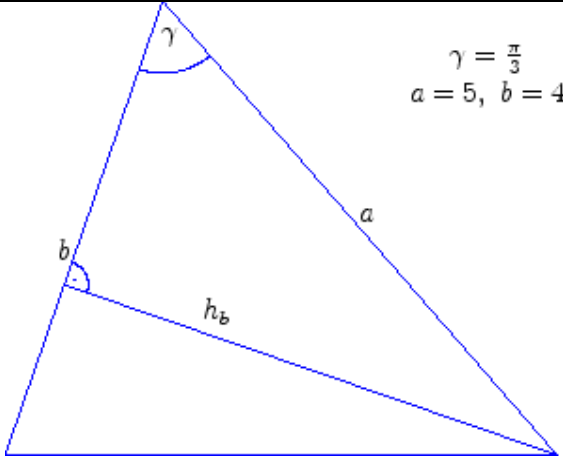
$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

$$\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

د تر مخنځې پورې د دایرې تابع د ولاړگوډیز درېگوډي (قایمالزایه مثلث) د قطر (نیمي) سره چې اوږدوالی یې 1 دی دو لارو (عودو) ضلعو اوږدوالی ښايي. یو څو ځانگړي ارزښتونه یې دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د دې لپاره چې د څېره شوي درېګوډي د سطحه وټاکلی شو، لومړی جکوالی h_b شمېرو: $\sin \gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a \sin \gamma .$ له دې سره لاس ته راځي: $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma .$	 $\gamma = \frac{\pi}{3}$ $a = 5, b = 4$
---	---

د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس ته راځي:

$$F = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} .$$

د ساین او کوساین لپاره د جمعې جمله (قضیه)

د داېرې توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې صدق کوي:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta$$

په ځانګړې توګه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

لیکونکی: ژ. هیورنر

تابع

$$u(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

اړيکي د دوه لړزېدنو يو ځای رامنځ ته کېدنه روښانه کوي. د جمعي قضیې په

$$\bar{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$$

مرسته کېدی شي انځورونه ساده شي. د

$$\Delta w = |w_1 - \bar{w}|$$

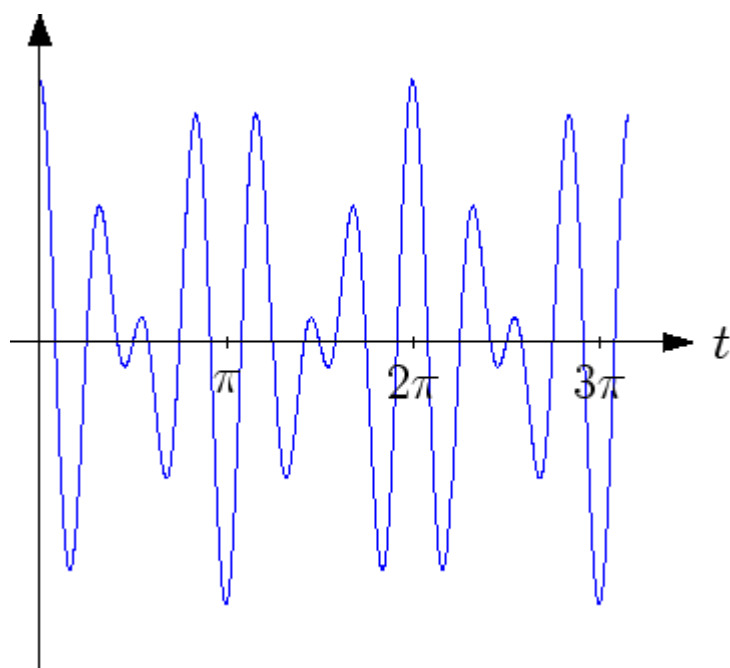
سر له

$$\cos(\bar{w} - \Delta w t) = \cos(\bar{w} t) \cos(\Delta w t) + \sin(\bar{w} t) \sin(\Delta w t)$$

$$\cos(\bar{w} + \Delta w t) = \cos(\bar{w} t) \cos(\Delta w t) - \sin(\bar{w} t) \sin(\Delta w t)$$

څخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2 \cos(\bar{w} t) \cos(\Delta w t).$$



بلواک د $w_1 = 7$, $w_2 = 5$ لپاره لرځېدنه بڼايي، دا په دې معنا چې $\overline{w} = 6$,
او $\Delta w = 1$

$$u(t) = 2 \cos(6t) \cos t.$$

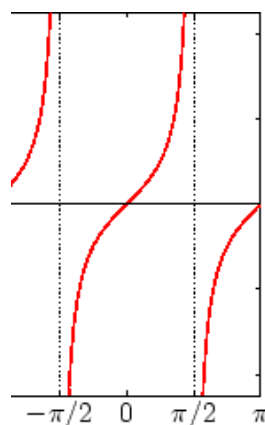
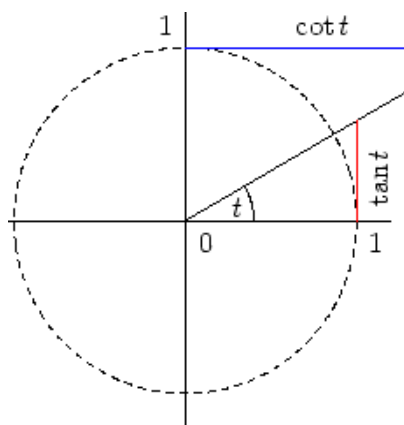
ليکونکي: هيوليگ، کرايڅ

تانجنت او کوتانجنت

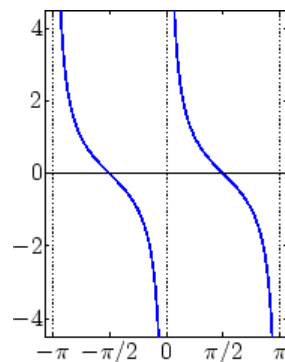
توابع تانجنت او کوتانجنت د

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړگوډيز درېگوډي (قايم الزاويه مثلث) کې د تر
مخنځينې پورې د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي



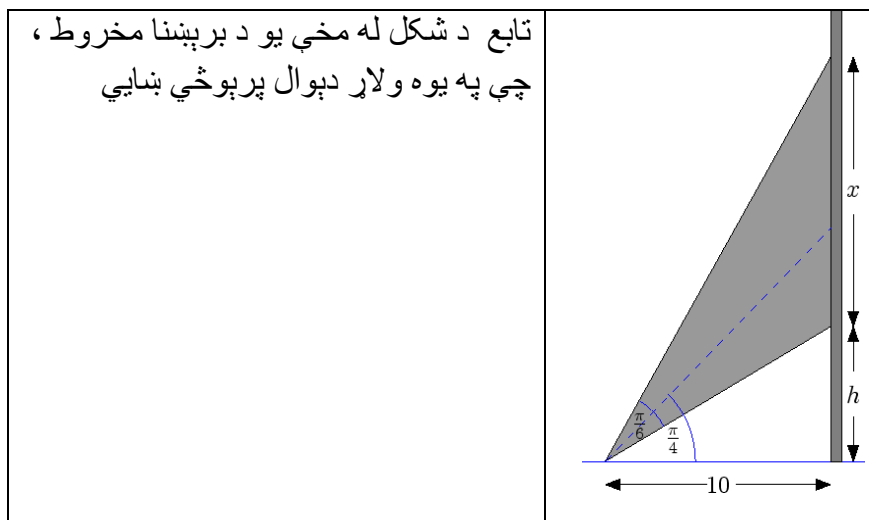
Tangens



Kotangens

يو څو ځانگړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0



د دې لپاره چې خورا لوي يا ماكسيمال پوسېده د ټاكلي شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

که $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ په دويم مساوات کې ځايه ځای کړو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$$

ليکونکي: هيوليگ، کرايڅ

يعنې

اکسپوننشل توابع (بلواک)

توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

د اویلر Eulerschen عدد $e = 2.71828\dots$ سره اکسپوننشل تابع بلل کیږي. دا د

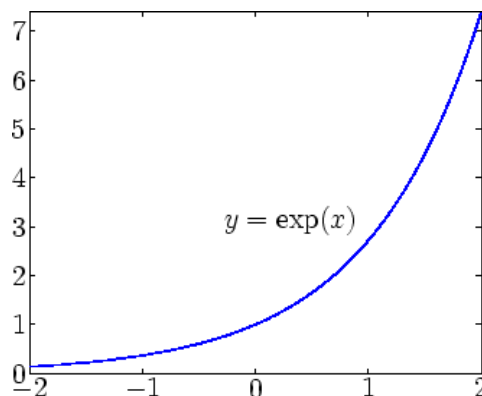
ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره مثبت (زاتیز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y .$$

پوره کوي.

$$e^{-x} = 1/e^x$$

په ځانګړې توګه دی .



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اکسپوننشل تابع د ډېرو بیولوژیکي پروسو زیاتوالی روښانه یا تشریح کوي.

د بېلګې په توګه د یوه ساده نفوس موډل متناسب دی د اوسنیو نفوس تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) .$$

د $\Delta t \rightarrow 0$ لپاره دا د ډېروالي قانو د $p(t)$ مودلی کيږي.

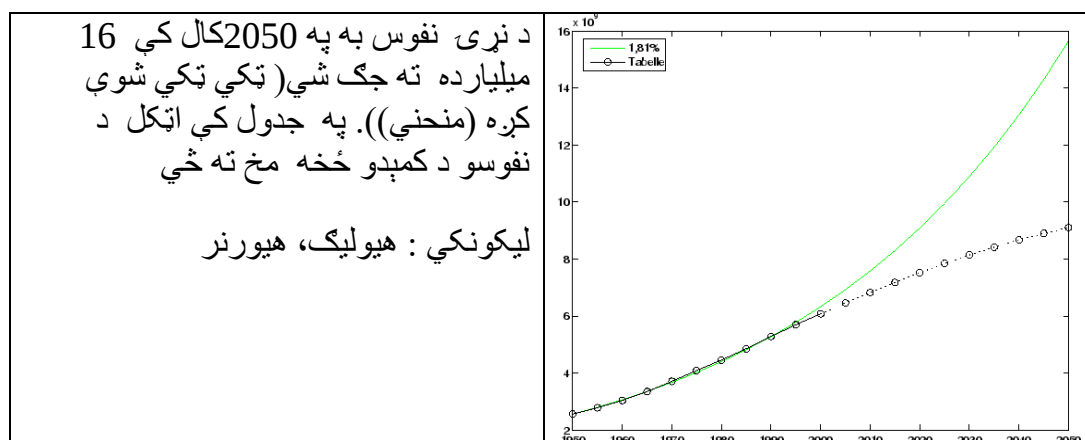
لاندې جدول د نړۍ نفوس بڼايي د کلني ډېرېدنې سره. (اټکل ارزښت)

Jahr	Bevölkerungszahl	اټکل ارزښت
کال	د نفوسو تعداد	Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000 کې 1.81 % وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$



د کټي گټه Zinseszins

یوه پیلېدایي x د n - واره وکونو همداسې اخستو د یوې **Rate** r $r < 0$ له کبله لاندې پیل پای بدایي $(1+p)$ $r > 0$ بzw همداسې. د یوې گڼې ضریب له کبله لاندې پیل پای بدایي ورکوي:

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r.$$

له دې سره $p = 1$ یوه 100% د گټې د یوې ربحي د کلنۍ اېښوونه په گوته کوي

موثره کلنۍ ربحه p_j د میاشتنۍ گټونې څخه شمېری کيږي د یوې p_m ربحي (گټې) سره

$$p_j = (1 + p_m)^{12} - 1 \geq 12p_m.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

بنسټیزه سرمایه په لومړني ربحپړیود کې په پام کې نیول کیږي، اېښوونه او همداسې اخستنه یا راوستنه په لومړي ځل د هر ورپسې کال. دا د لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n = 1: & \quad y = x(1+p) + r, \\ n = 2: & \quad y = (x(1+p) + r)(1+p) + r. \end{aligned}$$

په ټولیزه توګه صدق کوي:

$$y = (\cdots (x(1+p) + r)(1+p) + r) \cdots$$

$$= x(1+p)^n + (1 + (1+p) + (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1})r$$

دا په نوکانو کې د r افاده کیدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واپول شي او سړی دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

یو د 100000 یورو پور (قرضه) په کلني ګټونه او یوې ګټونې یا ربحې % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سړی د

$$y = 0, n = 10, p = 0.05, x = 100000$$

سره ګټه لاس ته راوړي:

$$r = 1.05^{10} \cdot 100000 \frac{0.05}{1.05^{10} - 1}$$

$$= 12950.46$$

د میاشتني د $\frac{5}{12}\%$ په ګټونې یا په ګټه اېښوونې سره دا راکوي

$$n = 120, p = \frac{1}{240}$$

په ورته توګه

$$r = \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{\left(\frac{241}{240}\right)^{120} - 1}$$

$$= 1060.66$$

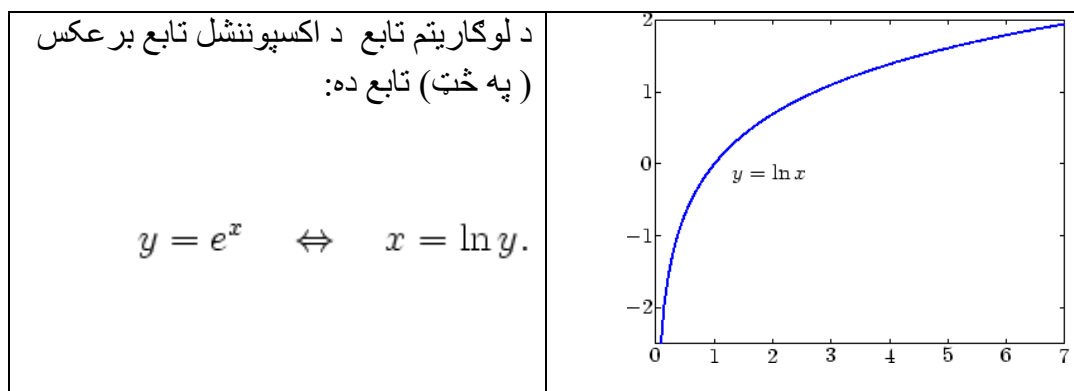
د میاشتنی گټې تادیه کونې ده، کلنی 12727.86 ده. دلته د مخه د گټې تادیه کونه یو

زیان منځ ته راولي. د $\frac{4}{12}$ % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

$$\left(\frac{(1 + \frac{1}{300})^{12} - 1}{\frac{1}{300}} - 12 \right) \cdot 1060.66 = 235.96.$$

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

لوگارېتم Logarithmus



دا $(0, \infty)$ په $\mathbb{R}$ کره مونوتون (یو غریز) کره جگېدونکی تنظیموي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

$$\ln(1/x) = -\ln x$$

په ځانگړې توگه لرو:

لیکونکی: هیولیک، کوپف

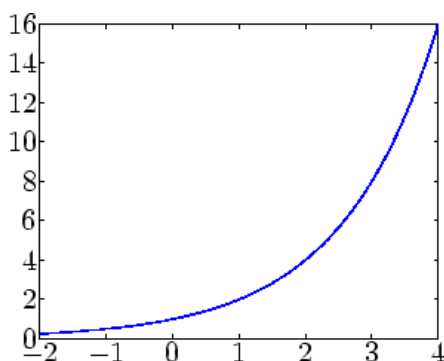
ټوليز په توان تابع او لوگاریتم

$a > 0$
د لپاره تعریفوو:

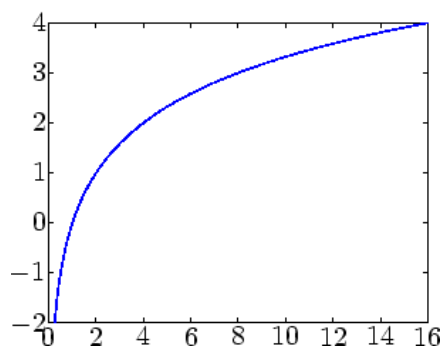
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع (بلواک) $x = \log_a y, \quad y > 0.$
سره

په ځانګې توګه د 10 په بنسټ لوگاریتم لپاره لیکو $\log = \log_{10}$ او $\text{ld} = \log_2$
د دوه ګوني یا دوال لوگاریتم لپاره.



$$f(x) = 2^x$$



$$f(x) = \text{ld}(x)$$

لیکونکی: هیولیک، کوپف

د توان او لوگاریتم لپاره شمېر قوانین

له تعریفونو او تابع مساواتو څخه د اکسپوننشل - او لوگاریتمي توابعو لپاره لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s / a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x. \end{aligned}$$

برسیره (سربیره) پر دې د مختلفو بنسټونو ترمنځ شمېر بدلون لپاره اړیکې باور لري:

$$\log_b x = \log_b a \log_a x.$$

په ځانګړې توګه

$$\log x = (\log e) \ln x.$$

لیکونکی: هیولیک، کوپف

لاندې بېلګې د شمېر قاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\ln(4x^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 =$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) +$$

$$(2x) = 2 \frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2 \frac{\ln x}{\ln 2} \quad \text{Id}$$

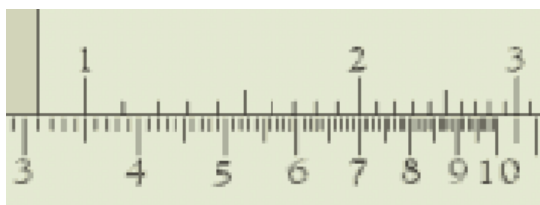
لیکونکی: هیولیک، کوپف

د لوگاریتم شمېرونی

په لوگاریتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبله کېدی شي دوه سکالا یا کچېرې یو په بل کېږدو او د نتسجې په توګه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.



د پورته څېرې څخه د بېلګې په توګه لاس ته راوړو، چې $3.5 \cdot 2 = 7$. دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) د په لاندې سکالا شمېرل کېږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب نتیجه په لاندې سکالا لوستل کېږي.

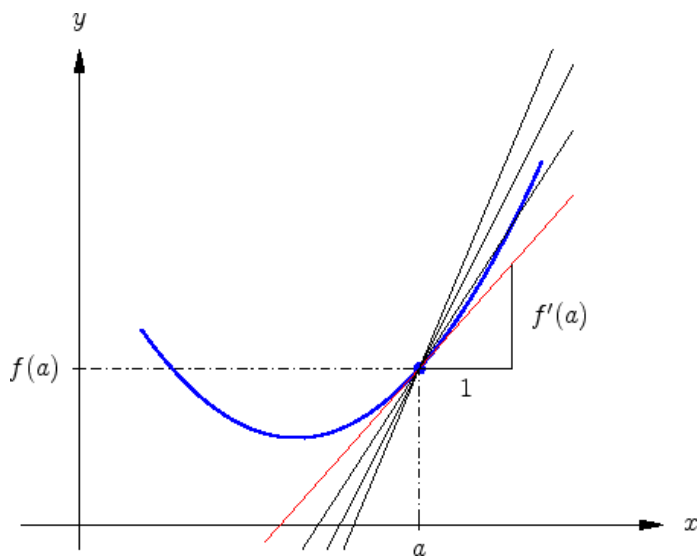
لیکونکي، هیولیک، کوپف، ویپر

مشتق یا رابېلېدنه Ableitung

یو تابع f په یوه ټکي a کې مشتقور دی، که دا د رابېلېدنې یا مشتق په څېر نیوله شوې پوله (لیمیت)

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري



هندسي مشتقوالی په دې معنا دی، چې د غ،خوون (قطاعو) جگپښه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت جگوالي په لور وختیږي یا کورگنت شي.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

د دې لپاره هم لیکو او جگ مشتقونه د $f'', f''', \dots$ او همداسې د $f^{(2)}, f^{(3)}, \dots$ سره ښایو. یو فنکشن f په یوه ډېری D مشتق بلل کېږي، که $f'(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره شتون ولري.

لیکونکی: هیولیک، کوپف

د تابع $f(x) = x^2$ مشتق

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

دويم مشتق $f''(x) = 2$ يو ثابت دی.

د يوه په خوښه مونوم $f(x) = x^n$, لپاره ، بينوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم ترم h^2 په گوته کوي.

ليکونکی: هيوليک، کوپف

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د جمعې قضیې په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د $t = x + h/2$ سره کمېنټرېش لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin((x+h/2)+h/2) - \sin((x+h/2)-h/2)}{h} = \\ &= \frac{2 \cos(x+h/2) \sin(h/2)}{h}. \end{aligned}$$

له

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(h/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

امله بنی اړخ د $h \rightarrow 0$ لپاره د $\cos x$ په لور هڅیږي.

غوره (مهم) مشتقونه

لاندې جدول د غوره توابعو مشتقونه راکوي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$r \neq 0, x^r$	rx^{r-1}
e^x	e^x		$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د مشتق کرښیزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کرښیز دی دا په دې معنا چې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره صدق کوي

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ضرب یا ځل قانون

د دوه مشتقوړ توابعو f او g مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

تولیز د ضرب لپاره صدق کوي: $f = f_1 \cdots f_n$

$$f' = \sum_{i=1}^n f'_i \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ضرب د قانون سره لاس ته رځي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

که $\sin x$ د ضریب په حیث ورزیات کړي، نو بیا د ضرب قانون استعمال لاس ته راځي

$$\frac{d}{dx} [\sin x(x^2 \ln x)] = \cos x(x^2 \ln x) + \sin x(x(2 \ln x + 1)) .$$

په بدیل ډول کېدی شي دا فرمول په ډېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته اړې راوړي

$$\frac{d}{dx} [\sin x(x^2 \ln x)] = \cos x(x^2 \ln x) + 2x(\sin x \ln x) + \frac{1}{x}(\sin x x^2) .$$

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} .$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - 2x}{4 + 3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1 - 2x)'(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(4 + 3x^2)'}{(4 + 3x^2)^2} = \frac{-2(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(6x)}{(4 + 3x^2)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره يې بديل لاس ته راځي

$$\left((1 - 2x) \frac{1}{4 + 3x^2} \right)' = (-2) \frac{1}{4 + 3x^2} + (1 - 2x) \frac{-6x}{(4 + 3x^2)^2} = \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2}.$$

ليکونکي: هيوليگ، کرايڅ

زنځيري قانون

د توابعو دزنځيرونې

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لپاره مشتق دی:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د $f(y) = z$, $g(x) = y$, $h(x) = z$ سره دا هم ليکل کيږي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

(ليکونکي: هيوليگ، کوپف

د زنځير قانون

$$h(x) = \sin \left(\underbrace{\ln(1 + x^2)}_{y=g(x)} \right)$$

د روبښانه ونې لپاره تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy} \sin(y) g'(x) = \cos(\ln(1+x^2)) g'(x).$$

د دننې مشتق شمېرنه $g'(x)$ سر له نوې د زنځیري قانو له مخې صورت نیسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x).$$

بدیلی کېدی شي مشتقیزه لیکندود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} = \cos(y) \frac{1}{w} 2x = \cos(\ln(1+x^2)) \frac{1}{1+x^2}(2x).$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

ایمپلیخیت مشتقوړ توابع

د بیلگې په توګه د

$$E: x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګۍ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3y^2) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx} 7 = 0$$

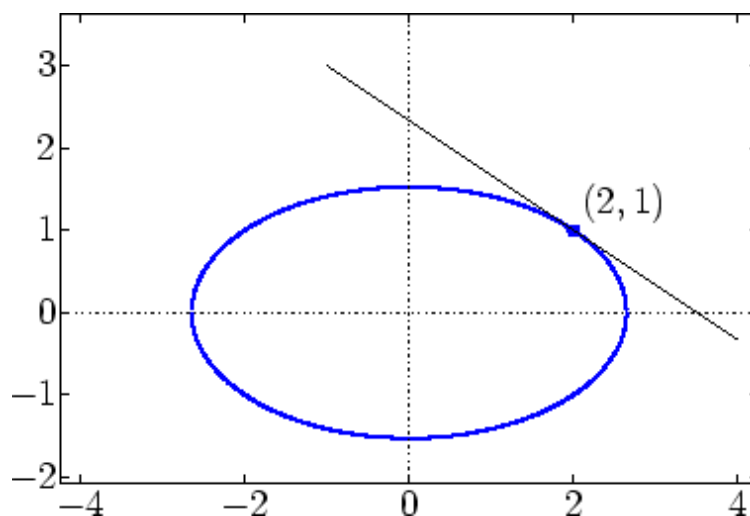
همداسې

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{x}{y}$$

سره د تانجنت جگوالی $y \neq 0$ باندې په یوه ټکي د E له سره کیدی شي په

لپاره لاس ته راځي $(2, 1)$ وټاکل شي. د بیلگې په توګه د

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$



په ورته توګه کیدی شي لور یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx} (2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}.$$

ټاکلي $y'(x)$ د یوه ټکي د کواورډینات ایښوولو او همدا اوس د E بیرته په ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیمرنکي: هیولیک، کنېف

لوګاریتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کېدی شي د بڼې $y = g(x)^{h(x)}$ مشتق نیونې ته د $g(x) > 0$ سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} (h(x) \ln g(x)).$$

لیکونکي: اپې، هیولیک

تابع

$$f(x) = x^x$$

د $x > 0$ سره مشتق دی.

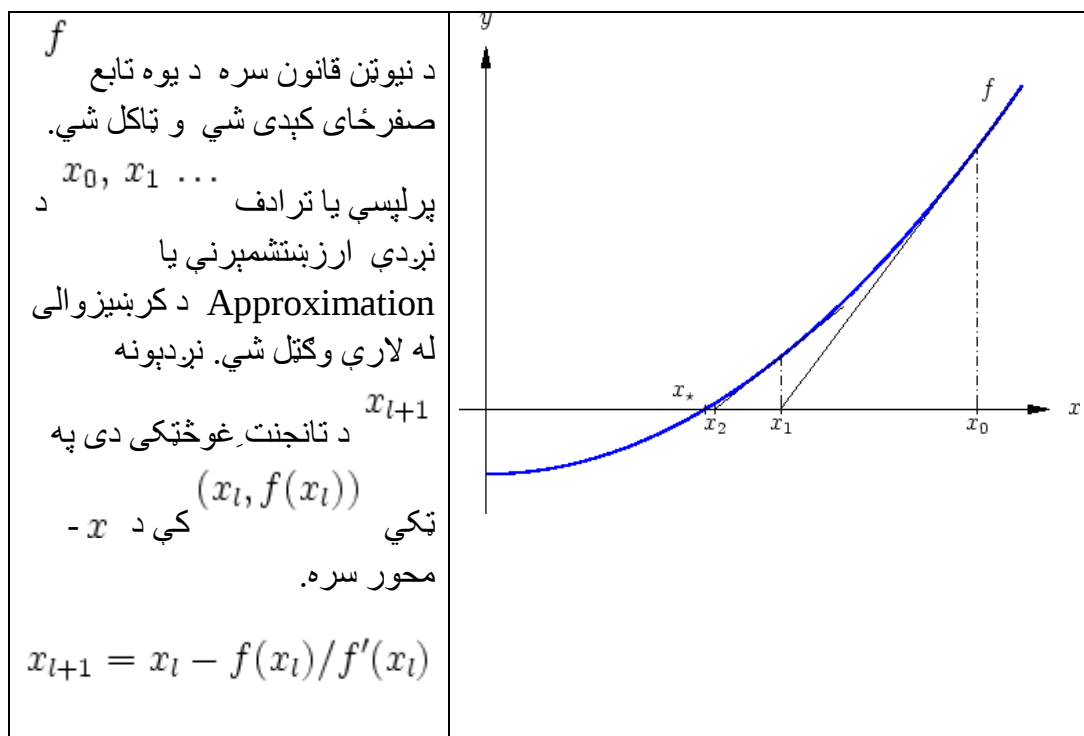
$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1).$$

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x}.$$

ليکونکي: اپې، هيوليک

نيوټن تلنلار يا قانون Newton-Verfahren



د يوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نيوټن-ايتراشن Newton-Iteration ځای - لوکالي مربعيز ټولې ته هڅيږي (کونورگنت)، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_*| \leq c |x_l - x_*|^2$$

د پيلټکي x_0 لپاره د x_* په يوه پوره کوچني چاپيريال کې.

پولي ته تلنه خورا گرندۍ ده. د هر پل سره د ټيک شوو ځايونو تعداد په نږدې توگه (د کرښې سره په نخښه شوی) دوه واره کيږي. مربعيز پولي ته تلنه کېدی شي په دې بېلگه کې د ساده بڼه بدلون سره وښوول شي:

$$x_{l+1} - \sqrt{a} = (x_l + a/x_l)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_l} (x_l - \sqrt{a})^2.$$

$$x_0 \neq 0$$

د نیوتون تڼلار هندسي روښانه ونې څخه لاس ته راځي، چې د ټولو لپاره تکرار پولي ته ځي.

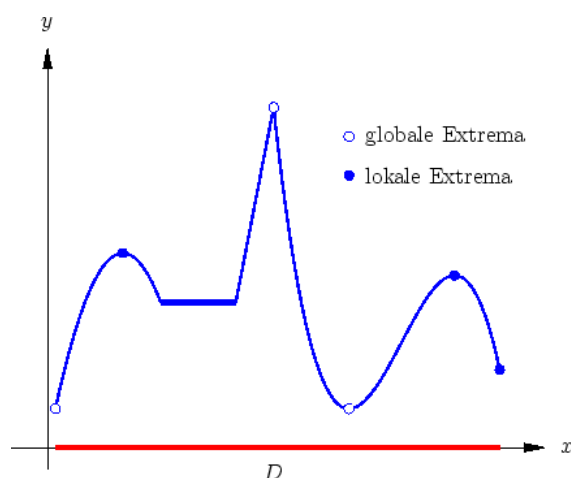
افراطیت Extrema

یو تابع f په a کې په ډېری D یو ځای اړوند مینیموم لري، که وي:

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$

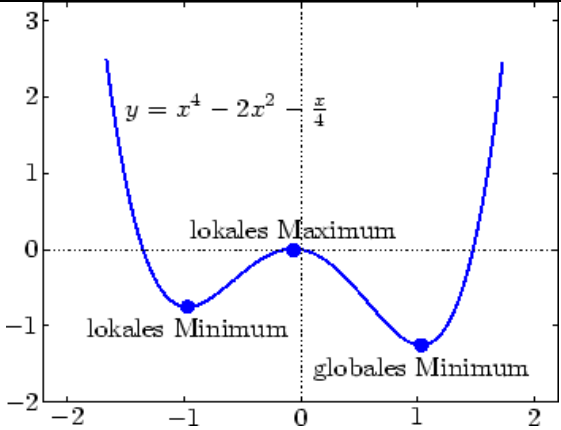
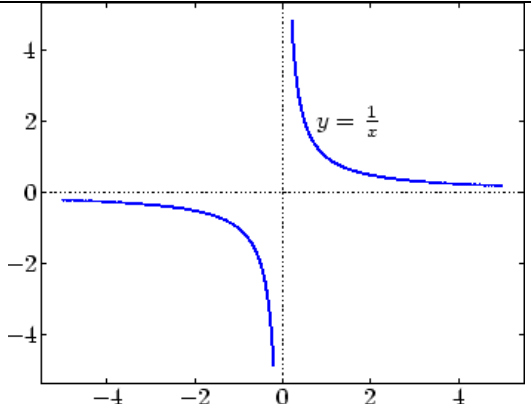
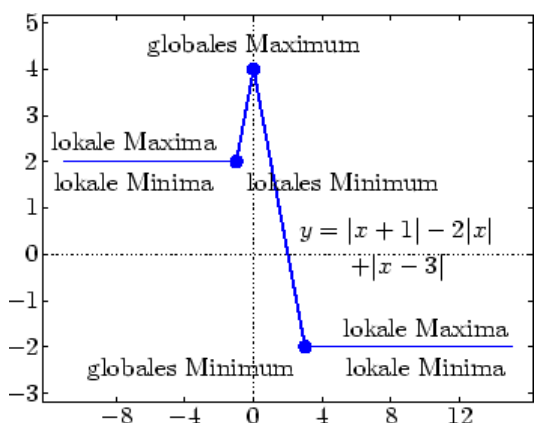
د ځای اړونده مینیموم سره د تابع ارزښت $f(a)$ په یوه خورا کوچني چاپېریال $(a - \delta, a + \delta) \cap D$ کې مینیموم دی.

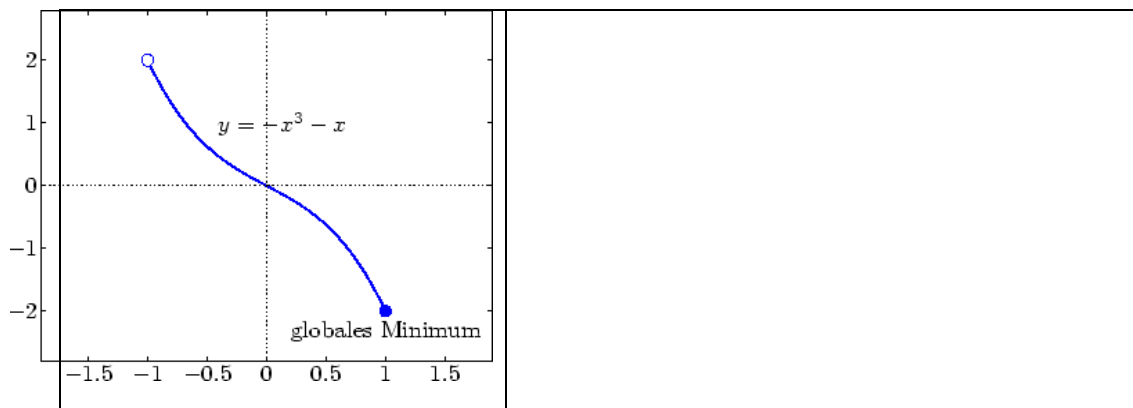
ګلوبال او لوکال (مطلق او ځای اړونده) خورا جګ ارزښتونه (ماکسیموم) په ورته توګه تعریف دي.



په یوه بند انټروال په ټوټه ډول نابریکېدونې او مشتقوړ تابع کېدې شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په په صفر ځایونو، پرېکېدځایونو یا ژی ټکو کې رامنځ ته شي. دا ډول ټیوپ کېدې شي د جګو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله کونې له لارې پیدا کړای شي. لیکونکي: هیورنر، هیولیک

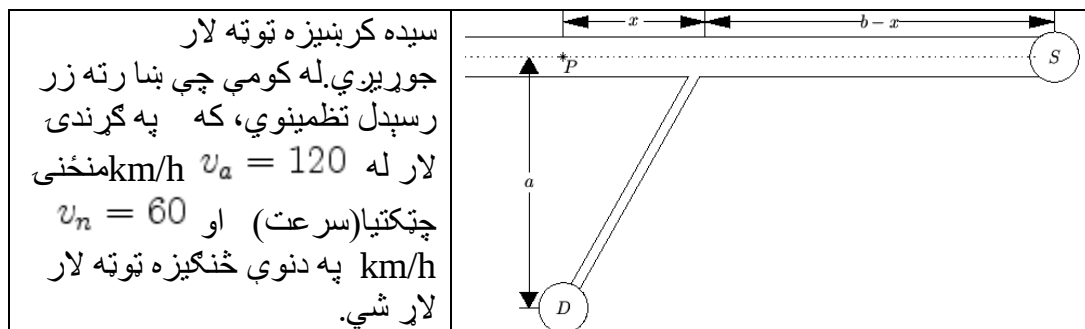
په لاندې کې به یو څو تیوپیګي حالتونه تر بحث لاندې راښيي یا و څېړل شي.

تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 - \frac{x}{4}$ $D = \mathbb{R}$ سره دوه مینیمال لري او یو ماکسیمال. مینیمومو د خورا کوچني تابع ارزښت سره مطلقه دی. یو مطلق ماکسیمال شتون نه لري، ځکه چې $x \rightarrow \pm\infty \quad f(x) \rightarrow \infty$ د لپاره	
تابع $f(x) = 1/x$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره کوم افراطي ارزښت نه لري. که یو تابع په واز انټروال کې ثابت وي، نو دا ځایونه (ځاییز) ځای اړونده (یا لوکال) ماکسیمال او هم (ځاییز) مینیمال دي، د یوه کره یو غریز تابع سره افراطي ارزښتونه د ژی ټکو سره نیول کیږي، که دا دد تعریفور شو پورې اړه ولري.	 



لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

له یوه کلي D څخه یوه ښار S ته یو سرک جوړیږي. کلي ته په واټن a همدا اوس ښار ته یوه شاه لار (گرندی لار) جوړه ده. د ښار څخه د P ټکي پورې، چې کلي ته نږدې گرندی لار پرته ده، اوږدوالی b لري.



واټن $x \geq 0$ د P او فرعي ټوټه سرک ترمنځ په گرندې د واټن شمېر نه د اړیین وخت د مینیمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b-x)/v_a$$

ښار ته د رسیدو لپاره .

د مشتق صفر ایښوونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي ځای په څېر. ایا چې دا مینیموم دی، باید دا د وهل شوي لار وخت د انټروال د پای ټکولپاره و ازمایل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}, \quad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}, \quad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. نامساوات $t(b) \geq t(x_m)$ ورته دي و دي لاندې ته:

$$t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2$$

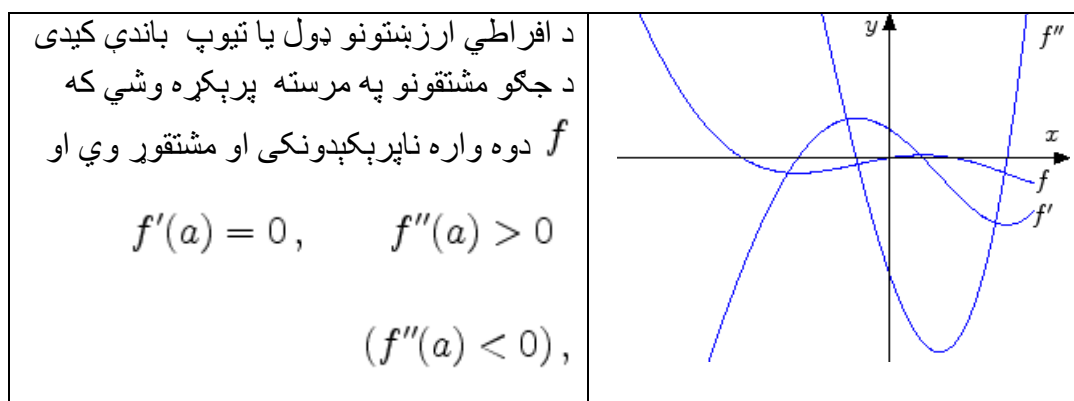
$$\Leftrightarrow a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0.$$

دا اخري نامساوات تل پوره کيږي، او له دې سره x_m اوپټیمال دی، که $b \geq a/\sqrt{3}$ وي.

په بل حالت کې x_m په انټروال $[0, b]$ کې نه دی پروت او په ژی ټکي b پروت مینیموم ته، یعنې ښار ته په سیده ټرنلار، رسېدی شي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیګ

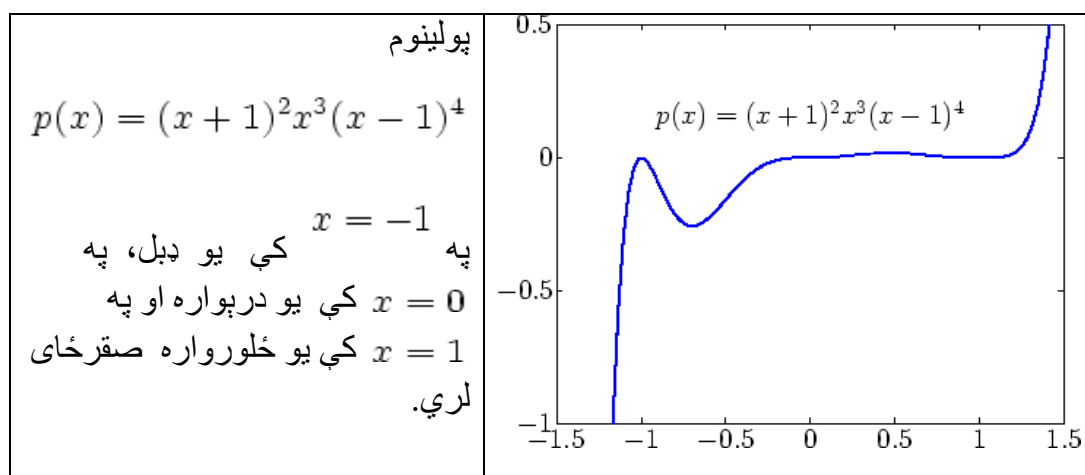
افراطي ارزښتونو ازمايننت Extremwerttest



نو f په a کې يو ځای اړونده مينيموم (ماکسيموم) لري. که دويم مشتق د a په ځای کې ورک شي، نو بايد جگ مشتقونه پرېکړې ته راکښل شي يا راوړل شي. که باور ولري:

$$f^{(n)}(a) \neq 0, \quad \text{او} \quad f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

نو f په a کې ټيک هلته يو افراطي ځای لري، که جوړه وي. په دې حالت کې f په a کې يو ځای اړونده خورا جگ - يا همداسې خورا ټيټ ټکی لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.



صدق کوي

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0.$$

په $x = -1$ کې p یو مینیموم لري. په $x = 1$ کې p یو ماکس لري، ځکه چې

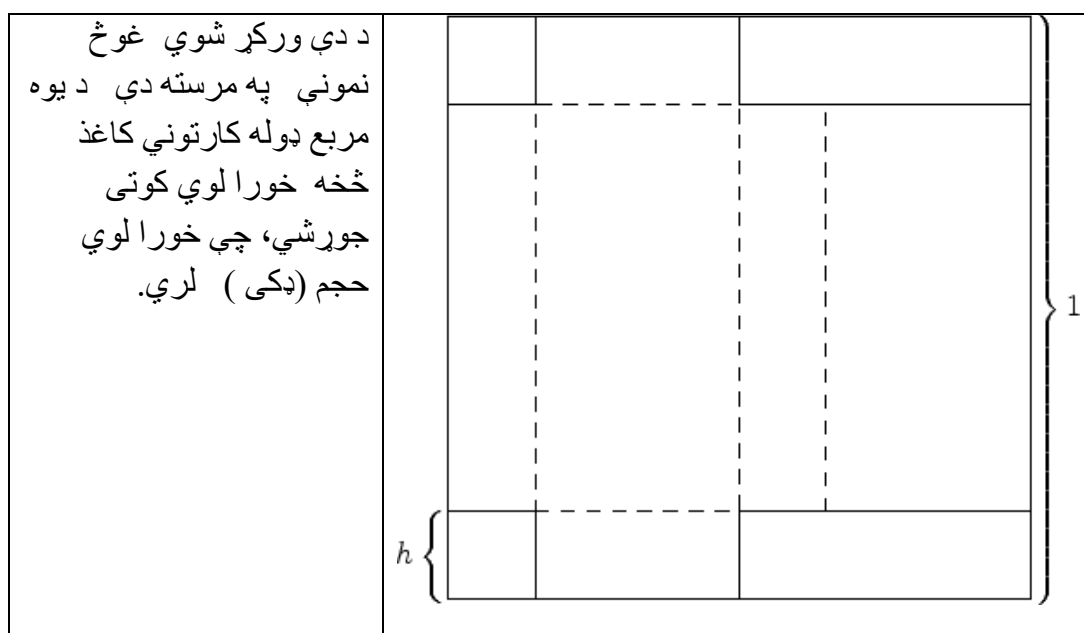
$$p(1) = \dots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0.$$

بلاخره p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او یو مخنځېنه بدلون په $x = 0$ کې په سرچینه کې افراطي ځای نه شته.

کوتی Schachtel



حجم يا ڊڪي دی:

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

جڳوال سور اوڀر دوالي

د مشتق صفر ڇايونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

تري

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

د ممکنه ڇای اڀرونده افراطي ڇايونه لاس ته راڃي. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$$

دی او

$$h = 1/2$$

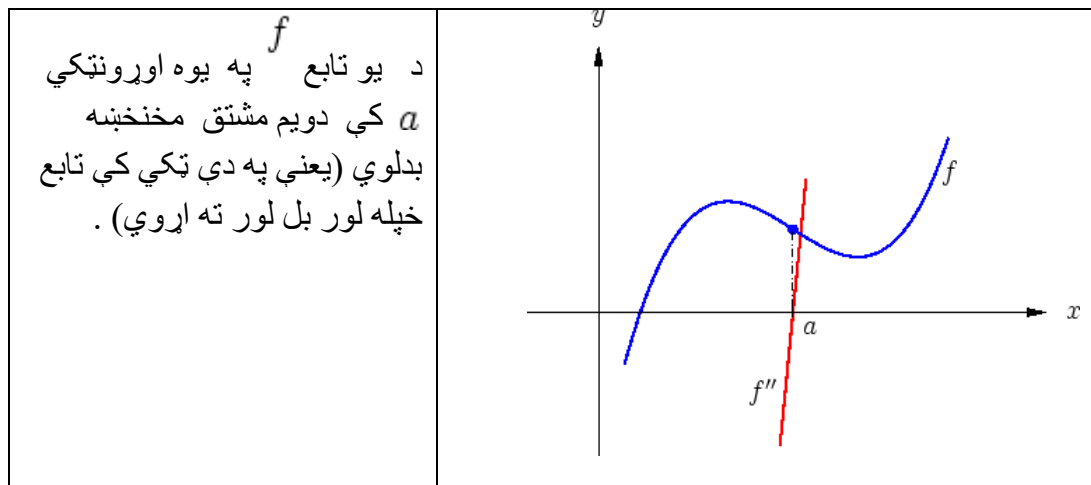
دا چي د ڌی ٽکو $h = 0$ او لپاره حجم يا ڊڪي دی، نو کوٽی د

$$h = 1/6$$

لپاره خورا لوي حجم لري.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

اوپرونٽکي (نقاط انعطاف Wendepunkte)



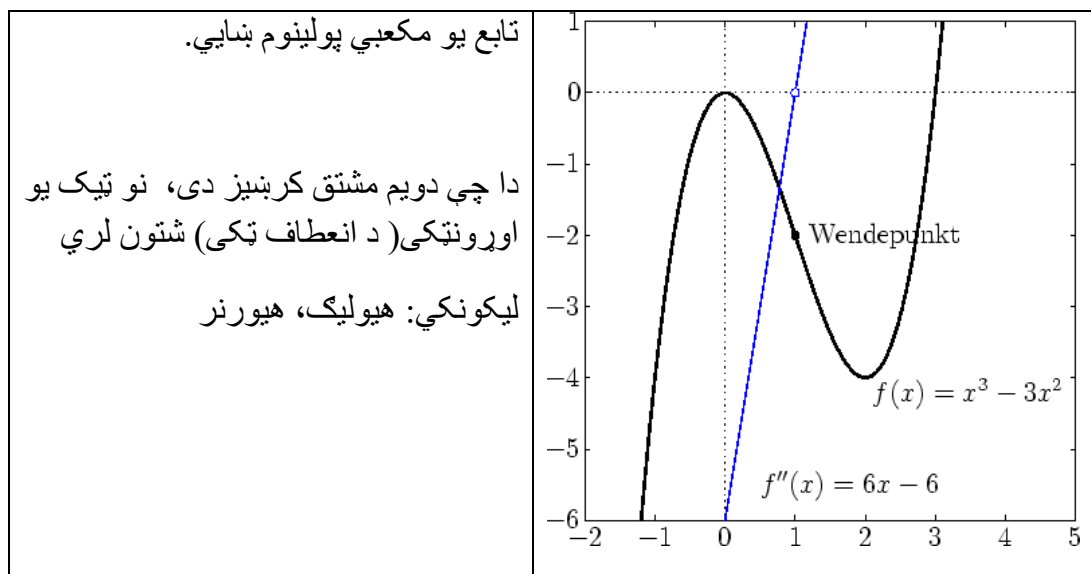
$$f''(a) = 0$$

او پوره دی، چې

د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې

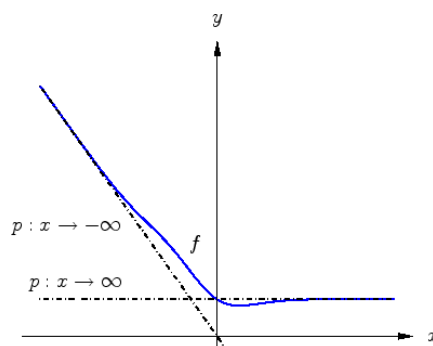
$$f'''(a) \neq 0$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر



ګاونډي یا لنډ: ګاونډ (مجاورتها Asymptoten)

يو تابع د يوه تابع f اسيمپټوت دی ، که $x \rightarrow \infty$ يا د $x \rightarrow -\infty$ لپاره. $f(x) - p(x) \rightarrow 0$ وي د



په ورسره بلد ډول p د f په څېر يوه ساده بڼه لري او د دې په چوپړکې ، چې $f(x)$ د څرنگوالي حالت د لوی x لپاره وڅېړي.

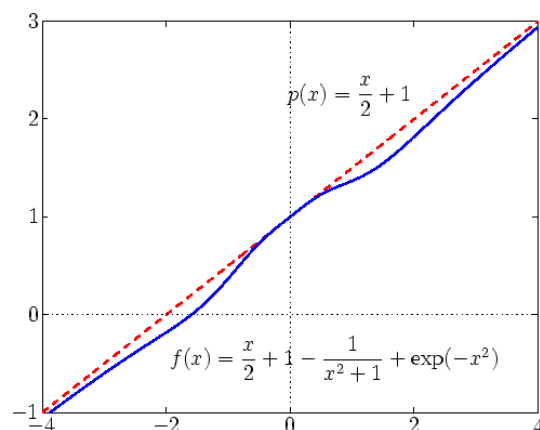
د ځانگړو معناو کرښيز اسيمپټوتونه $p(x) = ax + b$ دي. دوي د نورو ترڅنگ د منحنی يا کړو بحث کې يو رول لوبوي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د يوه څېره شوي يا متشکل شوي تابع $f(x)$ لپاره د $|x| \rightarrow \infty$ لپاره تناسب د کرښيزو ترمونو له خوا ټاکل کيږي، ځکه چې

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \exp(-x^2) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0.$$

له دې لاس ته راړني سره کرښه $p(x) = x/2 + 1$ اسيمپټوت ده.



ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د راشنلتابع گاونډ يا- اسيمپتوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

يو راشنل تابع

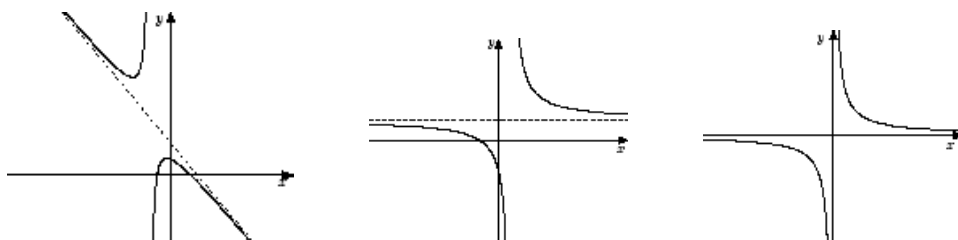
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

ټيک هلته يو کرښيز اسيمپتوت لري که $q + 1$ له گراد يادرجي $p \leq$ وي.

د $\text{Grad } p < \text{Grad } q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} r(x) = 0,$$

داپه دي معنا چي د x -محور اسيمپتوت دی.



د پولینوموېش له خوا: $\text{Grad } e^q \leq \text{Grad } p \leq \text{Grad } q + 1$ لپاره اسیمپتوت لاس ته راځي د

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د $\text{Grad } \tilde{p} < q$ سره. اسیمپتوت پرته (افقي) ده $(a = 0)$ ، که $\text{Grad } p = q$ وي.

که د صورت درجه له یوه څخه زیاته د محرج له درجې لویه وي، نو یوه اسیمپتوتیکي پولینوم لري د ≥ 2 درجې

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د راشنل توابعو

$$r_2 = \frac{2x^2}{x+1} \quad r_1 = \frac{4x+3}{2x+1}$$

او

لپاره دپولینوم وېش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

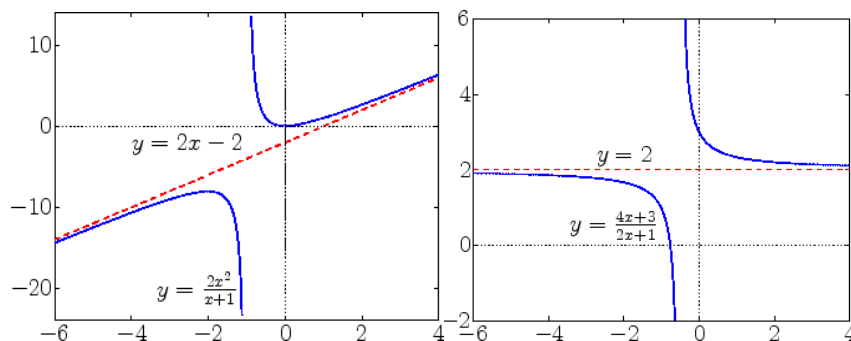
$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

او

اسیمپتوت یا ګاونډ

$$y_2 = 2x - 2 \text{ او } y_1 = 2$$

دا دوه بېلگې په لاندې څېرو کې روښانه شوې دي.



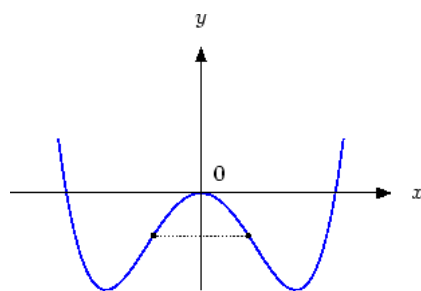
ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

سيومتري Symmetrie

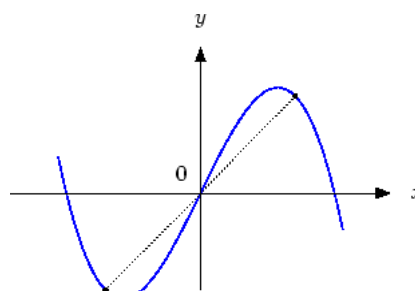
يو تابع f جوړه (جفت) دی، که $f(x) = f(-x)$ وي ، دا په دې معنا، چې که

گراف د y -محور ته سيومتري وي. د يوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره

دی، او گراف و سرچينې ته ټکی سيومتريک دی. $f(x) = -f(-x)$



gerade Funktion

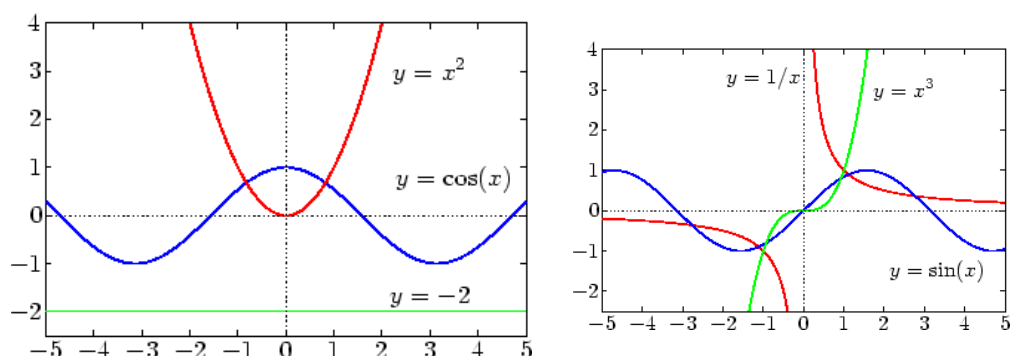


ungerade Funktion

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د یوه جوړه او یوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه یا طاق دی. د جمعې او تفریق جوړولو سره ډول ساتلی پتیري.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کنش

دا لاندې څېره ښي لور ته یوڅو جوړه او کین لور ته یو څو ناجوړه توابع ښایي.



د مناسبو کمپینېشنونو جوړولو سره نورې بېلګې لاس ته راځي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \quad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x)x^3$$

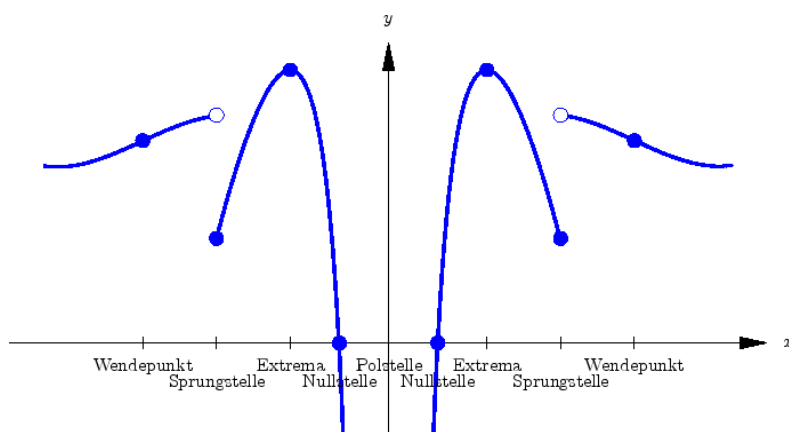
ناجوړه دي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کنش

د کږو یا منحنیو خبرې اترې (بحث)

د یوې تابع د څرنگوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

- Symmetrien سیومتري
- Periodizität تڙ بېرته راگرځېدنوالی
- Unstetigkeitsstellen پرېکېدنځایونه
- (Nullstellen → Vorzeichen مځنځېنه (صفرځایونه
- (Extrema → Monotoniebereiche همغریزوالي وشوگاني)
- افراښت
- (Wendepunkte → Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو)
- اوړونټکی د انعطافنقطه
- Polstellen قطبځایونه
- Asymptoten اسمپټوتي یا گاونډیتوبونه



د توابعو داسې یو تحلیل د گرو خبرې اترې یا د منځنیو بحث بلل کیږي

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د کړو بحث بنوول یا روښانه ولولپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin(3x)$$

څیړو .

سیمتري: دا چې $\sin x = -\sin(-x)$ ناچوره تابع دی..

تل بېرته راگرځېدنه يا پریودیځیتي: تابع پخپله لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودي ده او په راتلونکي کي فقط په انټروال $[-\pi, \pi]$ ترڅېړني راځي.

د پرېکېدنې ځایونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړه شوې او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري.

صفر ځایونه: د جمعې (زیاتون) قضیې سره $\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ دی:

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3} \sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع په 0 او $\pm\pi$ کي صفر ځایونه لري..

افراطیت: تابع

$$f'(x) = 2 \cos x - 4 \sin^2 x \cos x = -2 \cos x + 4 \cos^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د $\cos x = 0$ یا $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ورکړي ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چي تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او پریودیکي ده، ژینکي ترڅېړني نه راځي.

د دویم مشتق د مخنځېني یعنی

$$f''(x) = 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x$$

مخنځېني او تابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اورونٽڪي (نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x = -10 \sin x + 12 \sin^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

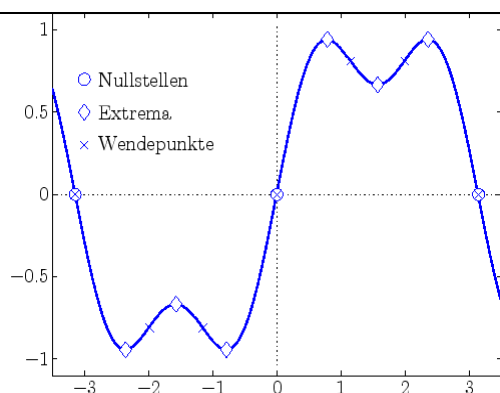
د $\sin x = 0$ يا $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$ لپاره پوره دی، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی. نو
تابع په $(0,0)$ او $(\pm\pi,0)$ کې
اورونټي لري، همداسې په
 $(-1.15, -0.81)$ ، $(-1.99, -0.81)$ ،
 $(1.15, 0.81)$ او $(1.99, 0.81)$ کې
نږدې ازبښتونه لري.

قطبونه : ناپربکیدونکي توابع قطبځایونه نه
لري.

اسیمپټوټونه: تابع پریودیکی او نا ثابت
دی، نو اسیمپټوټونه نه لري.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

بېلگه :

د يوه کړي بحث د ښوونې لپاره يو تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترڅېړنې لاندې نيول کيږي.

سيومتري: صورت ناجوره(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوره دی، دا په دې معنا چې سرچينې ته ټکي سيومتريک دی.

پريوديوالی يا تل بېرته راگرځېدنوالی: تابع پريوديکي نه دی.

د پرېکېدنې ځايونه: صفرځايونه ± 1 د صورت صفرځايونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ باندې ناپرېکېدونکی دی.

صفرځايونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکيږي.

افراطيت:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2 - 1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفحاځايونه لري، نو افراطيت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2, -4/5)$ ځای اړوند خورا جگ ټکی ، $(2, 4/5)$ ځای اړوند خورا ټيټ ټکی.

له دې سره کېدی شي، چې د f ډول يا ټيټ د کواليتاتيو حالت څخه. دا

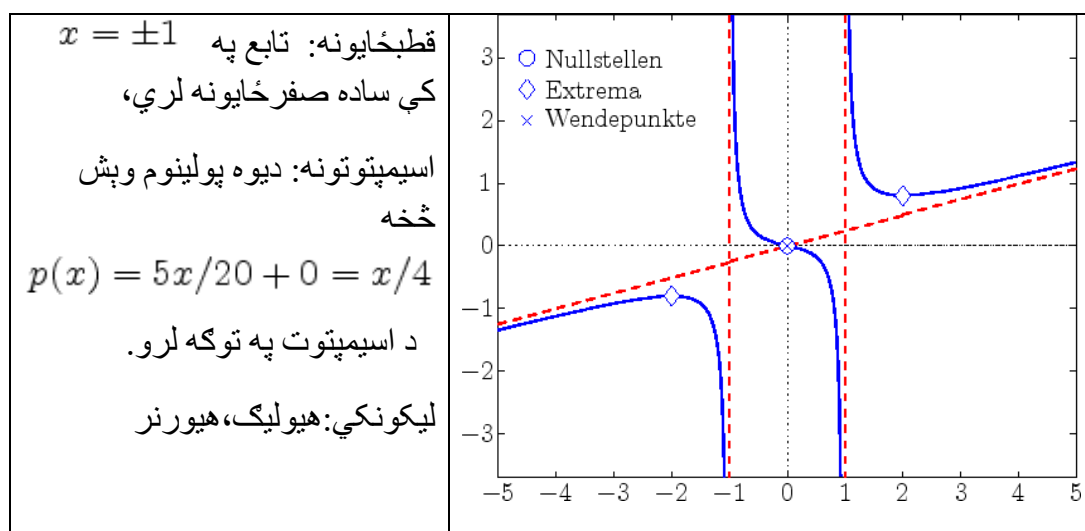
چې $f(x) \rightarrow -\infty$ د $x \rightarrow -\infty$ او $x \rightarrow -1$ لپاره ، بايد په انتروال

$(-\infty, -1)$ کې یو ځای اړونده مینیموم ولري. په ورته توګه په $(1, \infty)$ کې لږ تر لږه یو ځای اړونده خورا ټیټ ارزښت.

اوړونټکی (نقطه انعطاف):

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2 - 1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی.



بېلګه:

د کړې یا منحنی بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نیسو:

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

سیومتر:

دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیومتريک و y -محور ته.

پریودیوالی: تابع پریودیک نه ده.

پرېکېدنځايونه: تابع د ناپرېکېدننواوابعو څخه مرکبه (يوځای ايښول) شوي ده او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونه په صفرځای کې پرېکېدونکي دي.

صفرځايونه: اکسپوننشل تابع تل مثبت (زاتيزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځايونه نه شته.

افراطيت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0, x \neq 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

سربېره پردې دې کرېتیکل ټکی $x = 0$ په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی.

تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف دی، د x د $\pm\infty$ په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې $f(x) \rightarrow \infty$ د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره f لږ ترلږه يو مطلق مينيموم لري، مگر

هیڅ مطلق ماسيموم. پرتله د y - ارزښت کرېتیکل ټکي

$$(-2, 9/e^4) \quad (0, 1) \quad (2, 9/e^4)$$

بنایي، چې په $x = \pm 2$ کې مطلق مينيموم نیولکيري. داچې f په انټروال

$$[-2, 2] \quad (0, 1)$$

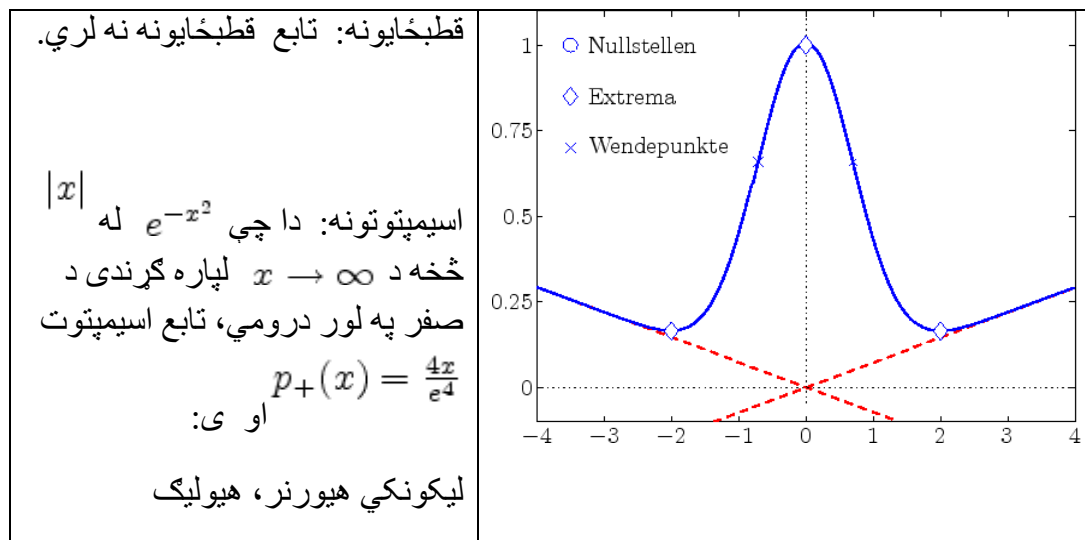
يو مينيموم او هم يو ماکسيموم لري، لاس ته راځي چې يو ځای اړونده مينيموم دی.

اورونټکي:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$$

دیم مشتق په دې ځای کې $\neq 0$ دی.



د ریمن انتیګرال Riemann-Integral

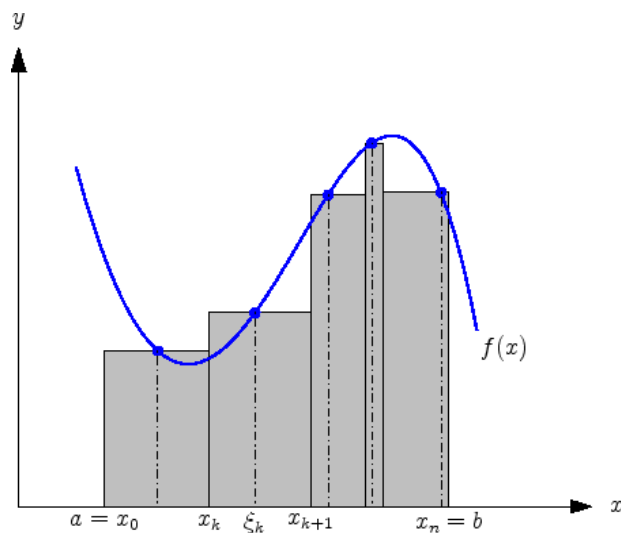
دیوه ټوټه ډوله (په ټوټه ټوټه کې) ناپربېدونکې تابع f ټاکلی انتیګرال د

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

له خوا یا سره تعریف دی. دلته $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ د $[a, b]$ ټوټه ونه ښایي،

د انټروال ماګسیمال اوږدوالی دی او $|\Delta| = \max_k \Delta x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

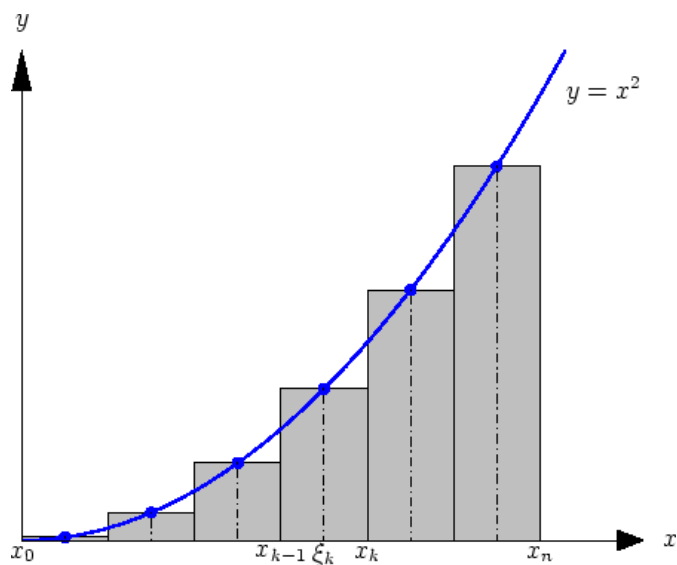
ξ_k په خوښه ټکی دی په k -م انټروال کې. د انتیګرال تعریف په ښي لور جمعې د ریمن - جمعو په نامه یادېږي.



د مثبت f لپاره $\int_a^b f(x) dx$ د سطحی مساحت دی د f د گراف لاندې.

لیکونکي: هیولیک، هیورنرو ویپر

د $\int_0^1 x^2 dx$ د ریمن انتیگرال په حیث راوړني سره کېدی شي د ټوټه ونو پرلپسې (ترادف)



$$\Delta_n : x_i = i/n, i = 0, \dots, n,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځایونو

$$\xi_i = (2i - 1)/(2n), i = 1, \dots, n,$$

سره د n -مې ټوټه ونې لپاره.

د تعریف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دې سره

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

بنسټيزه تابع Stammfunktion

يو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټيز تابع ده، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

د ټول بنسټیزو توابعو ډېری یا ست د f ، چې د f ناکلی انټیګرال بلل کیږي. د انټیګرېشن ثابت په خوښه ده. د بېلګې په توګه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره یو ممکنه بنسټ تابع دی.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټیزو توابعو داسې اکسپلیسیت ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بیلګه ده: $f(x) = \exp(x^2)$.

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2, \quad F_2(x) = x^3, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2.$$

یو بنسټیز تابع دی.

د $f(x) = \frac{1}{x}$ لپاره د $c > 0$ سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

یو بنسټیز تابع دی.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د انټیګرال شمېرنې اصلي جمله

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیزه تابعوي، داپه دې معن، چې $f = F'$ ،
نو باور لري

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

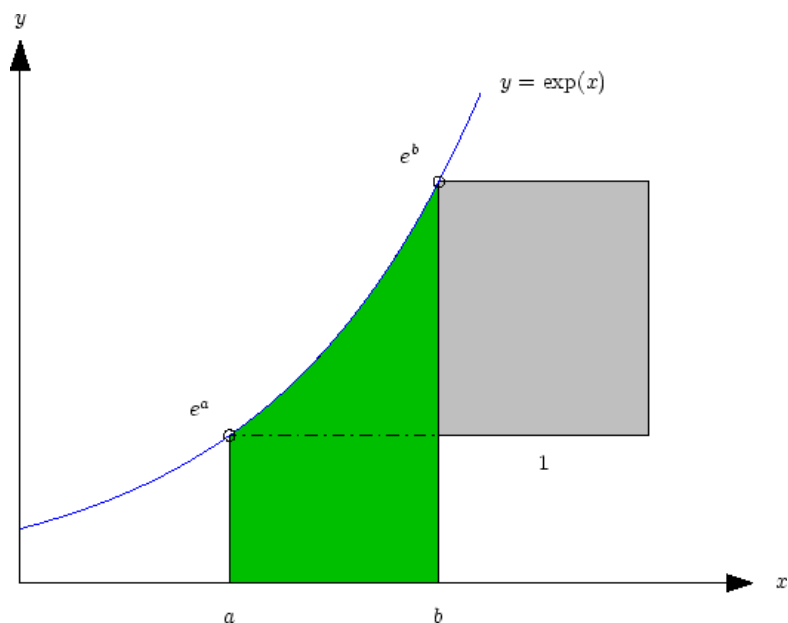
همداسې په لنډ لیکډول

$$\int_a^b f = [F]_a^b .$$

یو ټاکلی انتیګرال کېدی شي د بنسټیزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع
ارزښتونو د کمښت په څېر وشمېرل شي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د اکسپوننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله لرو:



$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

د a او b ترمنځ د گراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو د جگوالي واین څخه جوړ ولاړگودیز (مستطیل).

د لوگاریتمي تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x dx = \ln(b) - \ln(a), \quad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیگی

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ یو بنسټیز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . په تعقیب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

د کمښت سره verifiziert ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x) = \tan x$ بنسټیز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پایله ده:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -[\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347.$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیگ

یو پلانېټ د M کتلې سره یو د گراویتیټشن (راکبښې ورشو) ورشو تولیدوي، چې په

یوه تن یا بدن د m کتلې سره یوه قوه $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ استعمالوي. دلته γ د گراویتیټشن ثابت ده او x د دروند ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی.

د $\frac{1}{x^2}$ لپاره بنسټیز تابع $-\frac{1}{x}$ دی. د دې لپاره چې یو بدن د a څخه و b ته په واټن یوسي، باید کار

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) \, dx &= \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -[\gamma m M / x]_a^b \\ &= \gamma m M (1/a - 1/b) \end{aligned}$$

سرته ورسیري .

د a لپاره مساوي د پلانټ وړانګه او $b \rightarrow \infty$ کېدی شي د کینېټیکي انرژي سره د مساوي ایښوني له امله داسې په نامه د تېښتې چټکتیا یا سرعت v و ټاکل شي، داپه دې معنا چې چټکتیا، چې اړینه ده، د یوه پلانېټ گراویتیټشن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2} v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \Rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2 \text{ km/s}$ لرو.

لیکونکي: هیورنر، هیولیگ

غوره – يا راوتلي بنسټيز توابع

لاندې جدول د زيات رامنځ ته کېدونکو توابعو $f(x)$ د بنسټيزو توابعو $F(x)$ جدول ښايي.

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s, s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln x $
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ليکونکي: هيورنر، هيوليگ

توټه انټيگرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو $(fg)' = f'g + fg'$ له مخې د ناټاکيو انټيگرالولوپاره يو ورته فرمول لرو:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx .$$

په اړونده توګه د ټاکلو انټیګرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

$$[fg]_a^b$$

له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژی ترمونه ورکیري، که یو له دې دواړو تابعو په انټروال ټکو کې صفر وي. دا د پریودیګي تابعو لپاره هم ورکیري، د پریوډي اوردوالي $(b-a)$ سره.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

له

$$\int (1+x)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} (1+x)^{\alpha+1} + c$$

د $\alpha \neq -1$ لپاره

لرو

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1+x} dx &= x \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} - \int 1 \cdot \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} dx \\ &= \frac{2}{3} x (1+x)^{3/2} - \frac{4}{15} (1+x)^{5/2} + c. \end{aligned}$$

په ورته توگه شمېرل کيږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x} \underset{v'}{\sqrt{1-x}} dx = \left[-x \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} \right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} dx$$

$$= 0 - \left[\frac{4}{15} (1-x)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د اووېستونو (واريابلو) بدلون Variablensubstitution

د زنځيري قانون څخه

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x)) g'(x), \quad f = F',$$

د يوه بدلون $y = g(x)$ لپاره د بنسټوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(y) + c = \int f(y) dy.$$

په ورته توگه د ټاکلو انټيگرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

د دفرنشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه وليکل شي:

$$\int_a^b f(g(x)) \frac{dy}{dx} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

ليکونکي: هيوليگ، کوف

که په انټيگراند کې دنننی مشتق پېژندوړ وي، لکه د بېلگې په تگه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلگه کې ږدو

$$y = g(x) = \ln x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2 g'(x) dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3} y^3 + c.$$

د په څې بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x} dx = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c.$$

ليکونکي: هيوليگ، کوف

په ټيپيک ډول د بدلون له لارې سړی هڅوي چې انټيگرال ساده کړي. د بېلگې په توگه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y} - 1} dy$$

لپاره په نږدې توگه ږدو

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوی ناټاکلی انټیګرال راکوي.

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3}{x^2 - 1} \frac{dy}{dx} dx = \\ & = \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) dx \\ & = \int 1 dx + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + c. \end{aligned}$$

د $x = e^y$ په ځټ يا برعکس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2} \left| \frac{e^y - 1}{e^y + 1} \right| + c.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د مرکاتور پرېوسټون Mercator-Projektion

بنسټابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, \quad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx,$$

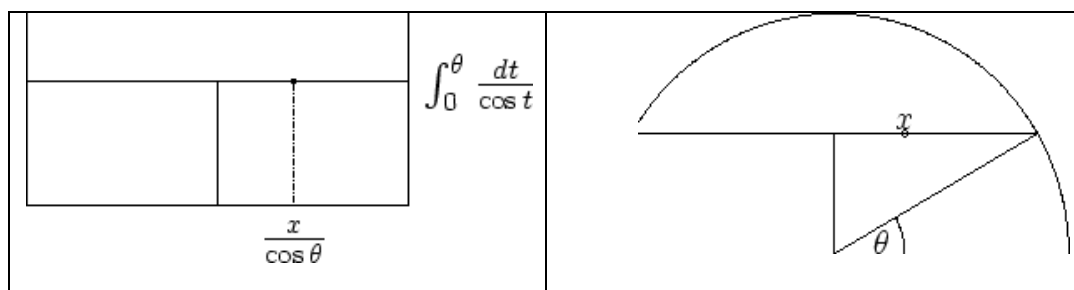
سره وشمېرل شي.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^{-1} du$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c.$$

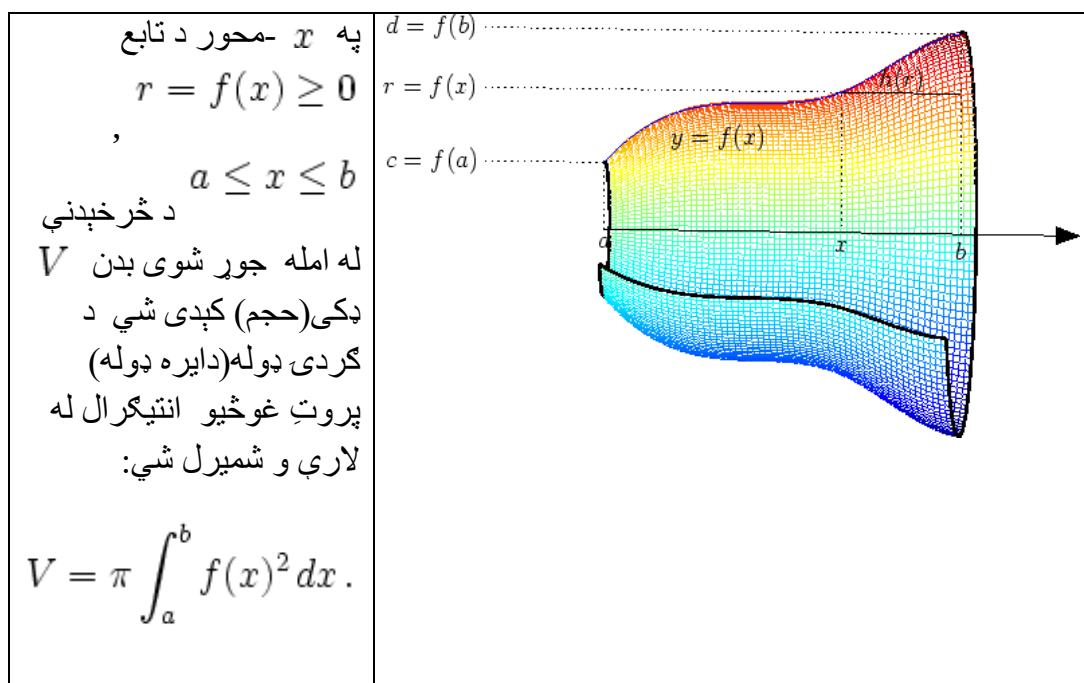
يو استعمال د مررکاتور پرېوستون دی. دلته د ځکې پوښ سطحه کړنجساتونکي يا کړنجيننتوني په يوه سطحه پريوځي يا پری ايستلی شي.



دلته سور درجه يا عرض البلد په اړيکو غزول شوی. $1/\cos \theta$

ليکونکي: هيوليگ، کوپف

د څرخېدونکو بدنونو ډکۍ (حجم) Volumen von Rotationskörpern



په بدیلې ډول کېدی شي توتې (استوانې) پوښ له لارې هم وشمېرل شي

$$V = \pi c^2(b - a) + 2\pi \int_c^d r h(r) dr,$$

د کوم سره چې c همداسې d مینیمال همداسې ماکسیمال وړانګې r دي او

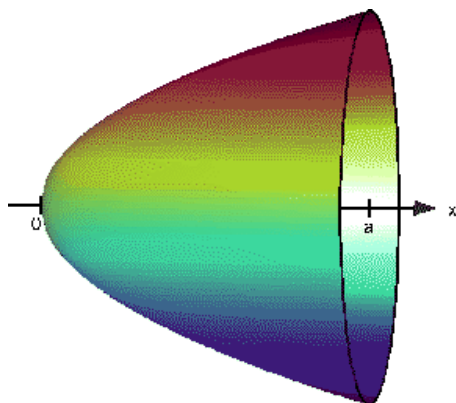
په بدن کې خوندي توتې پوښ ټول جگوالی دي د وړانګې r سره. دا بدیل د ټولو له

مخه د همغږیز وړانګې تابع f لپاره موخه ور دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

دا جوړ یا څېره شوی پارابولید $y = \sqrt{x}$ د x -محور باندې د کږې څرخون سره

منځ ته اخی



د څرخون بدن د فرمول سره سم ډکۍ (حجم) دی:

$$\pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \pi a^2 .$$

په بدیلې توگه د توتې پوښ باندې انټیگرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a - r^2)^2 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \pi a^2 .$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen
Diss . Uni. Wien Algebrn .

*Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
Dissertation at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې
شميرنه ، د احتمالي شميرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شمير: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،د افغانستان روغې او بيا

ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک
- ۲ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک
- ۳ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک
- ۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - اناليزی ۱
 - ۷ - اناليزي ۲
 - ۸ - کرښيز الجبر
 - ۹ - د شمير پوهنې بنسټونه
 - ۱۰ - د فرمولونو ټولگه
 - ۱۱ - فنکشنل اناليز
 - ۱۲ - وکتور شميرنه
- نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Gutenberg گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ - د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ - د شمير پوهنې گډې وډې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرا ل شميرنو ته

تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې

۲۳ - د شميرپوهنې انگريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شميرپوهنې پښتو انگريزي ډکشنري

۲۵ - د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تیوري

- د بسوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميري شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمريز کي د شينوارو هسکه مينه کي دې نړۍ ته سترگي راغړولي.

د هسکي ميني د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته

د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولگي پيل او د دويم ټولگي څخه گام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کي مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کي د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير (صفر نه وو).

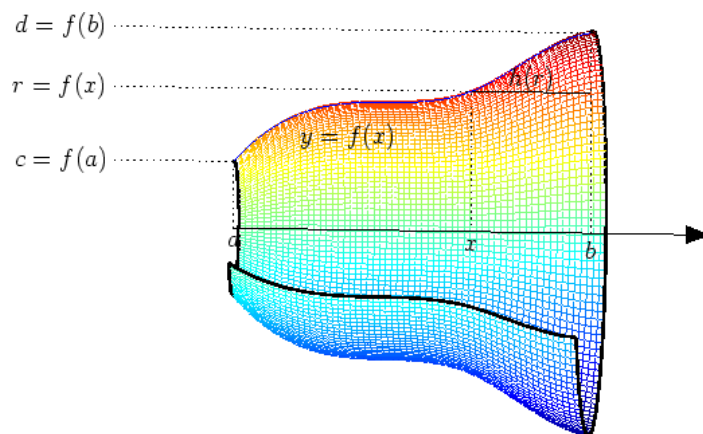
له هغې وروسته په جرمني کي سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د رياضي څانگه کي د پوهنې وزارت درسي نساب کي دنده.

ماخان ميري په ۱۹۷۲ کي له لري د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د ميرمن ښاپيرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کي کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ويانا کي د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانگه او اباسين نوميري. څانگه په المان کي د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې. ماکان شينواري بي کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستې، چې خپل فکر تر شونې پولي پورې تازه وساتي.

د شمیر پوهنې بنسټونه



لیکونکي: پروفیسور هیولیک او ډله یې

له مات. ن ج څخه

ژباړي : ډاکټر ماخان ميري شينواری

۱	وينا
۲	منطقي(سم انديزي) ترني
۱۱	کوانتورونه
۱۳	سيده بنوونه
۱۴	ناسيده بنوونه
۱۴	ايمپليکېشن تري لاس ته راتلنه يا — راوړنه
۱۶	د پوره اندکشن له لاري بنوونه
۱۶	د مربع (څلوري) عددونو د جمعي لپاره فرمول
۱۷	دېري(سټ)
۱۹	د گڼونو (اعدادو) دېري
۱۹	په دېريو کې عمليي
۲۳	کارتېزي ضرب (حل)
۲۴	اړيکي
۲۵	د اړيکو د داتا بانک
۲۵	د اړيکو خويونه
۲۸	فنکشن
۳۰	د تابع يا څيرونې يا بلواک(تابع) خويونه
۳۲	د فنکشنونو
۳۲	په څټ يا برعکس فنکشن
۳۳	فاکولتي يا فکتوريل
۳۳	د بينوم ضربيونه
۳۴	د پاسکال درېگودي
۳۵	د بينوم درسي جمله

۳۸	د بینوم ضریبونو لپاره کټمټوالی
۴۰	د دېریو یا ستونو کمبیناتوریک
۴۹	کرښیز فنکشنونه
۵۰	مرعیز فنکشنونه
۵۱	مایل گوزار یا — غورځونه
۵۳	پولینوم
۵۴	راشنل فنکشن یا بلواک (تابع)
۵۵	ساین او کوساین
۵۸	تانجنت او کوتانجنت
۶۰	اکسپوننشل توابع (بلواک)
۶۳	د گټې ګټه
۶۵	لوګاریتم
۶۶	تولیز په توان تابع او لوګاریتم
۶۸	د لوګاریتم شمېرونی
۶۸	مشتق یا رابېلېدنه
۷۱	غوره (مهم) مشقونه
۷۲	د مشتق کرښیزوالی
۷۵	ایمپلیځیت مشتق توابع
۷۷	لوګاریتمي مشتق
۷۸	نیوټن تلنلار یا قانون
۷۹	د بابلیانو رېښه (جذر) نیونه
۸۰	افراطیت
۸۲	د مشتق صفر ایښوونه
۸۴	افراطي ارزښتونو ازمايښت
۸۵	کوټی
۸۸	ګاونډي
۸۹	د راشنلتابع ګاونډ یا- اسیمپټوټونه
۹۱	سیومتري
۹۲	د کبرو یا منحیو خبرې اترې (بحث)
۹۹	د ریمن انتیګرال
۱۰۱	بنسټیزه تابع
۱۰۳	د انتیګرال شمیرني اصلي جمله
۱۰۶	غوره — یا راوتلي بنسټیز توابع
۱۰۸	د اووښتونو (واریابلو) بدلون
۱۱۰	د مرکاتور پرېوستون

- د څرخيدونکو بدنونو ډکۍ (حجم) ۱۱۲
- پوښتنه: ۱۱۵
- د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې: ۱۱۹
- د ډاکټر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ۱۲۱ ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library