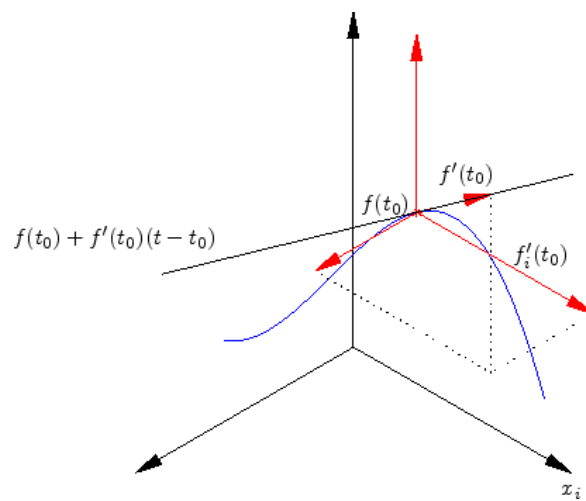


انالیز ۱

Analysis 1

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه
د ډېرو متحولو یا اووېستونو انالیز
یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتگارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د ماتې انالیز څخه یا د شتوتگارت پوهنتون د ریاضي څانګه
Ketabton.com
Smakhan1946gmail.com

ژباړی: ډاکټر ماخان (میري) شینواری

د لوی څښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت
- په ما د پوهنې په لار د لگښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو يا اووښتونو اناليزې

ليکونکي: د شتوتگارت پوهنتو د رياضي څانگه

د مات انلاين څخه يا د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډاکټر ماخان ميرې شينواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

د ژباړې مننه

د دې ليکنې مل نوري خپروني د شتوتگارت د پوهنتون د شميرپوهنې د څانگې د
لکچرونو لړۍ چاپ باندې پيل کيږي

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د
ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي گټه نه شته او دا
کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندي، مگر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته
وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې
هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

۱	بلواک یا تابع یا فنکشن
۳	کربنیزې توابع
۴	څلورۍ- یا مربع فنکشنونه یا - توابع
۶	همغریز توابع
۹	برعکس - یا په خټ فنکشن
۱۱	د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه
۱۲	ننوتې او وتلې - یا مقرر او محدبې توابع
۱۵	پولینوم
۲۱	د پولینومونو سره انټرپولیشن
۲۳	د لاگرانج-پولینوم
۲۵	راشنل (کسری یا نسبتي) توابع
۲۷	کمپلکس راشنل- یا کسري توابع
۲۸	په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه
۳۳	د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه
۳۹	د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه
۴۰	د اوپلر-موپوری فرمول
۴۱	تانجنټ او کوتاجنټ
۴۲	د ارکوس توابع
۴۳	هارمونیک لړځیدنې یا ریډنې
۴۹	اکسپوننشل توابع
۵۰	گټه یا ربح
۵۶	ټولیز توان توابع او لوکارېتم
۵۷	د ودې قانون
۵۸	د توان او لوکارېتم لپاره شمیرقوانین

۵۹	های پرابول تابع
۶۲	د یوې پرلپسې پوله ارزښت
۶۶	د کوشي قضیه
۶۸	همغریز ه پولې ته تلنه
۷۰	د پرلپسې پولې ته تلنه
۷۱	ناربښتونۍ پوله ارزښت
۷۲	پوله اینفریور او پوله سوپریور
۷۳	پرتله کوونکې قضیه
۷۵	د یوې پرلپسې پندغالي ټکۍ
۷۶	ور هوولست- مودل
۷۶	ریکورژن
۷۸	د پی Pi رکورزیو اپروکسیمیشن
۸۲	د پرلپسیو یا ترادفونو ځانگړي ...
۸۴	د یوې لړۍ پرلپسې
۸۶	هندسي یا ځمکچیزې لړۍ
۸۸	هارموني لړۍ
۸۹	مطلق پولې ته تلونکې لړۍ
۹۰	مایورانټ او مینورانټ
۹۱	د وېش قضیه
۹۳	د ریښې قضیه

۹۴	د لایبنيڅ قضیه
۹۸	د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه
۹۹	ناپرېکینه یا متمادیت
۱۰۲	یو اړخیز ناپرېکینوالی یا متمادیت
۱۰۴	د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره ...
۱۰۷	منځ ارزښت جمله
۱۰۹	د دوه سطحو – یا برخو تلنلار
۱۱۰	د ناپرېکیدونکي تابع افرطیت
۱۱۱	برابردوله ناپرېکینوالی
۱۱۲	په ټکي ډول پولې ته تلنه برابر ارزښته ...
۱۱۴	د توابعو لړۍ پولې ته تلنه
۱۱۶	توابعو لړۍ ته مایورانټ یا پورته پولې
۱۱۷	د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه
۱۱۹	د اکسپوننشل تابع لړۍ انځورونه
	مشتق(راپیلیدنه)
۱۲۴	د بنسټوابعو مشتق یا راپیلیدنه
۱۲۷	د مشتق یار راپیلیدني کرښزوالی
۱۲۷	د ضرب قانون
۱۲۹	د وېش قانون یا لار
۱۳۰	ځنځیری لار یا – قانون
۱۳۲	ایمپلیځیت مشتق نیول
۱۳۶	د لایبنيڅ قاعده یا لار

سرلیک

- ۱۴۱ لوگارېټمي مشتق يا - رابيليدنه
- ۱۴۳ د رولي جمله
- ۱۴۴ منځ ارزښت قضيه
- ۱۴۵ ټوليزه (شوي) منځ ارزښت جمله
- ۱۴۷ لاندو-سيمبول
- ۱۴۸ د لو، پيتال قاعده يا لار
- ۱۵۰ كرنيز اېروكسميشن (ورنږدېوالی)
- ۱۵۱ د ناټيكاوي وده
- ۱۵۳ د نيوتن تلنلار يا - قانون
- ۱۵۷ د تيلور پولينوم
- ۱۶۱ حقيقي د تيلور لړۍ
- ۱۶۳ اكسپوننشل تابع
- ۱۶۵ د اويلر فرمول
- ۱۶۶ د لوگارېټم تابع
- ۱۶۷ بينوميال لړۍ
- ۱۶۸ د تيلور لړۍ مشتق او انټيگراډ
- ۱۷۰ د تيلور لړۍ ضرب
- ۱۷۲ د تيلور لړۍ وېش
- ۱۷۴ د راشنل توابعو تيلور-وديزېنه
- ۱۷۵ د يوې تيلور - لړۍ
- ۱۷۷ د معكوس تابع د تيلور وديزېينه
- ۱۷۸ د تيلور ځانگړې لړۍ
- ۱۷۹ د پاد نږدې ارزښت شميرنه

- ۱۸۱ اکسټرېما (افراطيت)
- ۱۸۵ د اکسټرېم – يا افراطي ارزښتونو ازمايښت
- ۱۸۶ پولينوم
- ۱۹۰ اسيمپټوتي (يو په بل نه پرېوتونکي يا ګاونډيتوب)
- ۱۹۱ د راشنل- يا کسر توابعو ګاونډ يا اسيمپټوتي
- ۱۹۲ د کړو يا منحنيو خبرې يا بحث
- ۱۹۸ ريمن-انتيګرال
- ۲۰۱ د انتيګرال خويونه
- ۲۰۱ د انتيګرال شميرني منځ ارزښت جمله
- ۲۰۳ بنسټيز – يا ساده توابع
- ۲۰۷ د بنسټيزو توابعو لومړني توابع
- ۲۰۷ ټوټه- يا پارشل انتيګرالونه
- ۲۱۲ دلټا - تابع
- ۲۱۳ د متحولو – يا اووېشتونو بدلون
- ۲۱۹ د متحولو – يا اووېشتونو بدلون
- ۲۲۲ ساده راشنل انتيګرالونه د زياتواره قطب سره
- ۲۲۵ د راشنلتوابعو انيګرالونه
- ۲۲۷ د ساين او کوساين د ضرب انتيګرالونه
- ۲۲۸ د کمپلکس تريګونوميټيکي توابعو انتيګرالونه
- ۲۳۰ تريګونوميټريکي بدلونونه
- ۲۳۳ د ساين او کوساين راشنل توابع

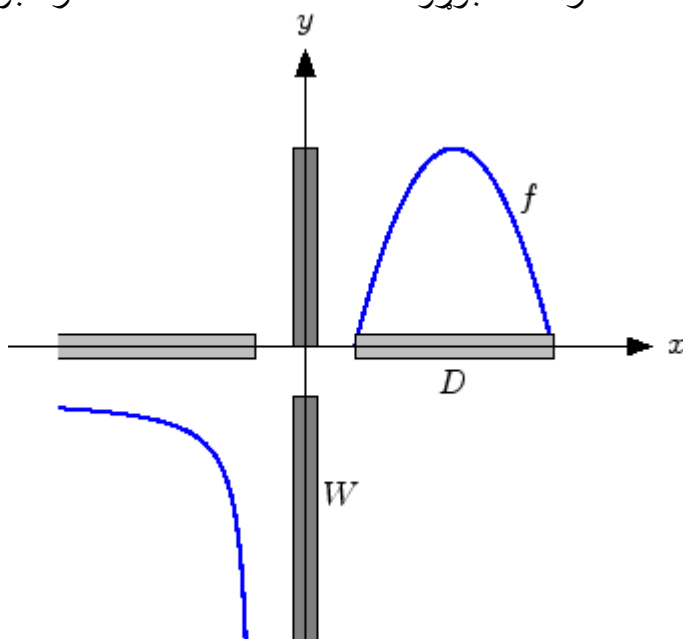
- ۲۳۶ د څرخیدونو بدنونو ډکۍ یا حجم
- ۲۴۱ د یوې کرې یا منحنې اوږدوالی
- ۲۴۴ د دوزنقې قانون
- ۲۴۸ د گاوس فرمول
- ۲۵۱ ناڅرګند یا نا معلوم انتیګرال
- ۲۵۵ د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضیه
- ۲۵۸ ګاما تابع یا – فنکشن
- ۲۵۹ د کوشي اصلي ارزښت
- ۲۶۰ د انتیګرال لاندې مشتقول
- ۲۶۳ لایبنيڅ-قانون
- ۲۶۸ د نامعلومو انتیګرالونو مشتقول
- د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوی،
- ۲۷۱ چاپیدونکې او چاپ ته چمتو لیکنې

بلواک یا تابع (تیک یی: فنکشن) Funktion

یو فنکشن یا بلواک یا تابع

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هر توکی x د ارزښت ډېری $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه $f(x)$ ارزښت سره تنظیموي. f د گراف له جوړو (x, y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



لکه د څیرې څخه چې لیدلکیري، تعریفور شو (رڼه خړه یا پرته) او ارزښت ورشو (تیاره خړه یا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د گراف پریوتل دي.

لیکونکي: هیولیگ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده -یا لومړنیو توابعو رامنځ ته کیدونکي بندیزونه یا محدودوالی په پام کې ونیول شي. د تعریف ورشو د توکي لوگاریتم باید زیاتیز یا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکمیز یا نامنفي وي:

$$x \geq 0, \quad 3-x > 0$$

او

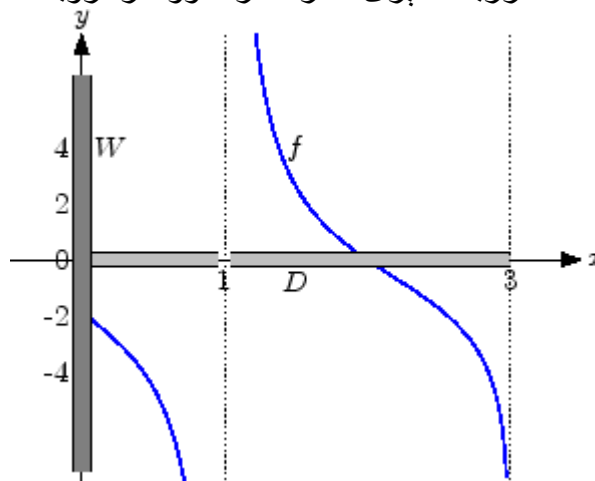
په همدې توگه باید ماتلاندې یا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې

$$x \neq 1.$$

په ټولیزه توگه راکوي:

$$D = [0, 3) \setminus \{1\} = [0, 1) \cup (1, 3).$$

د f ارزښت پېری د گراف رسموو سره روښانه شي



سرلیک

دا چې f د $x \in (1, 3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، کنش)

لاندې جدول د څو بنسټیزو توابعو تعریفورشو او ارزښت ورشو ښایي.

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k + 1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

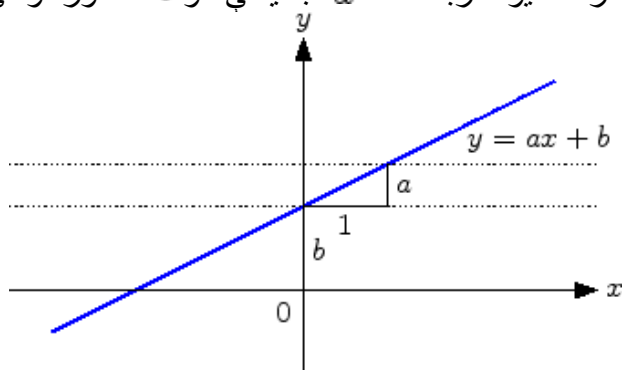
(لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، کنش)

کرښیز فنکشنونه یا توابع

د یوه کرښیز فنکشن یا تابع

$$f(x) = ax + b$$

گراف یوه کرښه ده د a جگړدنې او y -محور غوڅي (محور قاطع) b سره.



د دې لپاره بدیلې انځورونه د ټکي-جگیدنې - بڼه ده

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

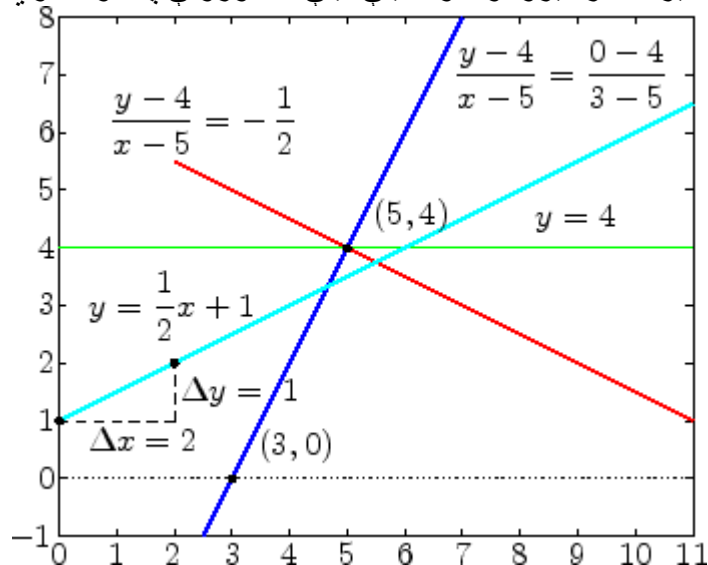
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

چیرته چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(لیکونکي: هیولیگ، هیورنر)

څیره د کرښو توابعو بیلې بیلې انځورونې په کوته کوي:



لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

څلورۍ- یا مربع فنکشنونه یا - توابع
د یوه مربع تابع

سرلیک

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

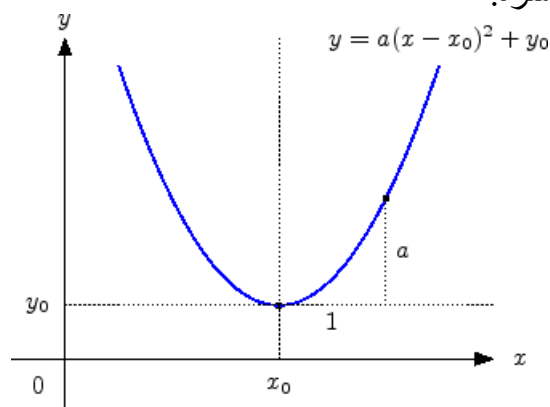
کراف د لاندې ښي یو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ککړۍ - یا رأسنکي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c \right).$$

سره.



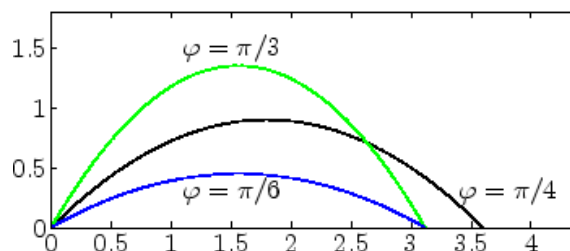
پای

- که یو تن د یوه کونج φ لاندې په یوه v چټکتیا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x \tan \varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \varphi} x^2$$

راکوي، چیرته چې g د ځمکې بیړه ده یا - تعجیل دی.

لاندې څیره: ماییل توغول یا غورځول د $v = 6$ سره.



مساوات د برابر ډوله خوزبنت په x - او y - کمپوننتونو د بیلونې یا ټوټه کونې (که غواړئ: تجزیې) څخه لاس ته راځي، د v پیل چټکتیا سره او د ازاده غوزونې د خوزبنت ته پام کونې له لارې:

$$x(t) = vt \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v \cos \varphi}$$

$$y(t) = vt \sin \varphi - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx \sin \varphi}{v \cos \varphi} - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \varphi} = x \left(\tan \varphi - \frac{gx}{2v^2 \cos^2 \varphi} \right).$$

د غورځونې واټن دی

$$x = \frac{2v^2 \cos^2 \varphi}{g} \tan \varphi = \frac{v^2}{g} \sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \hat{=} 45^\circ$ لپاره ماکسیمال دی. لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، کنش

همغریزې توابع Monotone Funktion

سرلیک

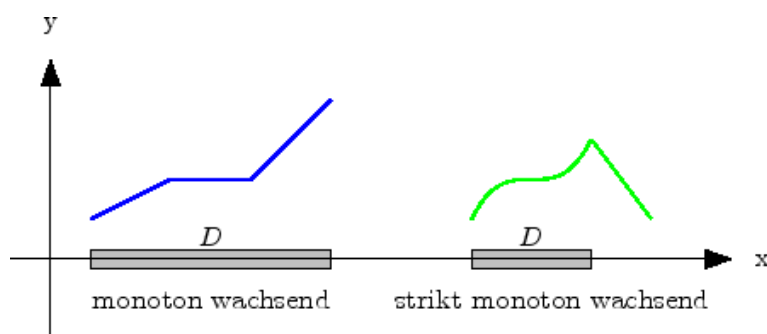
يو تابع f په يوه انټروال D (کره) همغږيز جگيدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \stackrel{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسې که f ټوټه ډوله ناپېرېدونکی مشتقور دی، که وي

$$f'(x) \stackrel{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله يا جدا ټکي بورې



همغږيز جگيدونکي

کره همغږيز جگيدونکي

په ورته توگه (کره) همغږيز ټيټيدونکی تعريفېږي.

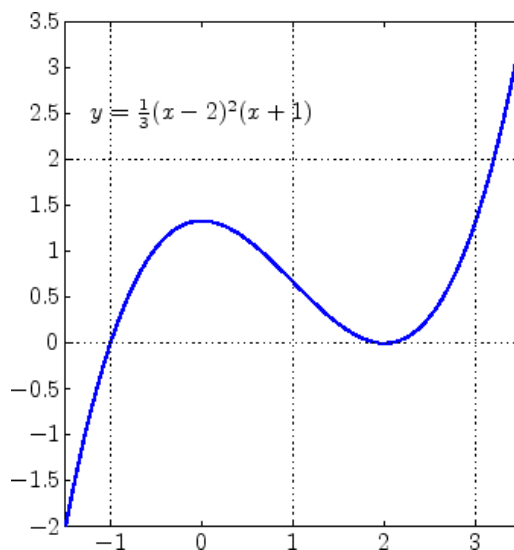
يکونکي: هيوليگ، هيورنر، کنش

تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x=0$ ځای کې يو جگ- يا

ماکسيمال ټکی ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x=2$ ځای ټيټ-يامينيمال

ټکی ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري. د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره

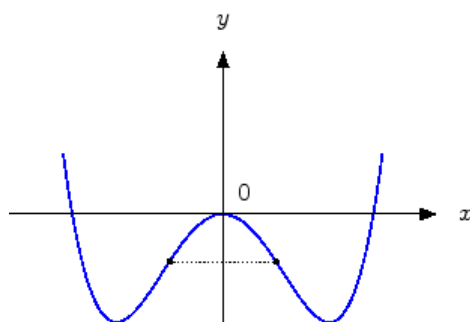
مونوتونجگېدونکي نه ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټيټيدونکي نه ده.



یکونکي: هیولیک، هیورنر، کنش

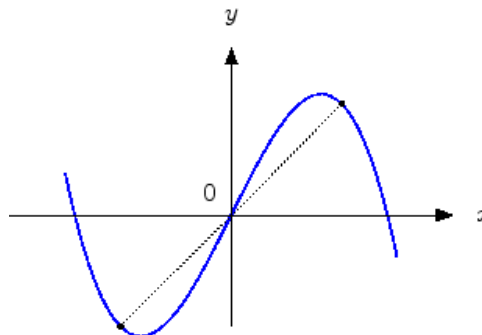
جوړه او ناجوړه - یا جفت او طاق توابع

یو تابع f جوړه دی، که $f(x) = f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که گراف د y - محور سره سیومتريک وي. یو ناجوړه یا طاق تابع $f(x) = -f(-x)$ دی، او گراف سرچینې سره ټکی سیومتريک دی.



gerade Funktion

جوړه یا جفت تابع



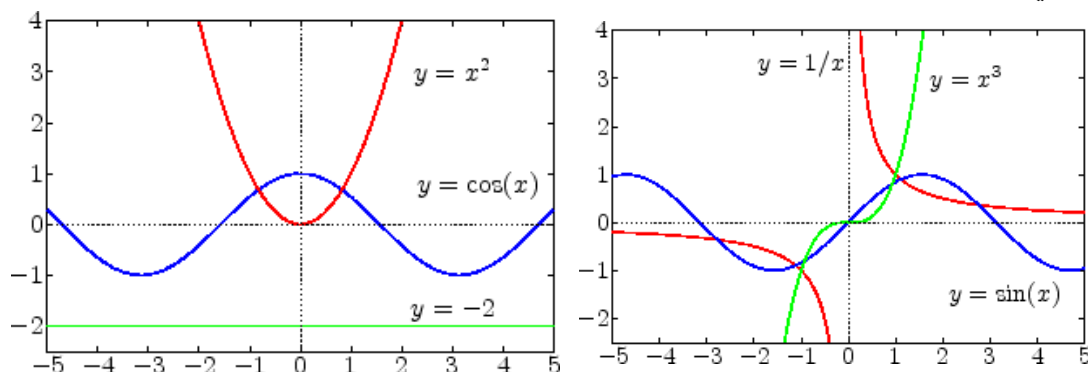
ungerade Funktion

ناجوړه یا طاق تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د یوه ناجوړه یا طاق تابع ضرب د یوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زیاتون یا جمعې او کمښت یا تفریق جوړولو سره د تابع تیپ یا ډول ساتلی پاتېږي. پای.

سرلیک

لاندې توابع یو کین لور ته یو څو جوړه (جفت) او ښي لور ته یو څو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.



د مناسب ترکیب جوړولو سره سړی نوري بیلگي لاس ته رواړي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \quad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.

پاي.

برعکس – يا په څټ فنکشن - تابع Umkehrfunktion

د یوه اینجکتیو (په کې -) تابع $f : D \rightarrow W$ د تعریف ورشو D او ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

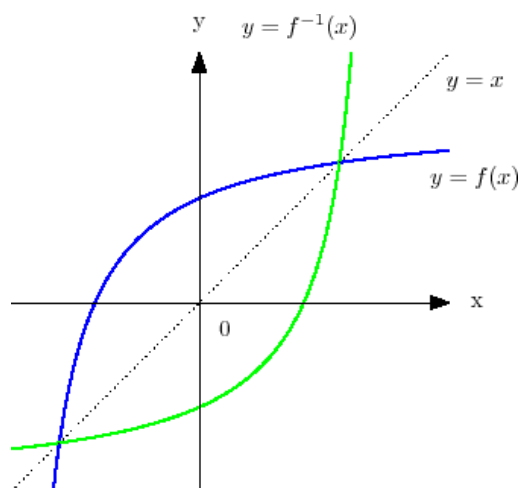
$$f^{-1} : W \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعریف دی. له دې سره لاندې باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

د برعکس توابعو تعریف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه گراف $y = f^{-1}(x)$ د

f د گراف په لومړي کونجیمي ($y = x$) هنداره شوي څېره ده:



$$f^{-1}(x)$$

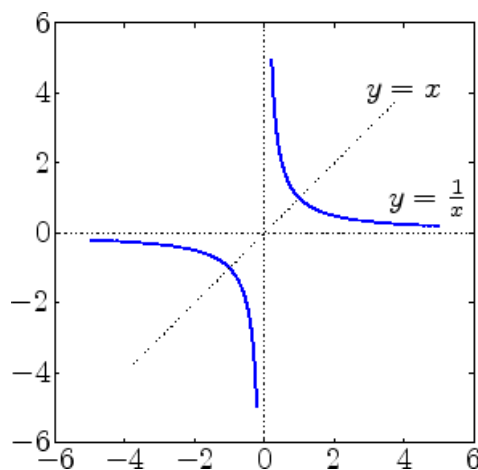
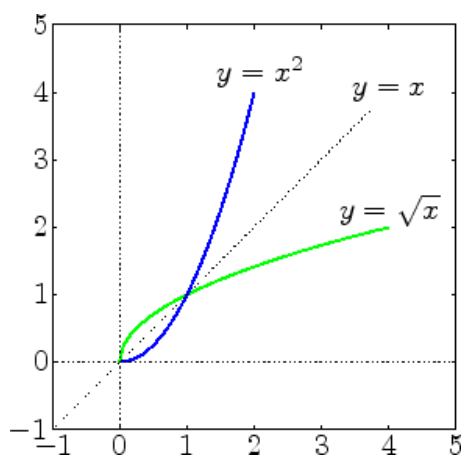
کیدی شي لیکندود مو په ساده توګه د معکوس ارزښت

$$f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

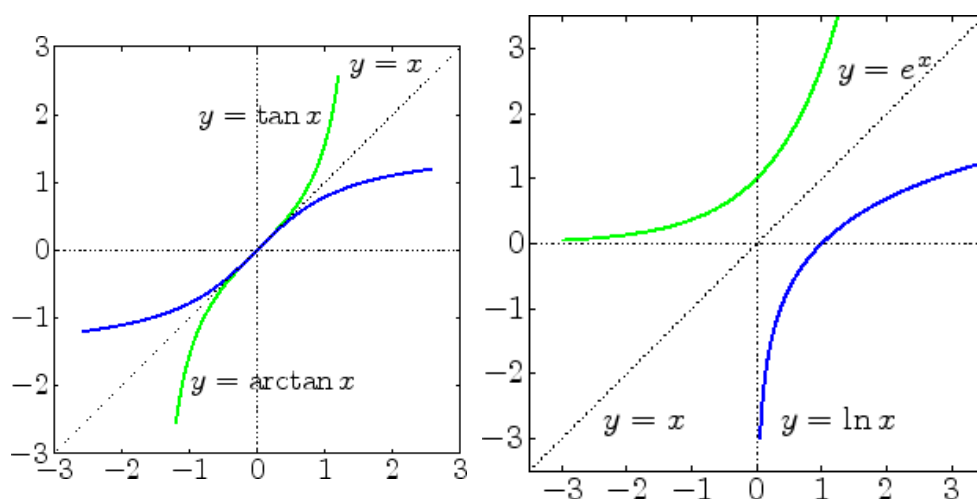
سره بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانګړې توګه، که د تابع x ارزښت ونه لیکل شي، دا اړیکې دې باید روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

پای.

لاندې څیرې د یو څو بیلګو برعکس - یا په څټ فنکشن یا تابع ښايي.



سرلیک



په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وي ورکړ شوي دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0, \infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2z + 1)\pi/2, z \in \mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو يا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کرښيز ترکیب ټکي ډوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf + sg)(x) = rf(x) + sg(x).$$

په ورته توگه ضرب fg او وېش f/g په وېش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بلاخره

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

د دوه توابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه ښايي.
پای.

د بیلگې

$$f(x) = x^2 - 4, \quad g(x) = x + 2$$

لپاره مختلفې ترنې راکوي

$$(f + 2g)(x) = x^2 + 2x$$

$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 2, \quad x \neq -2$$

په وېش کې تعریفشخای $x = -2$ له منځه تلونکی یا د جگیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتېباندي $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرخای لري.

د f او g یو په بل پسې ترنه یا ځنځیرونه راکوي

$$(f \circ g)(x) = (x + 2)^2 + 4$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2,$$

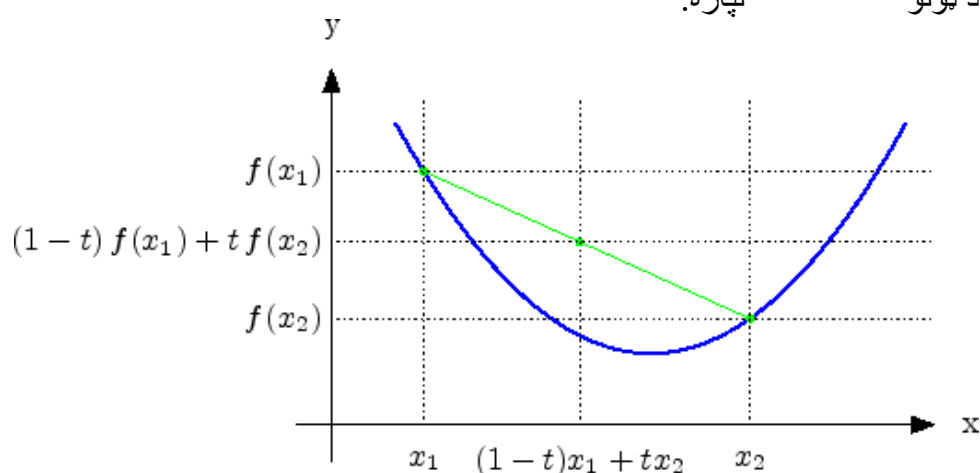
نو ترنه یا عملیه $\circ$ کموتاتیو یا بدلور نه ده.

ننوتی او وتلی - یا مقعر او محدبې توابع

یو تابع په یوه انټروال D کې (کره) ننوتی دی، که هر ټوټه وونی یا سیکانت د گراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معنا چې

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \stackrel{(<)}{\leq} (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad t \in (0,1)$$

د ټولو $x_i \in D$ لپاره.



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقور وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x \in D$ لپاره د

$$f''(x) \stackrel{(>)}{\geq} 0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته یا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زیاتون یا جمعه ننوتی ده. ترني یا عمليي $- , + , \cdot , /$ همداسي یو په بل پسې راوړنه یا ځنځیرونه $\circ$ په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

په ورته توگه وتلی تابع هم تعريف کيږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سیکانت د گراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی تابع $-f$ وتلی دی.

پای.

د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زیاتون د تعريف څخه ترلی لاس ته راځي:

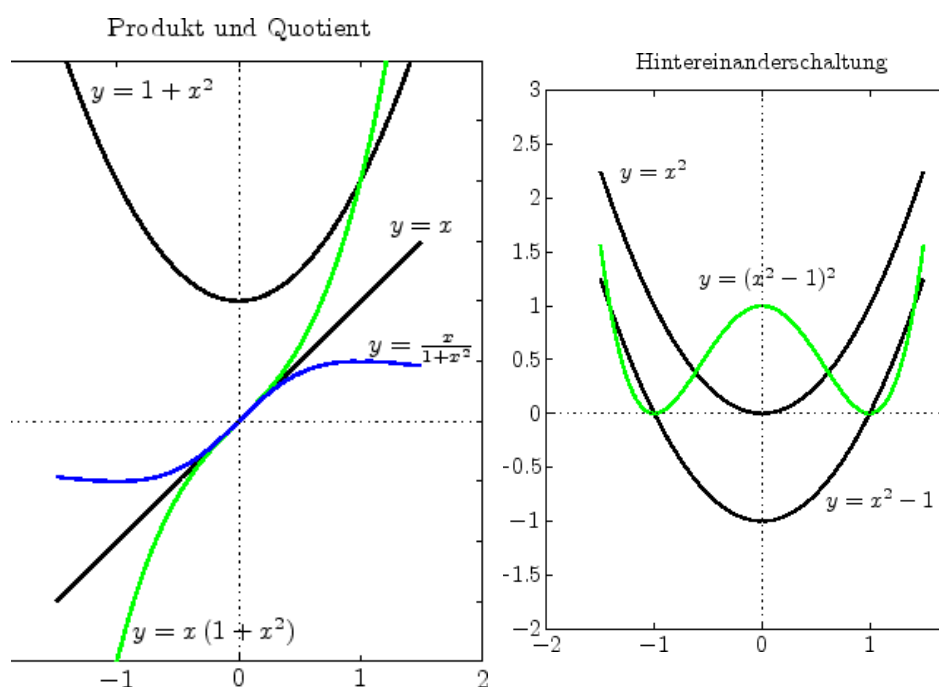
$$\begin{aligned} & (f + g)((1 - t)x_1 + tx_2) \\ &= f((1 - t)x_1 + tx_2) + g((1 - t)x_1 + tx_2) \\ &\leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2) + (1 - t)g(x_1) + tg(x_2) \\ &= (1 - t)(f + g)(x_1) + t(f + g)(x_2), \end{aligned}$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کيږي. نورې ترنې یا عمليې په ټوليزه توگه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلگې به یې وشايي.

ضرب او وېش

یو په بل پسې ترنه

سرلیک



$$c < a < x < b$$

د دې لپاره چې په یوه ټکي کې د تابع ناپېرېدونوالی وښایو، ټاکو
نودى

$$x = ta + (1 - t)b$$

$$a = sx + (1 - s)c$$

د $0 < s, t < 1$ سره. دا چې ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \leq (1 - t)(f(b) - f(a))$$

همداسې

$$f(x) - f(a) \geq \left(\frac{1 - s}{s} \right) (f(a) - f(c)),$$

د $f(a) \leq sf(x) + (1 - s)f(c)$ له امله.

د $x \rightarrow a$ لپاره s او t د 1 په لور هڅیږي، اوله دې سره دى

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0.$$

د $x < a$ لپاره ورته دلیل راوړل کیږي.

پولینوم Polynom

د n درجې یو پولینوم P په لاندې بڼه لیکل کیږي

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

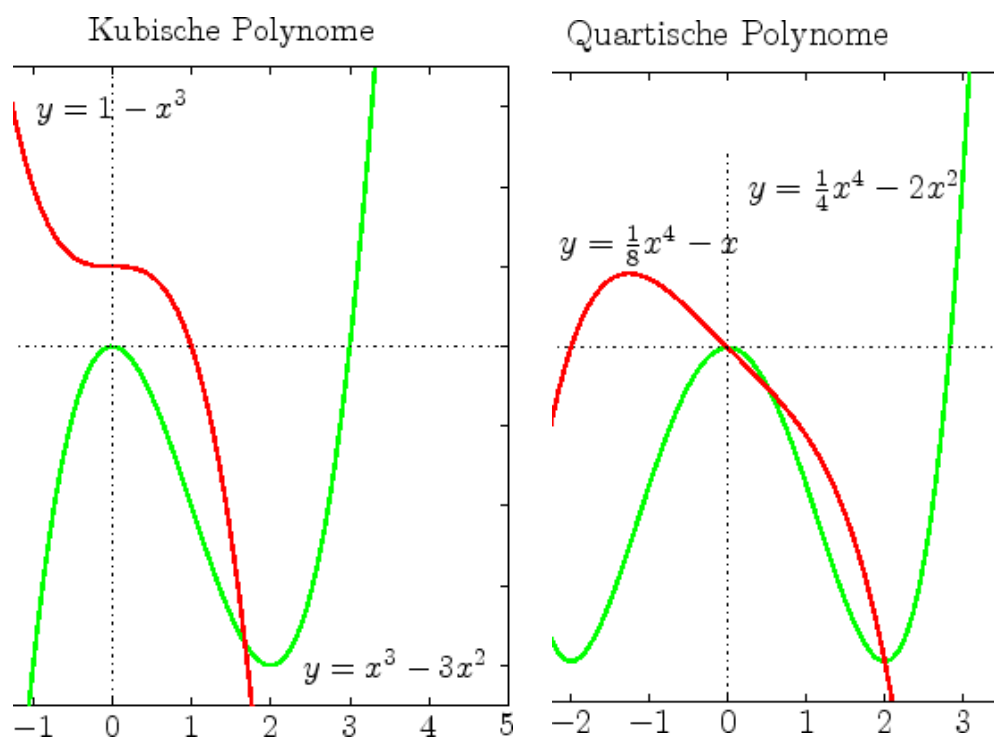
د $a_n \neq 0$ سره.

اووښتوني یا متحولي x او ضریب یا ځلوونی a_k کیدی شي حقیقي – همداسې کمپلکس
گڼونه یا عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي همداسې د کمپلکس پولینوم څخه غږیږو.
لیکونکي: هیورنر او هیولیک

لاندې څیرې مکعب ډوله ($n = 3$) او کوارتیک ډوله ($n = 4$) پولینومونه د
څرنگوالي له لوري مختلف تابع ګرافونو سره ښایي.

کوارتیک پولینومونه مکعب پولینومونه

سرلیک



پولینومویش Polynomdivision

پولینومونو p او q ته د $m = \text{Grad } q \leq \text{Grad } p = n$ سره یواځني
پولینومونه f او r شتون لري د
 $p = fq + r$, $\text{Grad } f = n - m$, $\text{Grad } r < m$.
سره.

دا توتیه ونه کیدی شي د وېش له لارې د باتي یا باقی سره وټاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفر ځای t لپاره لاس ته راځي چې
دی د $\text{Grad } f = n - 1$ سره.

پای.

د q سره د p وېش څخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \dots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \dots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د یوه پاتې یا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \dots$ سره.

که $m \leq n - 1$ وي کېدی شي بیا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x).$$

پروسه پرې کیري، که د پاتې پولینوم درجه له m کوچنی وي، دا په دې معنا چې وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}$ سره.

د تل بیا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \dots.$$

که t د p صفر ځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t - t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې $\text{Grad } r < 1$ دی.

د پولینوم وېش د لیکنیز وېش سره ورته مخ ته تللی شي.

$$p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \text{ د بیلګې په توګه د}$$

او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} (9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) &= \\ &= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

سرلیک

$$\begin{array}{r}
 -(9x^5 + 6x^4 + 3x^3) \\
 \hline
 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\
 -(6x^4 + 4x^3 + 2x^2) \\
 \hline
 3x^3 + 2x^2 + 4x \\
 -(3x^3 + 2x^2 + x) \\
 \hline
 3x + 2 = r(x)
 \end{array}$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)} \underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)}.$$

د یوه پولینوم صفرځایونه او فاکتوري کول یا په ضریبونو توته کول

یو د n درجې پولینوم p د څووالي یا تکرار سره ټیک z_k کمپلکس صفرځایونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کرښیزو ضریبونو یا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

ولیکل شي د ثابتې c سره.

که p حقیقی یا قبیل وي، نو کمپلکس صفرځایونه په کنجوگیری جبرو $x_k \pm iy_k$ رامنځ ته کیږي.

یو حقیقي په ضریبونو لیکل یا فاکتوره کول کېدی شي د کرښیزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - iy_k)(z - x_k + iy_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دویمې درجې پولینوم صفرځایونو لپاره کیدی د منځسپې یا **ABC فرمول** (دا p, q فرمول ته روته یا همغښي دی) و کارول شي او د دریمې او څلورمې درجې پولینومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپلیسیت الجبري افادو یا ویښو په توګه و ټاکل شي.

د جګو درجو پولینومونو لپاره بیا په ټولیزه توګه نومریکي تلنلارې کارول کیږي. که بیا یو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د اړونده کرښیز فاکتورونو یا ضریبونو له لارې

و وېشل شي.

$q(z) = p(z)/(z - z_1)$ او $z_2, \dots, z_n$ د $n - 1$ درجې د پولینوم د د

صفرځایونو په توګه وټاکل شي.

د الجبر بنسټیزې جملې په اساس د $\text{Grad} \geq 1$ درجې کمپلکس پولینوم یو صفرځای

لري. د پرلپسې پولینومو پېشنې د صفرځایونو سره

اړونده کرښیز صریبونه یا فاکتورونه له دې سره صریبونه راکوي.

که p فقط حقیقي صریبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^n p_k z^k} = \sum_{k=0}^n p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^n p_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

یعنې د یوه صفرځای z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0}) = \overline{0} = 0$ دی.

$$p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5 \quad \text{د}$$

په صریبونو لیکل یا فاکتوره کول ټاکو. پیژنو، چې $z_1 = 1$ یو صفرځای دی او یو د پولینوم وېش سره لرو

$$p(z)/(z - 1) = z^2 - 4z + 5.$$

د دې مربع پولینوم صفرځایونه د منځسپې فرمول له مخې دي

$$z_{2,3} = 2 \pm i.$$

د دې په تعقیب کمابکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z) = (z - 1)(z - 2 - i)(z - 2 + i).$$

حقیقي په صریبونو لیکنه یا صریبونه د دواړو اړخني فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته راوړو همداسې سیده د مربع تکمیلوني له لارې:

$$z^2 - 4z + 5 = (z - 2)^2 + 1,$$

سرلیک

دا په دې معنا چې

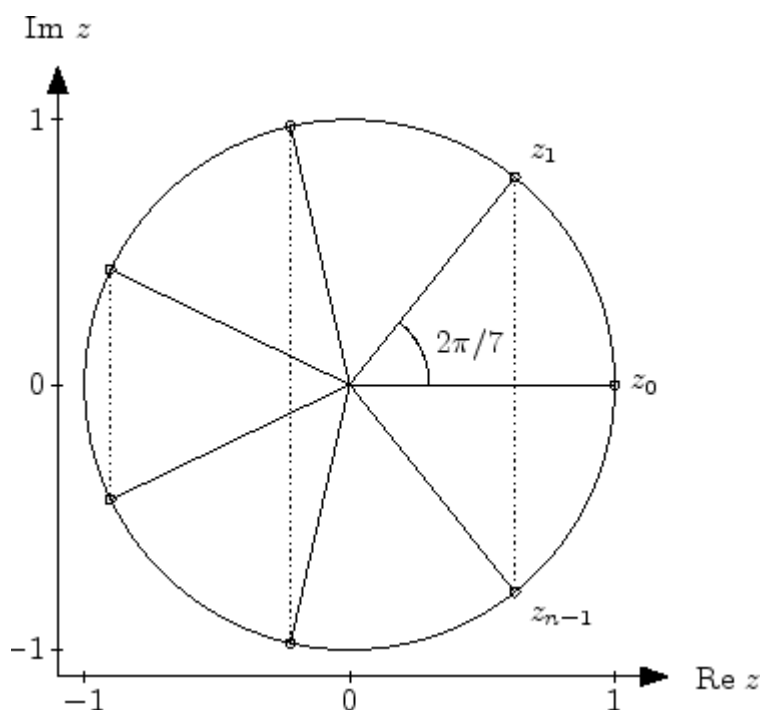
$$p(z) = (z - 1)((z - 2)^2 + 1).$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځایونه n -م یوونږېښي یا واحدجذرونه دي
 $z_k = \exp(2k\pi i/n), k = 0, \dots, n - 1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \exp(2k\pi i/n)).$$



د کمپلکس کنجږگیری صفرځایونو ټولګه یا یوځای کونه حقیقي فاکتوري کونه راګوي.

د جوړه n لپاره دی

$$p(z) = (z-1)(z+1) \prod_{k=1}^{n/2-1} (z^2 - 2z \cos(2k\pi/n) + 1)$$

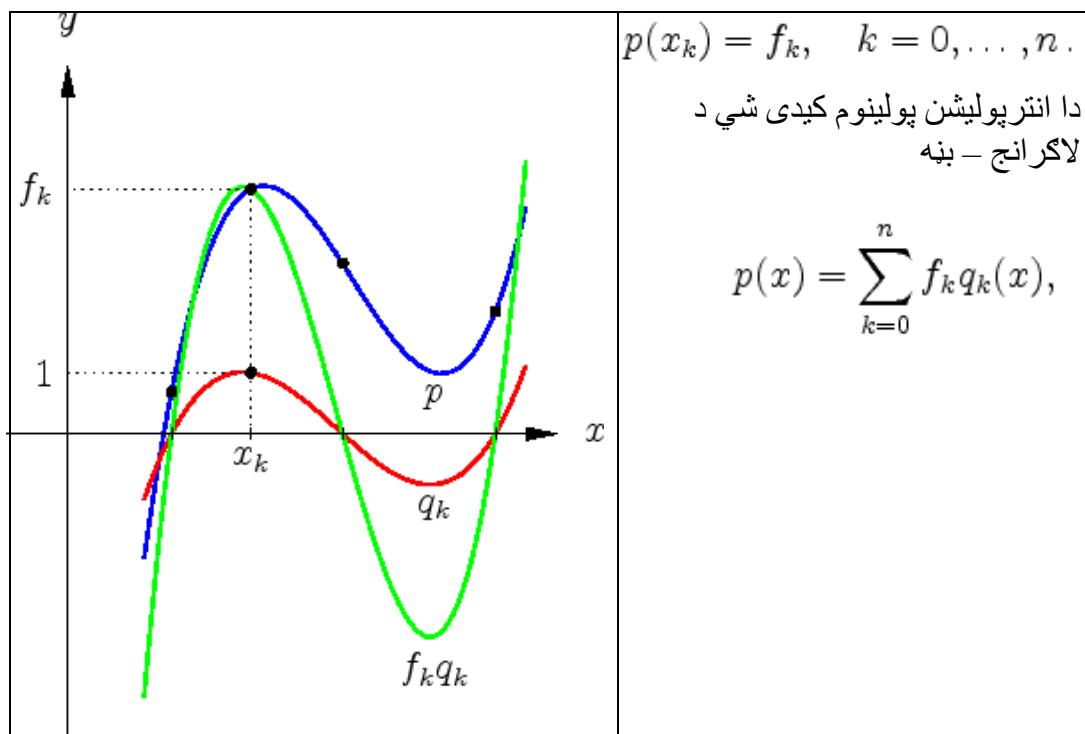
او د ناجوره یا طاق n لپاره

$$p(z) = (z-1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2z \cos(2k\pi/n) + 1).$$

پای.

د پولینومونو سره انترپولیشن

په $n+1$ کې تابع ارزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو $x_0, \dots, x_n$ کیدی شي یواځني د یوه $\text{Grad} \leq n$ درجې پولینوم له لارې انترپولی شي:



سرلیک

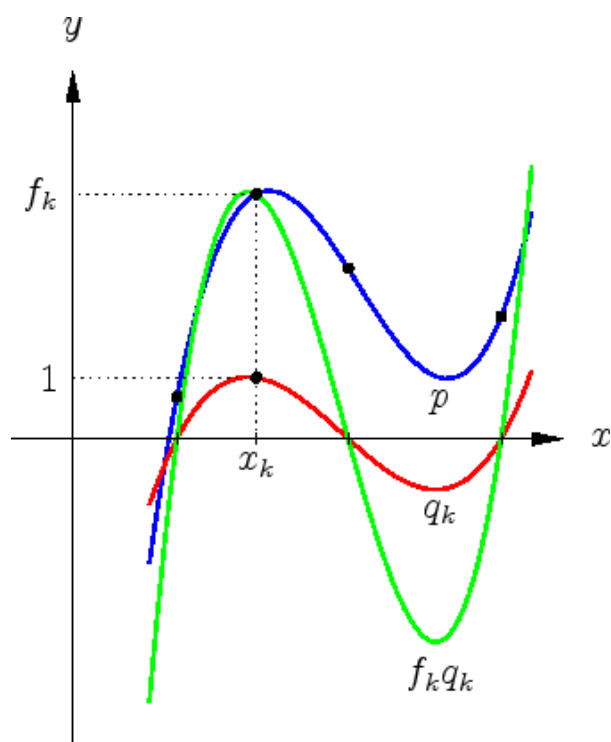
$$p(x) = \sum_{k=0}^n f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

دا انټرپولیشن پولینوم کیدی شي د لاگرانج - بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولینوم q_k د لاگرانج-پولینوم بلل کیږي او په x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې یې ارزښت صفر دی:

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونيکر-سومبول δ سره.

د لاگرانج-پولينوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j,$$

د انټرپوليشن شرايط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې يواځنوالی وښايو، چې يو بل انټرپوليشنپولينوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو يا تر څېړني نيسو.

$$p - \tilde{p}.$$

دا (لږتر لږه) $n+1$ صفرځاونه لري (د انټرپوليشن کېدونکي ځايونه x_k)، مگر (زيات له زياته) د n درجو. له دط سره بايد کمښت کټمټ وي، نو پولينومونه سره توپير نخ لري. ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

په اکويديستانت يا برابر وائيز تکیه -ځايونو f_k د ارزښتونو توابعو ټيک گرافيکي انځورونې ته کېدی شي مکعبيز انټرپوليشن وکارول شي. له دې سره په تکیه-

$$x_{k+1/2} = (k + 1/2)h$$

ځايونو د ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسيمي شي. دا پروسه تکراريري، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي. د ټکو -فرمول وزنونه

سرلیک

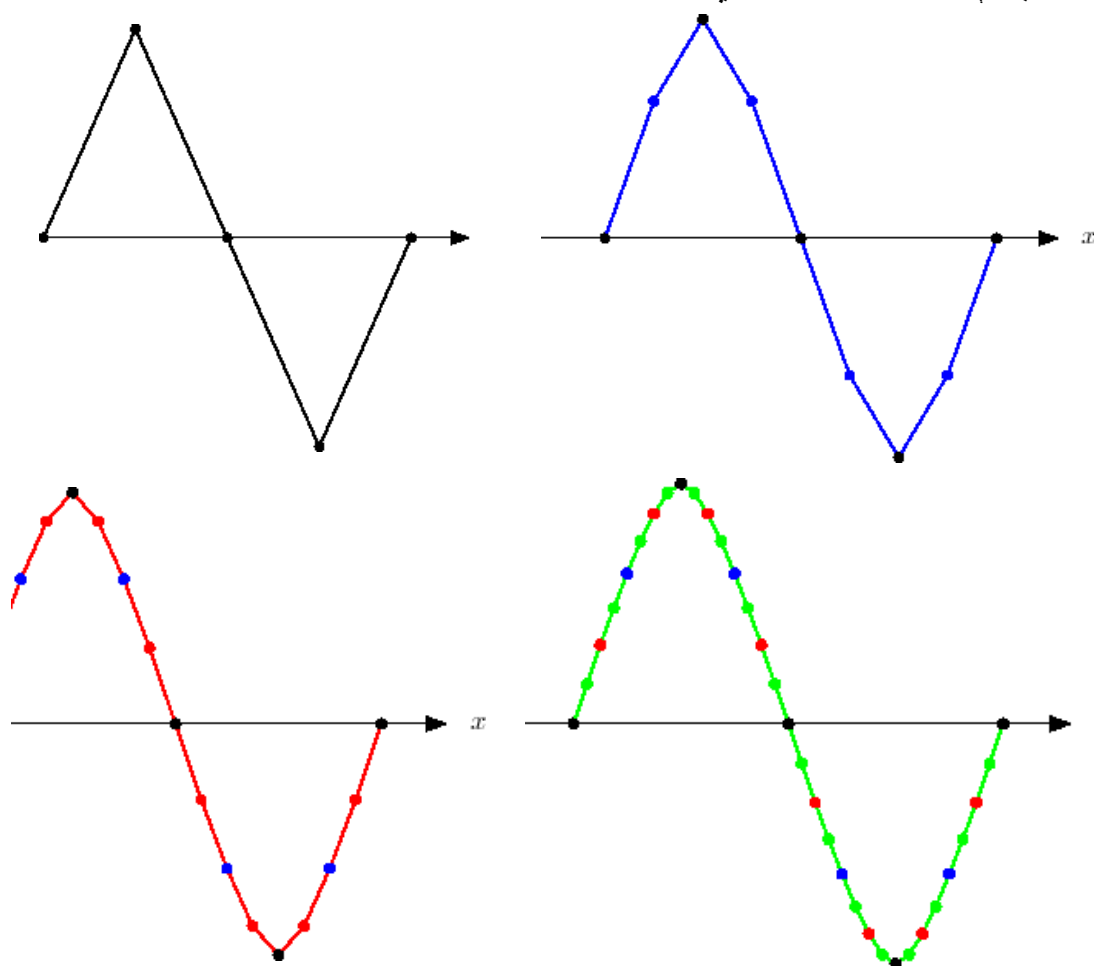
$$-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}$$

په تکیه-خایونو $x_{k+1/2}$ د لاگرانژ-پولینوم ارزښتونه دي.
د بېلګې په ټوګه

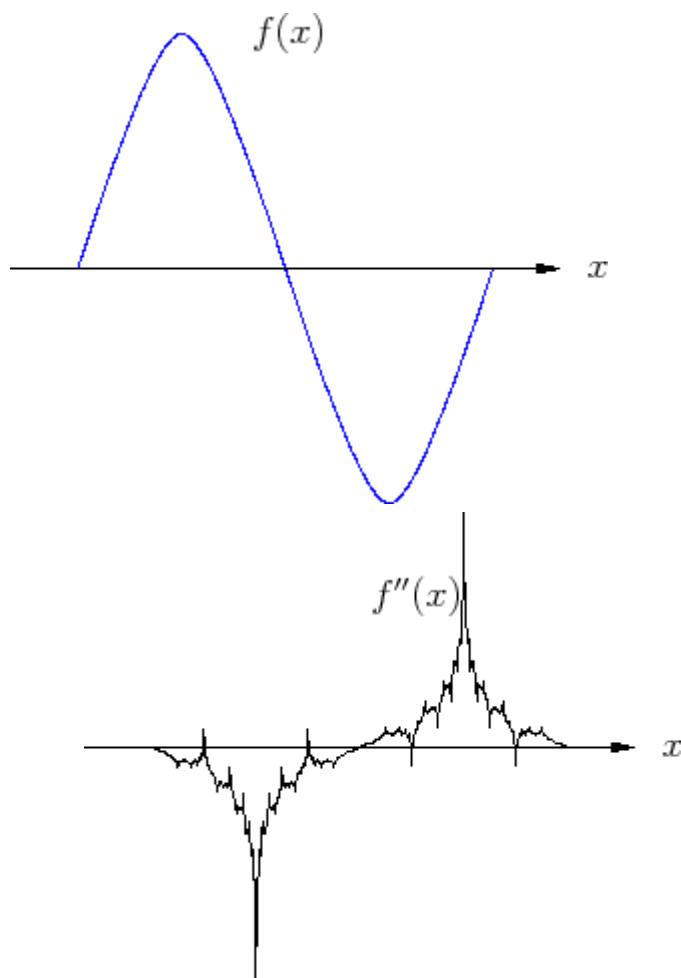
$$-\frac{1}{16} = \left(\frac{x - kh}{(k-1)h - kh} \frac{x - (k+1)h}{(k-1)h - (k+1)h} \frac{x - (k+2)h}{(k-1)h - (k+2)h} \right) \Big|_{x=(k+1/2)h}.$$

دی.

د سیمټري په بنسټ او دا چې ضریبونه باید سیمټریک شي (د ثابتو داتا انټرپولیشن) ، ټي
له شمېرنې نور ضریبونه راګوي.



څېره وتونداتا بڼايي او د 4-ټکو-انټرپولیشن د درې څله کارونې یا استعمال له لارې د منځ ته اړغلي ساین تابع اېروکسیمیشن . په حقیقت کې دا لاندې کینې بنودل شوی پوله تابع خوی اغیز لري. مگر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپېرېکیدونکی دی.



بڼی گرافیک وېشلی کمښت له لارې ورنږدې یا نږدې دویم مشتق د اته واره انټرپولیشن پسې بڼايي. سړی د گراف فراکتال *fraktalen* (فراکتال: لاتین: مات) خویونه پیژني.

راشنل (کسری یا نسبتي) توابع

سرلیک

یو ریښتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولینومونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n}.$$

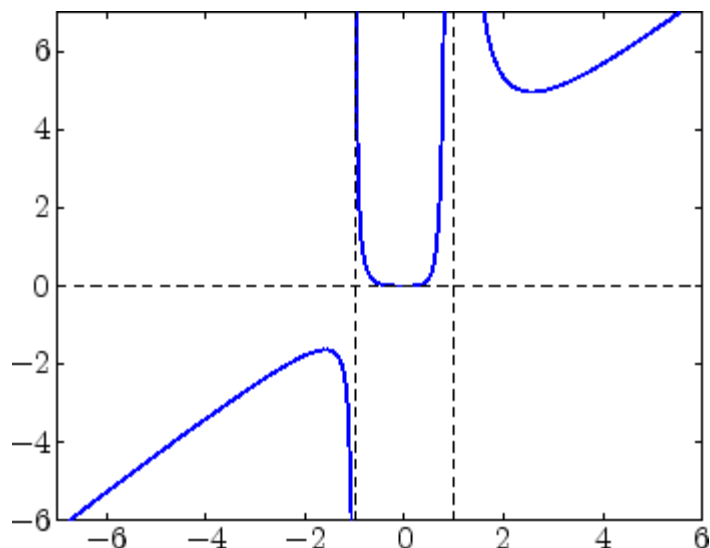
دا انځورونه ناټوټه وونی بلل کیږي، که p او q کوم ګډ کرښیز ضریب یا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځایونه راشنل تابع r د تعریف تشځایونه دي او د قطبځایونه بلل کیږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی ښایي.

اووښتوني یا متحولې x او ضریبونه a_k ، b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس وي. اړوند سری د حقیقي یا کمپلکس راشنل تابع څخه غږیږي. للیکونکي: اپې، هیولیګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع یو ساده قطب په $x = -1$ کې لري او ډبل پول په $x = 1$ کې.



سری له تابع f څخه درک کوي، چې په یوه ساده صفرځای کې مخنځینه بدلوي او په یوه ډبل صفرځای کې مخنځینه تغیر نه خوري.

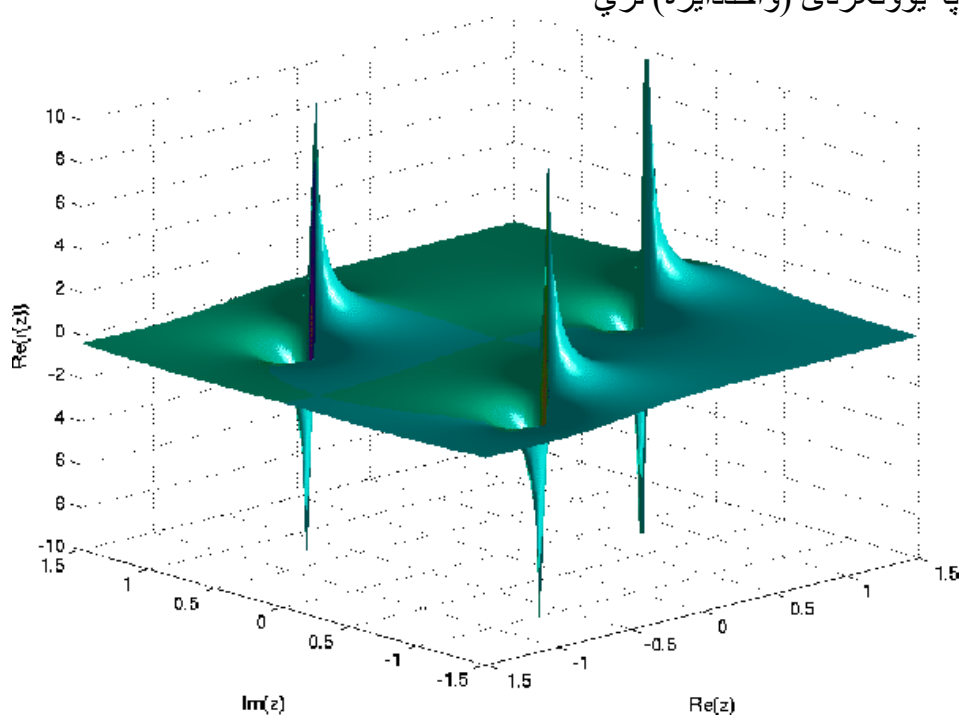
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

درې صفرځایونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

په یوونگردي (واحدایره) لري



څیره د r د گراف ریيل - او ایماجینار برخه ښايي. له دې سره د رنگوېشنه (که چېرې رنگه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې ټاکل شوې.

(لیکونکي: ایپ، هیورنر، کنش

سرلیک

په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه Partialbruchzerlegung

یو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرخایونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کیدۍ شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^n r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \cdots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ د f درجې پولینوم دی ($f = 0$ ، که

$$d < 0$$

وی). راشنل توابع r_j د r په قطبخایونو کې اصلي برخې بلل کېږي. دا د $r(z)$ لوبنده تشریح کوي د $z \rightarrow z_j$ لپاره. پولینوم f کیدۍ شي د پولینوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې یا باقي دی. ضریبونه $a_{j,\nu}$ کیدۍ شي د z^k د ضریبونو د پرتله کونې له لارې په کټوتوالي

$$p(z) = q(z) \left(f(z) + \sum_{j=1}^n r_j(z) \right)$$

وټاکل شي.

د بدیل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کیدۍ شي.

د قطبونو د خوراجګو ضریبونو لپاره باور لري

$$a_{j,m_j} = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^{m_j} r(z).$$

د یوه نظم $(m_j > 1)$ قطبځای کې نه شي کېدی ضریبونه $a_{j,1}, \dots, a_{j,m_j-1}$ سیده
د پولې ارزښت په توګه وټاکل شي. سړی کړی شي دا اوس شمیرل شوی ترم

کم کړي او د رګورسیو متود وکاروي.. یو ضریب پرتله کونه
د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نیولو هم شونې ده.

پوله ارزښت کېدی شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضریب $(z - z_j)^{m_j}$

لري برېښوول شي او بیا z_j په پاتې کسر یا مات کې ځا په ځای شي. په ځانګړي
توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k \neq j} (z_j - z_k)}$$

د ساده قطب ځایونو $z_1, \dots, z_n$ لپاره.
لیکونکي : اپ، هیورنر

د ساده قطبځایونو ($m_j = 1$) لپاره به ټوټه کونه منځ ته راشي. د پولینوم وېش پسې
راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)},$$

د کوم سره چې پولینوم $g(z)$ او $q(z)$ ګډ پروېشونی یا مقسوم علیه ونه لري، نیسو ،

چې ټول z_j مختلف دي، او $\text{Grad } g < n$ باور لري.
د ټوټه کسر ټوټه کونې سره د برابر اېښوونې وروسته

$$\frac{a_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z - z_n}$$

سرلیک

د $a_j = a_{j,1}$ سره او د q د ضربول سره سری د $g(z)$ د لاگرانژ-انځورونه لاس ته راوړي

$$g(z) = \sum_{j=1}^n \left(a_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (z - z_k) \right) = \sum_{j=1}^n \left[a_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (z_j - z_k) \right] \underbrace{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{z - z_k}{z_j - z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په $q_j(z_k) = \delta_{j,k}$ له امله په گوډیزه نوکانو کې د ازبستونه $g(z_j)$

$$a_j = g(z_j) / \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (z_j - z_k).$$

دي. له دې سره لاس ته راځي په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لږ پېلۍ دی.

لیکونکي: اپ، هیورنر د

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^3}{z^2 + z - 2}$$

په ټوټه کسر (مات) ټوټه ونه دي وټاکل شي. دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ نه ده، باید لومړی یو پولینوم وېش صورت ونیسي. سری لاس ته راوړي

$$\begin{aligned} (z^3) : (z^2 + z - 2) &= z - 1 + \frac{3z - 2}{z^2 + z - 2}, \\ -\frac{(z^3 + z^2 - 2z)}{-z^2 + 2z} \\ -\frac{(-z^2 - z + 2)}{3z - 2} \end{aligned}$$

دا په دې معنا چې $r = f + \frac{g}{q}$ د $f(z) = z - 1$, $g(z) = 3z - 2$.
 د دې لپاره چې د ټوټه مات ټوټه ونې ایښونه چې لاس ته راوړو باید اوس د r قطبځایونه وټاکل شي. د منځنۍ فرمول سره لاس ته پلینوم د صفحای په څېر:
 $q(z) = (z - 1)(z + 2)$.

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z - 2}{z^2 + z - 2} = \frac{a_1}{z - 1} + \frac{a_2}{z + 2}.$$

دا اخر پل د ضریبونو a_k ټاکل دي.

د پوله ارزښت متود سره لاس ته راځي

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{3z - 2}{z^2 + z - 2} = \frac{3z - 2}{z + 2} \Big|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{3z - 2}{z - 1} \Big|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z - 1} + \frac{8/3}{z + 2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې یوه ساده قطبځای لري او په $z_2 = 0$ کې یو ډبل قطبځای لري.

سرلیک

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ ده، پولینوم وېش ته اړتیا نه شته او د په
ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2} = \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{z - 3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2} = \left. \frac{2z^2 - 5z - 3}{z - 3} \right|_{z=0} = 1$$

$$a_3 = \lim_{z \rightarrow 3} (z - 3) \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2} = \left. \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^2} \right|_{z=3} = 0.$$

سړی په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وایو باقي مانده)

ضریبونه a_2 په یوه ټکي $z \neq 0, 3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کونې له لارې وټاکي.
د بېلګې په توګه د $z = 1$ لپاره لرو

$$\frac{2 - 5 - 3}{1 - 3} = 1 + a_2 + 0$$

او سړی $a_2 = 2$ لاس ته راوړي.

لیکونکي: اپ، هیورنر

د راشنل توابعو لپاره

$$r(z) = \frac{z^2 - 5z + 4}{z^3 - 3z^2 + z + 5}$$

لپاره قطبځایونه روښانه نه دي. د ازمایښت له لارې $z_1 = -1$ پیدا کړي او بیا د
پولینوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3 - 3z^2 + z + 5) : (z + 1) = z^2 - 4z + 5.$$

د نیمې شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځایونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3} = 2 \pm i.$$

له دې سره ماتلاندې يا مخرج ضريبه ونه يا فاکتوري کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لري او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضريبونو د پرتلي له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وېشو او لرو

$$z+4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضريبونو د پرتله کونې له لارې د درې ناکلو يا نامعلومو a, b او c لپاره يو کرښيز مساوات سيټم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حيث لاس ته $b = i/2$ او $a = 1$ ، $c = -i/2$ راځي، دا په دې معنا، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره يوځای کړو، نو حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2 - 4z + 5}.$$

د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه يا تجزيه

سرلیک

یو حقیقي ریښتونی یا راشنل تابع r د حقیقي قطبځایونو x_j سره او کمپلکس کنجوگيري قطبځایونو i سره او څو واره والی یا ډېروالی m_j همداسې $u_k \pm v_k$ n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

کیدۍ شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \leq m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu \leq n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

توټه کيري، د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ درجې () ، که $d < 0$ وي f

یوه پولینوم f سره. د په هر قطبځای زیاتونونو یا د جمعې غړو د گڼون یا تعداد ډېرواره والی په گوته کوي. په ځانگړې توگه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}.$$

پولینوم f کیدۍ شي ډپولینوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q,$$

دا په دې معنا چې g د q وېش په p باندې پاتې یا باقي دی. ضریبونه کیدۍ شي د مخرج پولینوم سره له ضرب وروسته دضریبونو د پرتلي له لارې وشمېرل شي. حقیقي توټه کسر توټه کونه هم کیدۍ شي د کمپلکس بڼې څخه و کټل شي یا لاس ته راوړل شي، داسې چې سړی کمپلکس کنجوگيري ترمونه سره یوځای کاندې.

توټه کونه د ساده قطبځایونو () $m_j = n_k = 1$ لپاره سرته رسیږي..

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلینوم q ساده صفرخایونه او

$$a_j = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j) r(z).$$

دا q چې حقیقي دی، نو کمپلکس صفرخایونه د کمپلکس کونجرگيري جوړوپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k = u + \frac{v}{i}, \quad z_l = u - \frac{v}{i} = \overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k} = \lim_{z \rightarrow z_k} \overline{(z - z_k) r(z)} = \lim_{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_l} (\bar{z} - z_l) r(\bar{z}) = a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k = s + \frac{t}{i}, \quad a_l = s - \frac{t}{i}.$$

د دواړو ترمونو یوځای کونه غوښتونې بڼه راګوي:

$$\frac{s + it}{x - u - iv} + \frac{s - it}{x - u + iv} = \frac{2s(x - u) - 2tv}{(x - u)^2 + v^2}.$$

د جګو درجو قطبځایونه کیدي شي په ورته توګه تر څیرني ونیول شي، مګر دلیل راوړنه یې په څرګنده توګه پېچلې ده.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^3 - 9x^2 + 11x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

حقیقي په ټوټه کسر ټوټه کوني ټاکنه په درې پلونو یا قدمونو وېشل کیري

(i) دا چې $\text{Grad}^p \geq \text{Grad}^q$ دی، لومړی د پلوینوم وېشنه صورت نیسي:

سرلیک

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د $\frac{g}{q}$ ټوټه ونې ایښوونه یا اسمعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفر ځایونو $x = 0$ د نوکانو د باندې کونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سړی نور دواړه صفر ځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1^2.$$

$$u \pm iv = 2 \pm i$$

دې له دې سره

دا پاتې صفر ځایونه کمپلکس کونجوگیري جوړې
ایښوونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x - 2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x - 2) + c}{(x - 2)^2 + 1^2}.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربیږي او ترې لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 = a((x - 2)^2 + 1^2) + b(x - 2)x + cx$$

د x ، 1 او x^2 ضریبونو پرتله مو کرښیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = 5a$$

$$1 = -4a - 2b + c$$

$$-1 = a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5}, b = -\frac{6}{5}, c = -\frac{3}{5}.$$

له دې سره حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کيږي. که دا ايسنونه يا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کيږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \implies a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کوني سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \implies c = -\frac{3}{5}.$$

بلاخره کېدی b د ټکی ازماېښت $x \neq 2$ له لارې، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راځي. پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقيقي ټوټه کسر ټوټه کوني ټاکلو په دوه پلونو يا قدمونو کې ترتيبیږي

سرلیک

(i) د ایښوونې د ټاکلو لومړۍ قطبځایونه پیدا کيږي. له

$$q(x) = (x^2 + 1)^2$$

پېژندل کيږي، چې $\pm i$ ډبل صفر ځایونه دي، دا په دې معنا چې $u = 0$ او $v = 1$.
له دې سره دا ایښوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{b_1x + c_1}{x^2 + 1} + \frac{b_2x + c_2}{(x^2 + 1)^2}.$$

(ii) د ضریبونو د ټاکلو له امله دا سړۍ د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1x + c_1)(x^2 + 1) + b_2x + c_2 \\ &= b_1x^3 + c_1x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 1, x, x^2 \\ & & \text{د } x^3 \text{ او د ضریبونو پرتله کونه مو کرښیز سیستم ته بیایي} \\ 1 & = & b_1 \\ 0 & = & c_1 \\ 0 & = & b_1 + b_2 \\ 0 & = & c_1 + c_2 \end{array}$$

د لاندې حل سره

$$b_1 = 1, c_1 = 0, b_2 = -1, c_2 = 0.$$

بدیلې کیدی شي د کمپلکس ټوټه کسر ټو کوني څخه مخ ته لاړ شو

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضریبونه $c = \bar{a}$, $d = \bar{b}$ پوره کوي او د جمعې جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i}, \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقيقي توتېکسر توتې کونه لاس ته راوړي

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

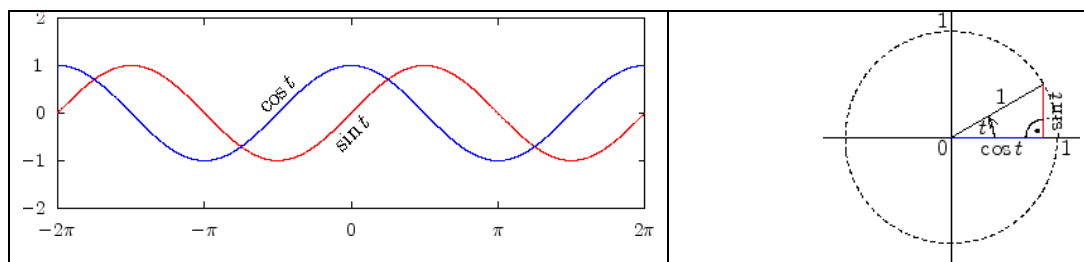
ساین او کوساین Sinus und Cosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

(1,0)

سره په سرچینه په کونج t څرخول شوی ټکی کواردینات نومولکيږي. د تر مخنښې پورې کوساین او ساین په یوه ولاړگودیز برېښکودي (المثلث القايم الزاويه) کې د ولاړ اړخونو (هغه اضلاع وې چې یو د بل سره قلموازاویه جوړه وي) نسبت د نیمې(قطر) سرره په گوته کوي.



دواړه گردۍ توابع يا د داېرې توابع 2π - تلېرته راگرځېدونې يا 2π - پریودیکي دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

سرلیک

$$\begin{aligned} \cos t &= \cos(-t), & \sin t &= -\sin(-t) \\ \sin^2 t + \cos^2 t &= 1 \end{aligned}$$

يو څو ځانگړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اوپلر-مويورې فرمول Formel von Euler-Moivre

يو اکسپوننشل تابع د ايماجينار x-محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تريگونوميټريک (درېگوډي - يا مثلثاتي -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + i \sin t = \exp(it)$$

کوساين او ساين حقيقي - او ايماجينار ګڼونه (عددونه) په ګوته کوي د ارزښت 1)
 $|\exp(it)| = 1$ سره .

که پورته فرمول اينورټير يا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \operatorname{Re} e^{it} = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$
$\sin t$	$= \operatorname{Im} e^{it} = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$

د اکسپ، کوساين او ساين کټمټوالی اوپلر او مويورې ته ځي. دا د جيوميټريکي کمپلکس عددونو د انټرپوليشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوري-اناليوز کي غوره رول لوبوي.

ليکونکي: هيو ليگ، کوپف

د ساين او کوساين لپاره د زياتون- يا جمع قضيه

د گردۍ توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې باور لري:

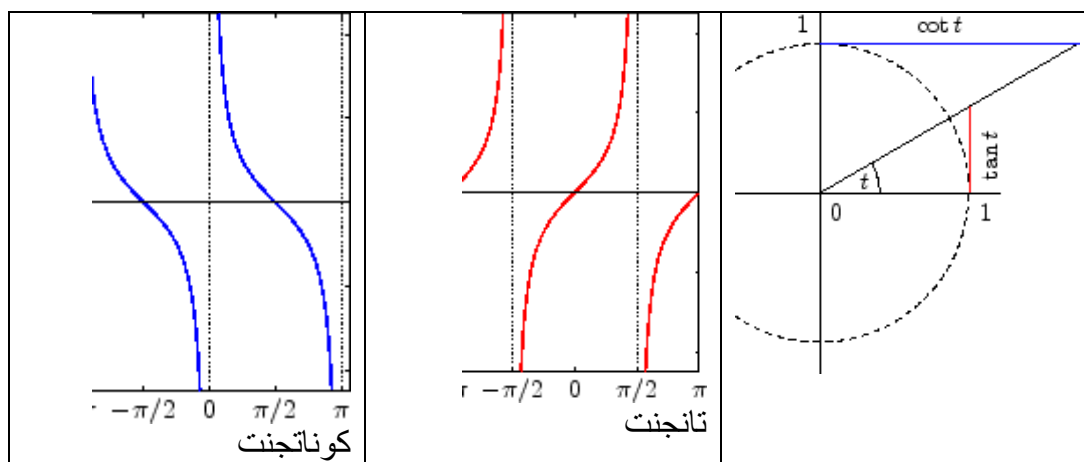
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta$$

په ځانګړې توګه دی

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

تانجنت او کوتانجنت Tangens und Cotangens



د تانجنت او کوتانجنت توابع د

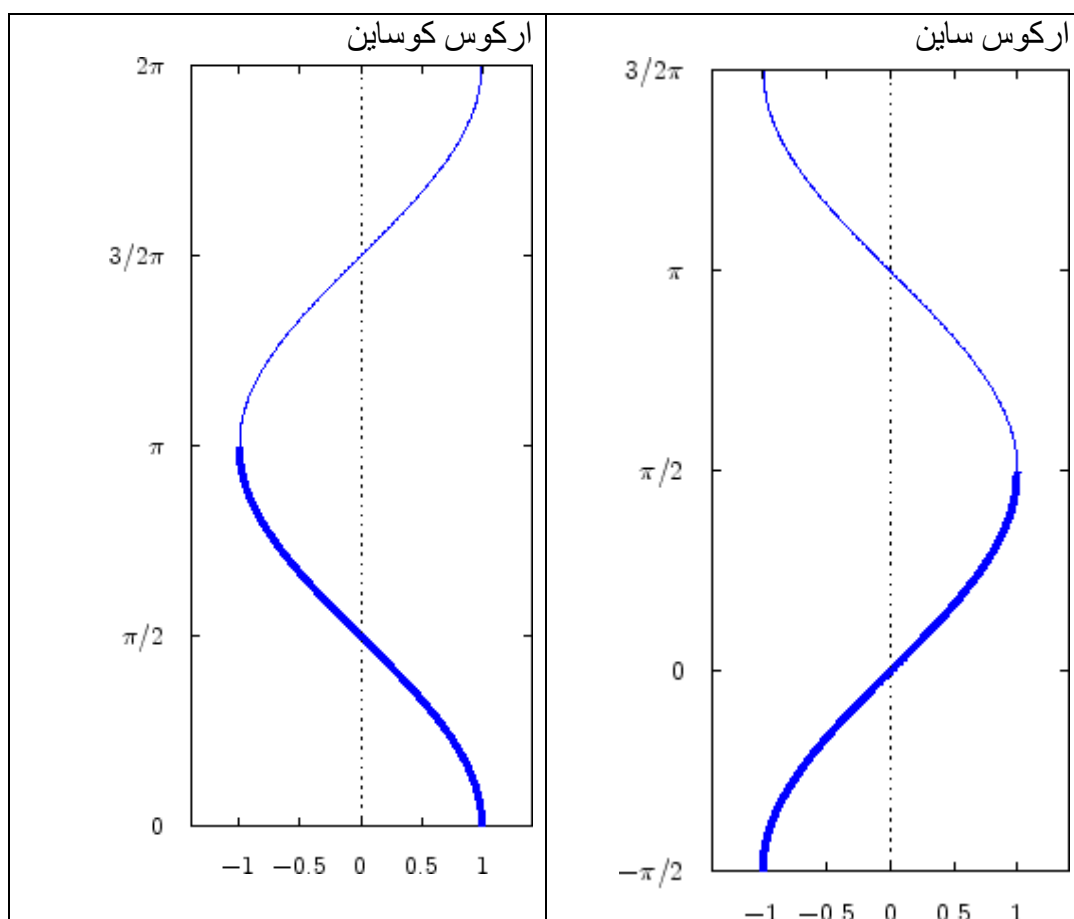
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

له لارې تعريف دي. دا تر دمخښې پورې د ولاړګوډيز درېګوډي (- - مثلث) د ولاړګوډونو Katheten نسبت ورکوي
يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

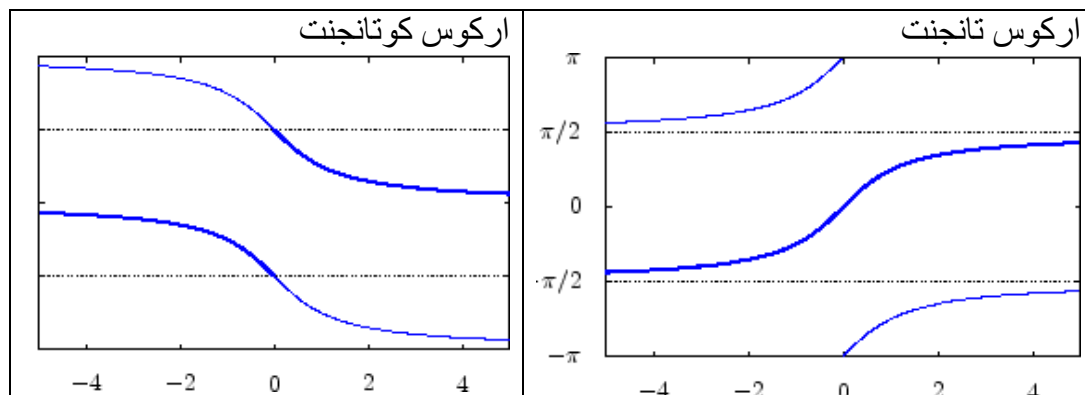
سرلیک

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د ارکوس توابع Arcusfunktionen

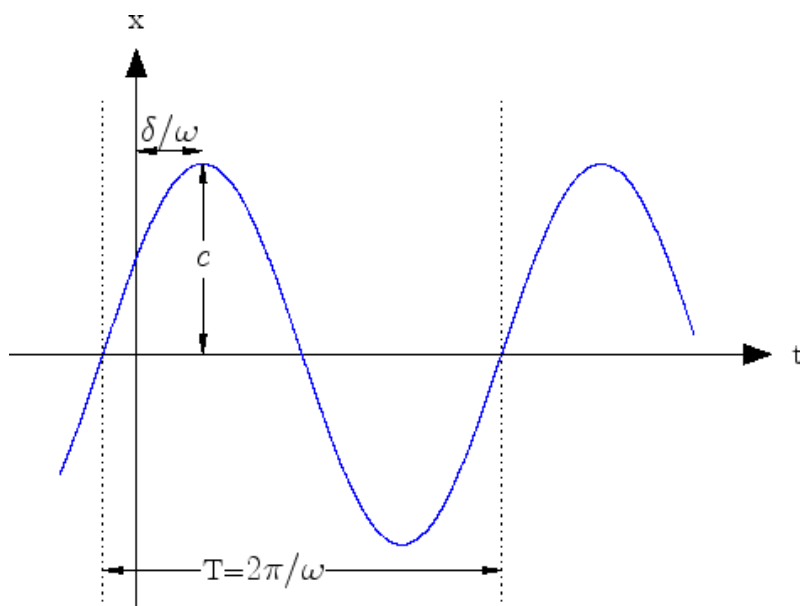


د درېگودیز (ترېگونومتريکي يا مثلثاتي) توابعو په څنډ يا معکوس توابع د $\arccos$, $\arcsin$, $\arctan$, arccot سره بنوول کيږي.



د دې تعريف - او ارزښت ورشو د پورته څېرې څخه رانيول کېدې شي.
له دې سره اصلي څانگې غوړې يا پندې کېدل شوي دي.
ليکونکي: هيوليک، کنوېف، کنش

هارمونیک لرځيدنې يا رپيدنې Harmonische Schwingung



سرلیک

يو هارمونيکي لړځيدنه د جگوالي Amplitude $c \geq 0$ سره، د فاز بلځای ته ورنه يا

$$T = 2\pi/\omega$$

راکښنه δ او فرکونځ ω همداسې پريودوالي يا تل (بیرته) راگرځيدنه لاندې بڼه لري

$$x(t) = c \cos(\omega t - \delta).$$

ورته يا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\operatorname{Re} c \exp(i(\omega t - \delta))$$

يا

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

د $a = c \cos(\delta)$, $b = c \sin(\delta)$ سره، دا په دې معنا چې (c, δ) د قطبي (a, b) کواورديناتونه دي. پای.

د پارمتر شمير بدلون د جمعې تيورم څخه لاس ته راځ:

$$c \cos(\omega t - \delta) = c(\cos(\omega t) \cos(\delta) + \sin(\omega t) \sin \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = c \cos \delta, \quad b = c \sin \delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني ريښې يو پر بل پرېوتنه

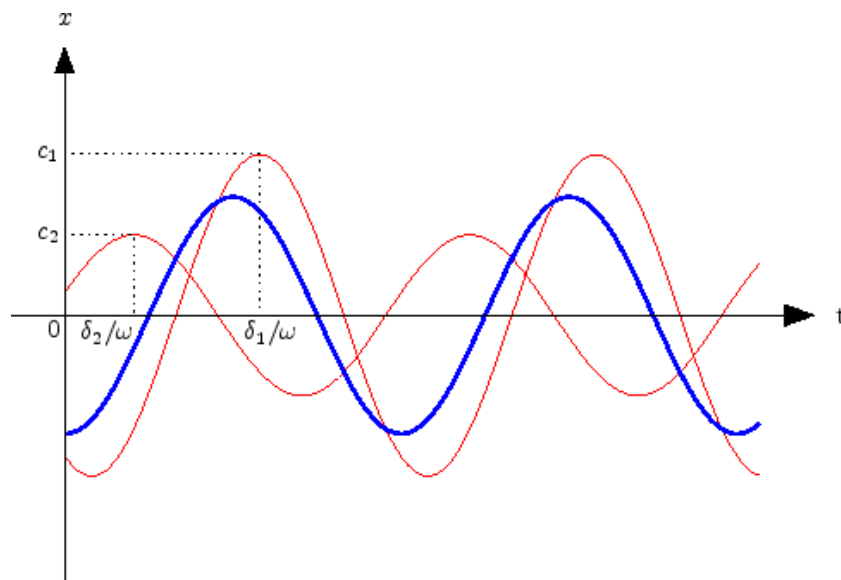
د دوه هارموني رېښو يو پر بل پړېوتنه (په څېره کې غوړ کښل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2,$$

د

امپليټوډي سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2 \cos(\delta_1 - \delta_2) c_1 c_2 + c_2^2}.$$



ليکونکي: هيوليگ، کوپف، کنش

د يو پر بل پړېوتني کمپلکس بڼه

$$\operatorname{Re}(c_1 e^{i\omega t - \delta_1} + c_2 e^{i\omega t - \delta_2}) = \operatorname{Re}([c_1 e^{-i\delta_1} + c_2 e^{-i\delta_2}] e^{i\omega t})$$

راکوي

$$[\dots] = c e^{-i\delta} = z$$

او له دې سره

$$c^2 = z \bar{z} = (c_1 e^{-i\delta_1} + c_2 e^{-i\delta_2})(c_1 e^{i\delta_1} + c_2 e^{i\delta_2}).$$

$$e^{is} + e^{-is} = 2 \cos s$$

د په پام کې نیولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..
په بدیله ت وگه کېدی شي امپليټود انځوروني

سرلیک

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

څخه وشمېرل شي. سړی لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

په درځ یا مټه باندې کړولو هارموني لړځېدنه یو په بل پړېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta, \quad k = 0, \dots, n,$$

د برابر یا همغه فرکونځ او امپلیتود. لړځېدنه د کمپلکس انځورونې په مرسته د دې لاندې حقیقي برخې په حیث لاس ته راځي

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} + e^{i(\omega t - \delta)} + \dots + e^{i(\omega t - n\delta)} &= e^{i\omega t} \frac{1 - (e^{-i\delta})^{n+1}}{1 - e^{-i\delta}} \\ &= e^{i\omega t} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\delta} (2i \sin \frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-i\frac{\delta}{2}} (2i \sin \frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}\delta}{\sin \frac{\delta}{2}} \right) e^{i(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}. \end{aligned}$$

یو په بل پړېوتنه لاندې امپلیتود لري

$$\frac{\sin \frac{n+1}{2}\delta}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

$$(n/2)\delta$$

او فاز

د $\omega = 0$ سره د ایماجیناربرځي د پرتله کونې له لارې تریگونمتریکي کټمټوالی راځي.

$$\sin \delta + \dots + \sin n\delta = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\delta \sin \frac{n}{2}\delta}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د دوه لږځېدنو $c_k e^{i\omega_k t}$ یو پر بل پربوټنه کېدی شي د

$$c(t)e^{i\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1 e^{-i\Delta\omega t} + c_2 e^{i\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ او $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ سره ولیکل شي.

لاس ته راغلی داسې په نامه مودولیري رپېښه ټیک هلته پریودیکی ده، که د فرکونځ

نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.

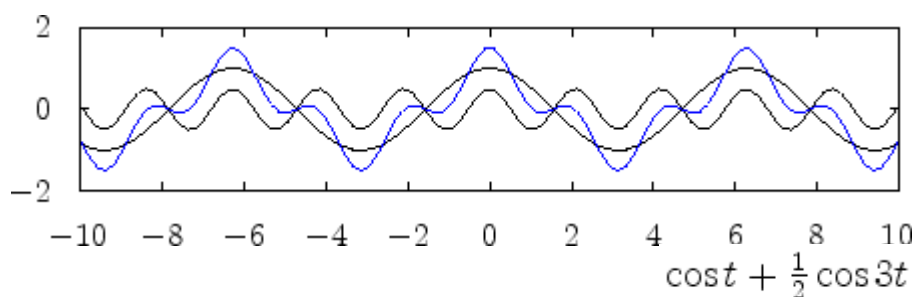
د مودولي شوی کمپلکس امپلیتود مینیمال او ماکسیمال ارزښت همداسې مطلق ارزښت

د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لوړ ټیټ کیږي. په ځانگړې توگه دی

$$c(t) = 2c \cos(\Delta\omega t)$$

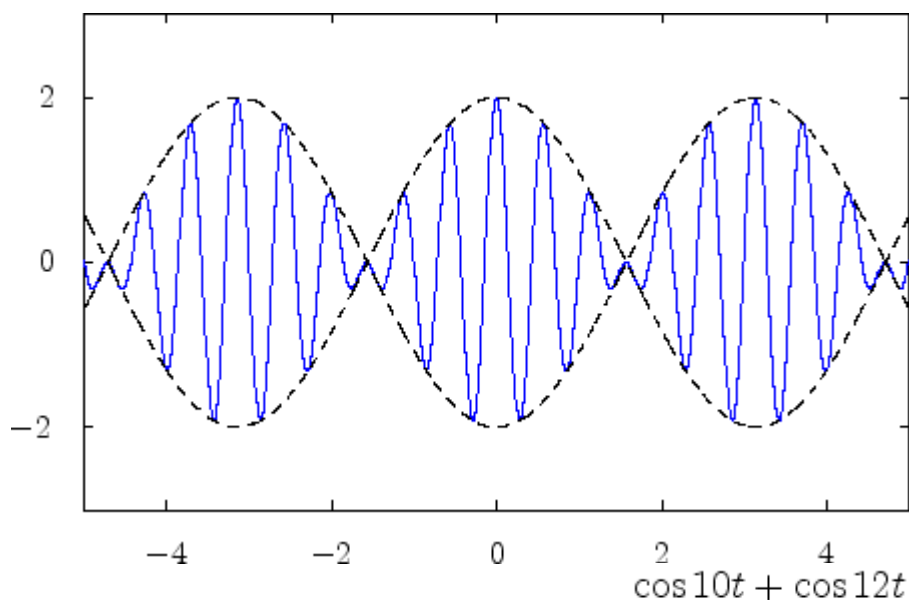
د همغې یا برابرې امپلیتود $c = c_1 = c_2$ لپاره.
لاندې څیرې یو څو بیپیکي حالتونه په گوته کوي

• periodische Überlagerung پریودیکی یو پر بل پربوټنه

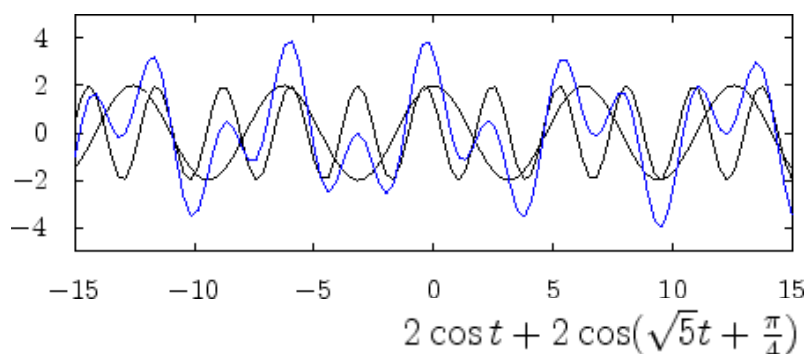


• برابر امپلیتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$

سرلیک



• aperiodische Überlagerung اپریوډیکي یا نه - یو پر بل پر پوټنه

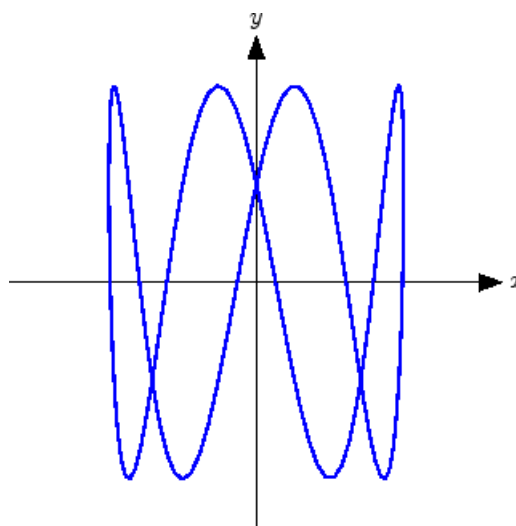


پای.

د سټي لړځېدنو یو پر بل پر پوټني د لړځېدنو مختلف لورو
کړې یا منځني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2),$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figureن لیساجوس - څیرې بللکیري.



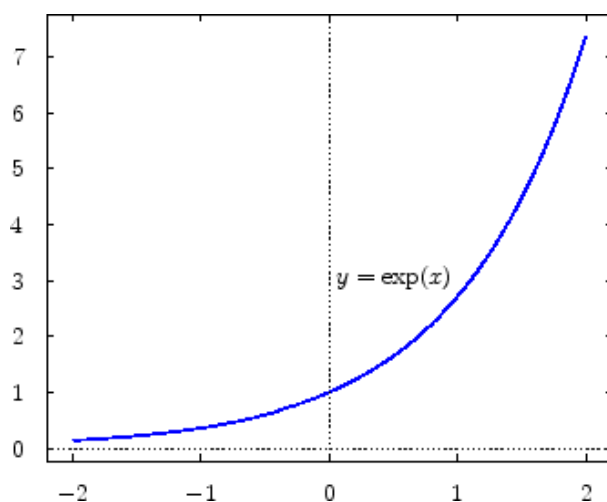
څېره د پارامتر يوه بېلگه ښايي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 = 1, \quad \delta_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}.$$

پای.

اکسپوننشل توابع

Exponentialfunktion



توان تابع

سرلیک

$$y = e^x = \exp(x)$$

$$x \in \mathbb{R}$$

د اوپلر عدد $e = 2.71828\dots$ سره اکسپوننشل تابع بلل کيږي. دا د ټول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

$$e^{-x} = 1/e^x$$

په ځانگړې توگه

گټه يا ربح Verzinsung

يو بيل بډايی د - وارهد اخستني همداسي او ورکوني وروسته د يوې گټوې Rate r ($r > 0$ همداسي) د يوې گټوني فاکتور $(1+p)$ سره لاندې پای بډايی ورکوي

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r.$$

دلته $p = 100\%$ د يو گټه ايښوونه ده په کلنۍ گټه ا چوني سره.

فعاله کلنۍ گټه د مياشتنۍ گټوني څخه شمېرل کيږي د يوه گټي ايښوني p_m سره و لاندې ته

$$p_j = (1 + p_m)^{12} - 1 \geq 12p_m.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

بنسټ بډايی په همدې لومړني گټوني پريود کې په پام کې نيول کيږي، اخستنه همداسي اچونه لومړی د ورپسې کال. په لاندې توگه يا د اسي راکوي

$$n = 1: y = x(1+p) + r,$$

$$n = 2: y = (x(1+p) + r)(1+p) + r.$$

په ټولېزه توگه باور لري

$$y = (\dots (x(1+p) + r)(1+p) + r) \dots$$

$$= x(1+p)^n + \left[1 + (1+p) + (1+p)^2 + \dots + (1+p)^{n-1} \right] r$$

دا په ګوډیزو نوکانو کې افاده کېدې شي په هندسي جمعه قرمول وړوي او سړی دا ورکړ شوی قرمول لاس ته راوړي. پای.

د منهتان خرڅول 1626 زک مورګن (د ځمکې د کوچني یوون یا واحد دی) 11000 Morgen د یوه حاضر قیمت په رانیولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنۍ 7 په سلو کې ګټه دا بډایي په کال 2000 زک کې

$$y = 60 \text{ NLG} \cdot (1.07)^{374} = 5.857 \cdot 10^{12} \text{ NLG} (\hat{=} 2.658 \cdot 10^{12} \text{ EUR})$$

ده) که متمن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نیول شوی یا فرض شوی). په میاشتني ګټه لرو

$$y = 60 \text{ NLG} \cdot (1 + 7/1200)^{4488} = 13.030 \cdot 10^{12} \text{ NLG} (\hat{=} 5.913 \cdot 10^{12} \text{ EUR})$$

او

$$y = 60 \text{ NLG} \cdot \exp(0.07 \cdot 374) = 14.060 \cdot 10^{12} \text{ NLG} (\hat{=} 6.380 \cdot 10^{12} \text{ EUR})$$

د ټوليزې ګټونې سره.

که مورګن د 0.81 Ha هکتار سره وشمېرل شي، نو د منهتان دا نننۍ سطحه د 89 مربع کیلو متره ورکوي. یو کور هلته نن نږدې 6500 USD/Quadratmeter امریکایي ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پیسې به د یوه کور تعمیر لپاره چې څلور پوړیز وي ورسیري، چې په ټوله سطحه ونیسي. پای.

د یوه $x = 200000$ یورو پور ، $n = 30$ کلونو لپاره او یوې کره شوې ګټې پېښې $p = 5$

په سلو کې میاشتني ګټه لاندې ده

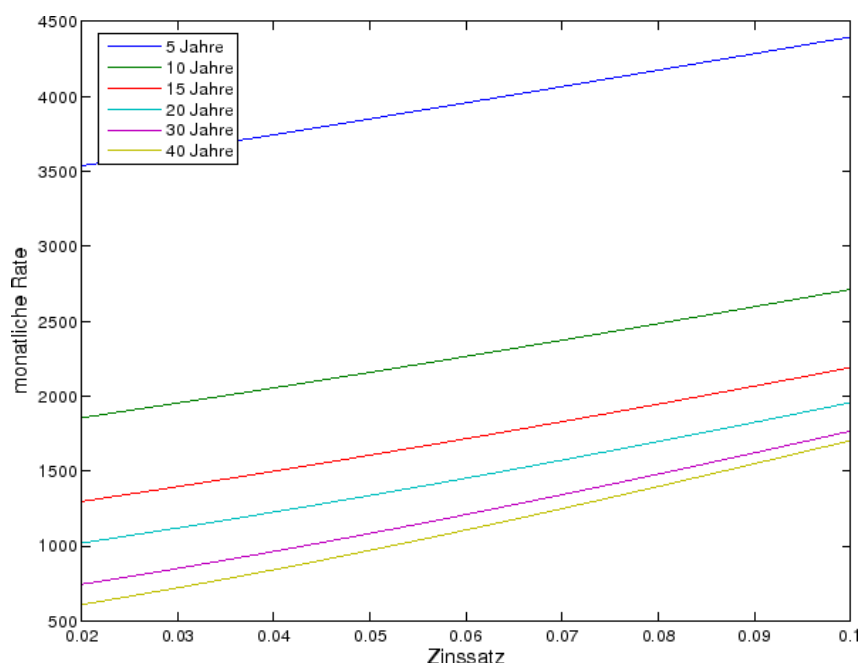
$$p_m = (1 + p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

او میاشتنی رات یا گټه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} x = 1060.11 \text{ EUR.}$$

د لاندې پسې تړلي له گټې فرمول څخه د صفر ایشوونې له لارې د پور ارزښت راکوي او د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نیولو سره.

ټوله تادیه $30 \cdot 12r = 381639.60$ یورو د پور جمعې څخه د په 90.8 په سلو کې اوږي (د بانک مزدوري پرې زیاته).



پروت: گټونه یا د گټې پښه ، ولاړ: میاشتنی گټه
 گراف میاشتنی گټه ښایي د یوه 200 000 یورو پور لپاره د گټې پښې د ضریب په څېر
 د مختلفو وختونو لپاره.
 پای.

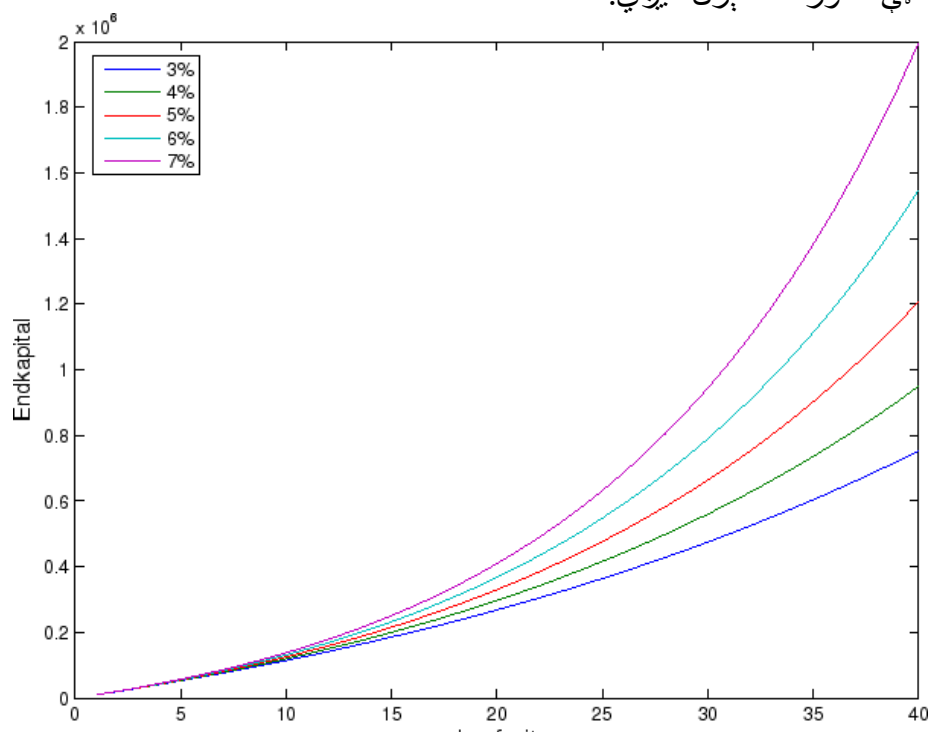
کلنې د پیسو ورکونه $z = 10000$ یور د یوې 7 په سلو کې گټونې ته د
 $n = 12$ کلونو وروسته یوه دا لاندې ښایي ورکوي

$$y = \frac{(1 + p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000 \text{ EUR} = 178884.51 \text{ EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې یوه میاشتني تفاوت ته بسيا کوي

$$r = \frac{p_m (1 + p_j)^{10}}{(1 + p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51 \text{ EUR} = 2057.17 \text{ EUR},$$

چې د هیپوټیکي (د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken کټي ته ورته شمېرل کیږي.

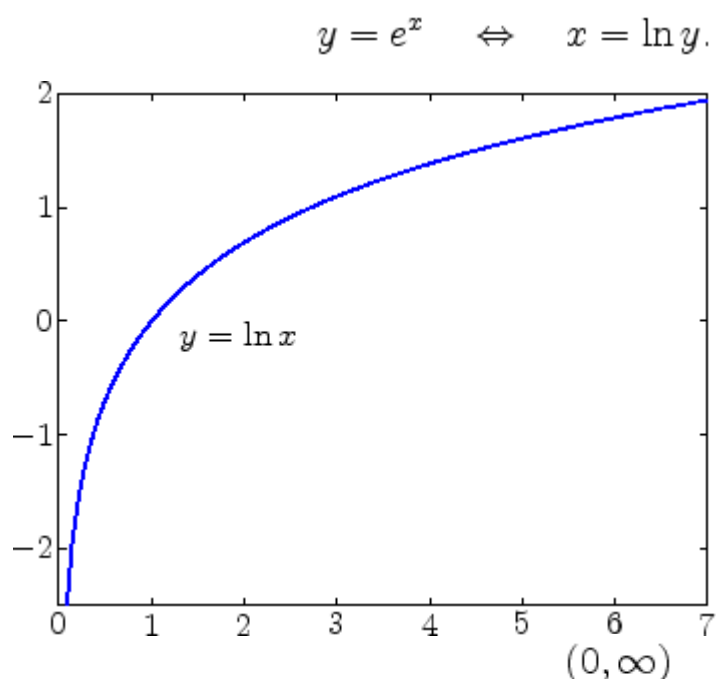


پروت: وخت ، ولاړ: پای سرمایه
خپره د مختلفو گټونو لپاره د یوې سرمایې وده ښايي د وخت تېرېدو سره . پای.

لوگاریتم Logarithmus

د لوگارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

سرلیک



دا کره مونوتونن جگېدونکې په $\mathbb{R}$ تنظيموي او لاندې تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانگړې توگه دی . $\ln(1/x) = -\ln x$. پای.

د یوې مادې رادیواکتیو له منځه تلنه (په زراتو تجزیه کېدنه) د زره کیدني قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشریح کیږي. دلته $N(t)$ د اتمونو گڼون یا تعداد دی د t په وخت کې

$$k > 0$$

او یوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابت ده.

$$N(T) = \frac{1}{2}N(0)$$

، داپه دې معنا چې

د نیم ارزښت وخت T داسې تعریف دی

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

د چرنوبل د ریکتور د ډز یا الوتې سره یو ه ډینگری یا خولې یا مرخبری په ځنو برخو کې Cäsium-137 د 2000 Bq/kg د رادیواکتیویټی د فعالیت د کچونې لپاره یوون دی) سره د نیمارزبست وخت 29.7 کلونو په وړانگو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000 \exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزبست 600 Bq/kg کې پروت دی. د

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزبست د ورکړشو ارزبستونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کېنټه – یا کمیري.

نیم وخت ارزبست :

Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

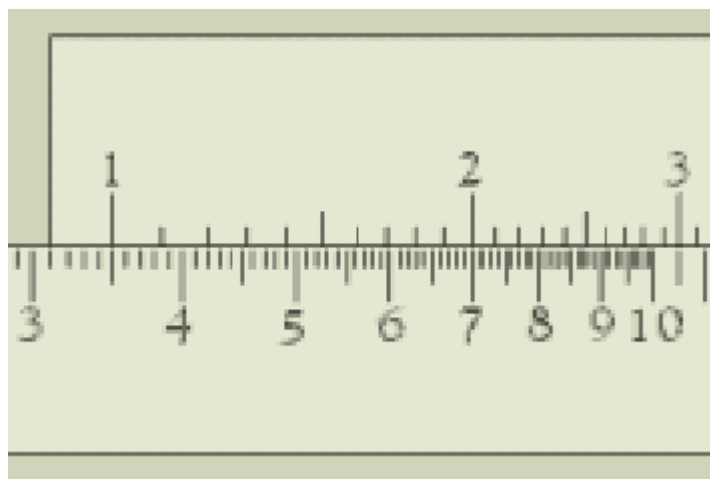
پای.

سرلیک

لوگاریتم دا خوی لري، چي د دوه گڼونو یا عددونو د لوگاریتمونو جمعه د دي د دي دوه عددونو د ضرب د لوگاریتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دي توگه کېدی شي چي دوه کرښي (خط کشونه) د لوگاریتم کچوونو سره یو په بل کېږدي او لاس ته راوړنه د دې عددونو جمعه نه بلکه ضرب دی. (د شمېرکښوونې (چي یوې او بلې لورته کښیږي) اصول)



د پورته څېرې څخه د بېلگې په توگه گورو چي $3.5 \cdot 2 = 7$ دی. دلته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) کېښول کېږي. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کېږي.

پای.

ټولیز توان توابع او لوگاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو

$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

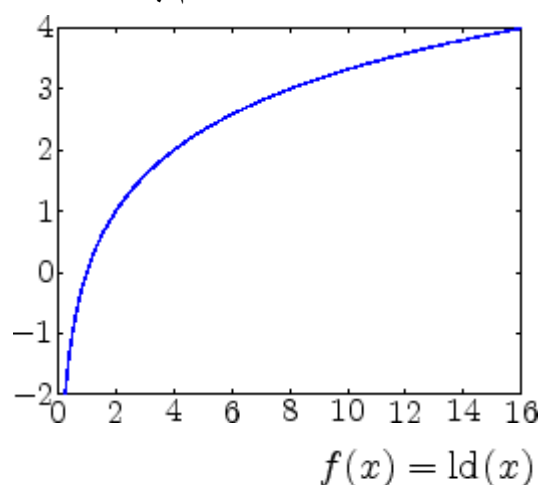
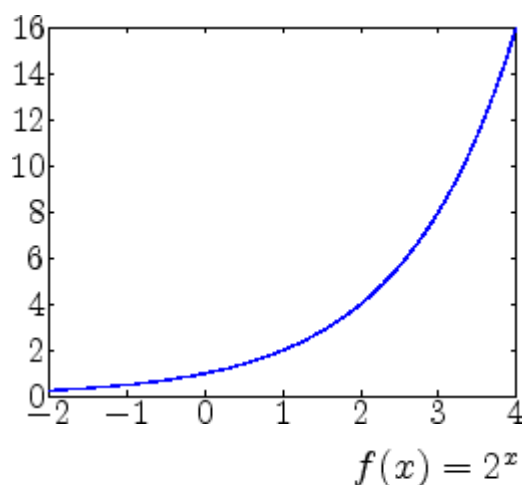
د معکوس یا په څنډ تابع سره

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

$$\log = \log_{10}$$

په ځانګړې توګه سری لیکي د لوګاریتم لپاره د 10 بنسټ سره او

$\text{ld} = \log_2$ د دوال لوګاریتم لپاره.



د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

کیدۍ شي نیم لوګاریتمي دکنبل شي. دلته په یوه محور x او په بل محور $\log y$ لیکل

کیري. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښیز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړالۍ لري

$$m = \log a.$$

یو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو یو لوګاریتمي سکالا وکاروو. دا د بېلګې په توګه د ناتیګاوي ارزښت لپاره

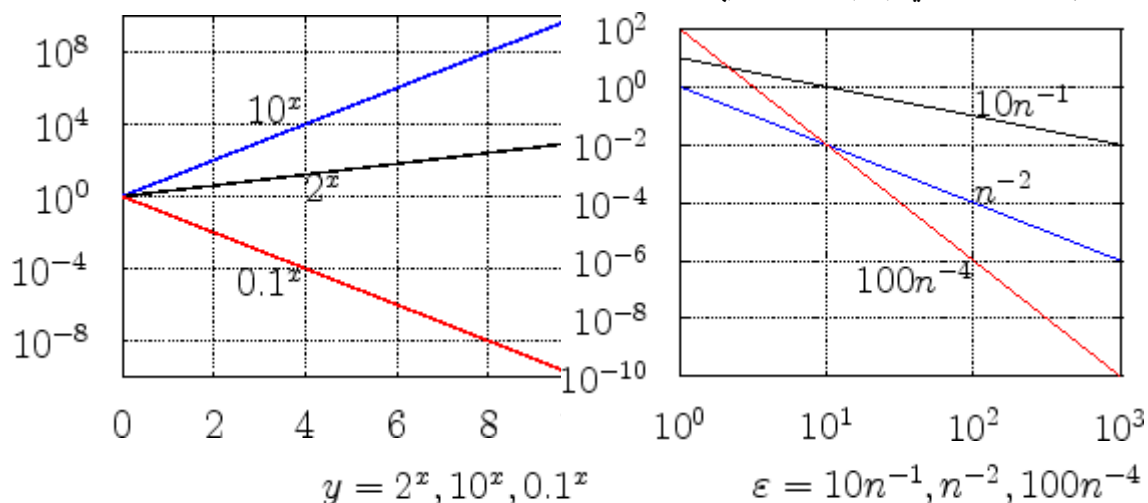
$$\varepsilon \approx cn^{-k}$$

مناسب ده. دا چې

سرلیک

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n,$$

د کړې کمیز یا منفي چگېدنه ورکوي.



د توان او لوگاریتم لپاره شمیرقوانین

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوگاریتمي توابعو د تعریف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s / a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېرېدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \log_a x.$$

په ځانگړې توگه دی

$$\log x = (\log e) \ln x.$$

لیکونکي: هیولیک، کنوپف

که کیردو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

نو د توان او لوگاریتم د فرمولونو ورته وال یا برابر ارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کټمټوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دریم له تعریف $b^r = e^{r \ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s \ln a})^t = e^{st \ln a} = a^{st}.$$

د شمېیدلون فرمول برابر ارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \log_a x},$$

او د ساده ونې له لارې ښی اړخ لاس ته راځي. لیکونکي: هیولیگ، کنوف

لاندې دواړه بېلډشمېقوانین تشریح کوي یا په گوته کوي.

(i)

$$\ln(x^2) - 2 \ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2 \ln 2 = 2 \ln 2 + 2 \ln x - 2 \ln 2 = 2 \ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) + \text{ld}$$

$$(2x) = 2 \frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2 \frac{\ln x}{\ln 2}$$

های پرابول تابع Hyperbelfunktionen

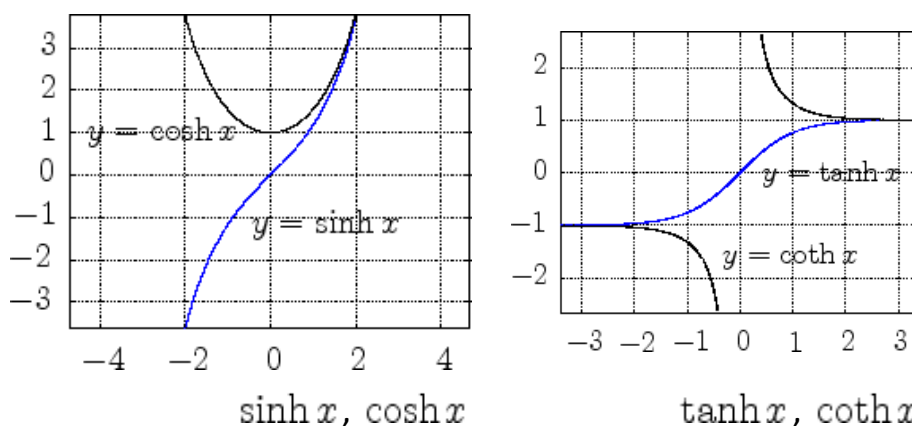
تریگونومتريکي توابعو ته ورته تعريفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

همداسې

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1 / \coth x.$$

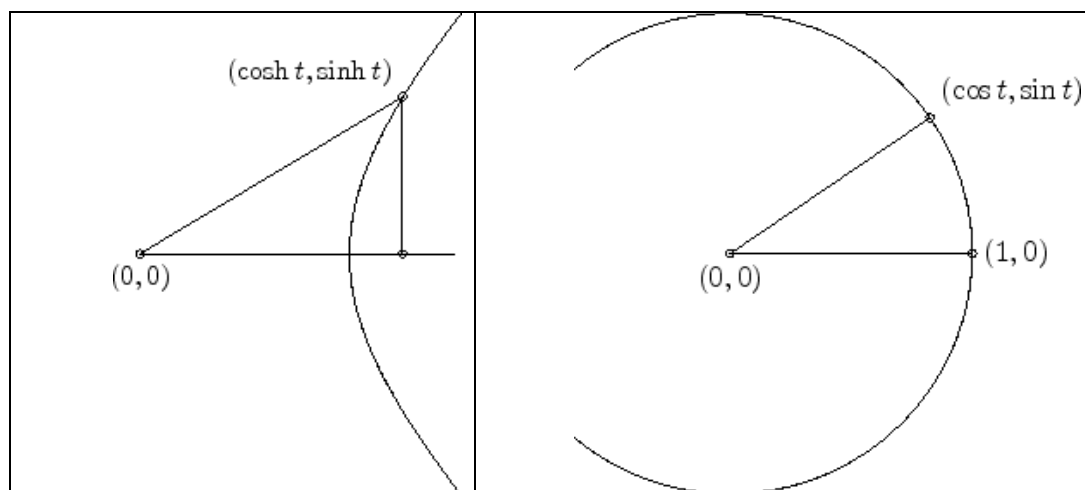
سرلیک



معکوس یا په خټ توابع اکسپلیټ یا په روښانه توګه ورکول کیږي:

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & -\infty < x < \infty \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & 1 \leq x < \infty.\end{aligned}$$

د هاپربول تابع نوم د لاندې کټمټوالي څخه رانیول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هاپربول یو ښاخ پارامټري کیږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ څخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

د مربع مساوات دویم حل د $e^x > 0$ له امله باید په پام کې ونه نیول شي. د لوگاریتمی کوني څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

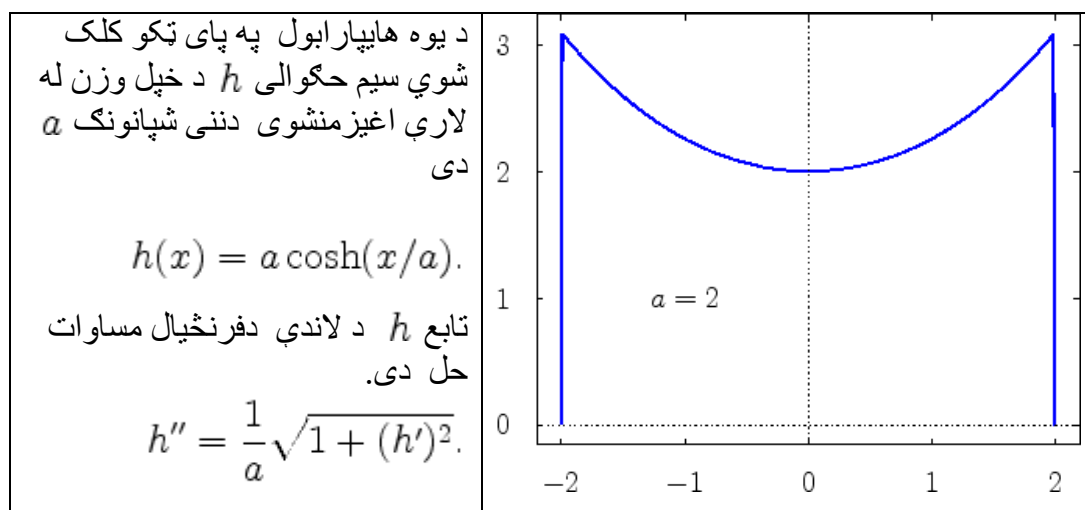
د کوساین هوپربولیک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس تره اځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

د لوگاریتم کوني له لارې د په څنډ- یا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي. لیکونکي: هیولیګ، کنوېف



هایپارابولیکي کټمټوټوالی Hyperbolische Identitäten

تریګونومتریکی توابعو ته ورته کټمټوټوالی باور لري

سرلیک

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

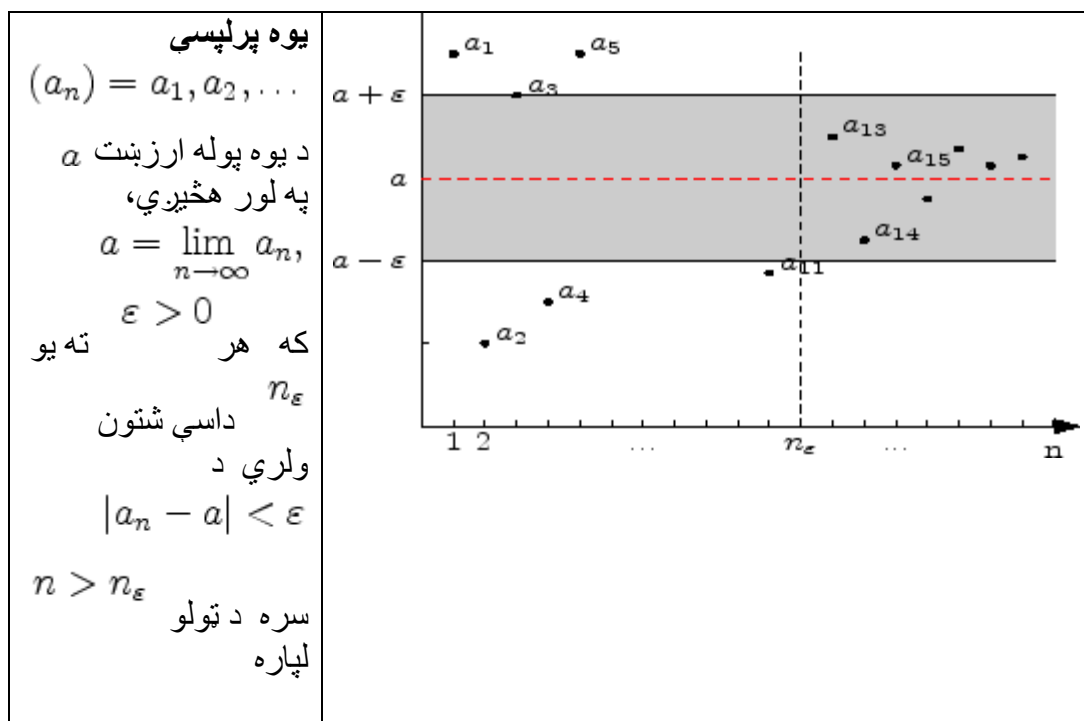
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

چې د تعريفونو له لارې کېدی شي نازک شي

د یوې پرلپسې (ترادف) پوله ارزښت

Grenzwert einer Folge



دا $a_n \rightarrow a$ لیکدود هم د یوې پرلپسې د کونورگنټ یا پولې ته ټلو لپاره کارول کیږي .

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسې دیورگنت یا پولې ته نه تلونکې بللکيږي. پای.

د دې لپاره چې د کونورگنت-قضیه وښایو یعنې

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{د} \quad n > n_\varepsilon \quad \text{لپاره}$$

وښایو، کیدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمین کونې له لارې پورته لور ته ساده کړو او بیا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بیلگې په توګه د لاندې پرلپسې لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، یو ممکنه تخمین دی

$$|a_n - a| = \left| \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} - 1 \right| = \left| \frac{n - 1}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^2 + 1},$$

دا چې $|n - 1| \leq n$ د ټولو $n \geq 0$ لپاره. پرته له دې $n^2 + 1 > n^2$ دی او له

دې سره $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$ هم. نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \leq \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، باید $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε یو طبیعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي، وټاکو، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

سرلیک

پرلېسي

$$1, q, q^2, \dots$$

د $|q| < 1$ لپاره یو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ یا $q = -1$ لپاره دیورگنت دی

د پرلېسيو د پوله ارزښت شمیرني لارې

Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلېسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) &= a \pm b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= ab \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) &= a/b \quad b \neq 0 \\ &\text{, falls} \\ &\text{لیکونکی: اېپ، هیولیگ} \end{aligned}$$

زیاتون او کمښت یا کمون: د درېگودي نابرابرون څخه لاس ته راځي

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \rightarrow 0.$$

ضرب یا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \rightarrow 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| \leq \text{const} |b_n - b| \rightarrow 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \rightarrow 1/b$ د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسېو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

$$a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$$

که دپرلپسېو توکي د n راشنل تابع وي، نو کیدی شي پوله ارزښت د خورا جگ توان د لنډوني څخه پیدا کړی شو. د بیلگې په توگه دی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3}.$$

په ټولیزه توگه د صورت-درجي j او مخرج-درجي k لپاره باور لري

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي يعنې دیورگنت ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

سرلیک

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 1)^n}{n^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e \cdot \frac{1}{e} = 1. \end{aligned}$$

په پام کې نیسو، چې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^n = 1,$$

ځکه چې د ضرب د ضریبونو ګڼون یا تعداد ثابت نه دی.
لیکونکی: هیولیک، کرایڅ

د کوشي قضیه Cauchy-Kriterium

یوه پرلپسې (a_n) ټیک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

$$j, k > n_\varepsilon$$

د ټول لپاره باور ولري.

د کوشي په نوم نومول شوي قضیې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پېژندلو ممکن دی.

لیکونکی: ایپ، هیولیک

د کوشي – قضیې ارینوالی د پوله ارزښت له تعریف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_\varepsilon$$

که کیردو $n_\varepsilon = m_\varepsilon/2$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \leq |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چې د بنوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و یې ښایو، او دا د حقیقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

یوه رکورزیو تعرف شوې پرلپسې (a_n) کېدی شي زیات وخت د کوشي-قضیه د تخمینونو له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \leq cq^n$$

د $q \in [0, 1)$ سره یې ټیکوالی و ازمایل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د لپاره راګوي

$$|a_j - a_k| \leq |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \dots + |a_{k-1} - a_k| \leq cq^j (1 + q + q^2 + \dots) \leq \frac{cq^j}{1 - q}.$$

ښی اړخ د $\varepsilon <$ لپاره ده د $j, k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضیه پوره ده. د څرګند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزیو تعریف شوې پرلپسې a_n د کونورګنځ قضیې د ثبوت لپاره استعمالوي

سرلیک

د ایندکشن پیل: $(n = 1)$: نامساوات

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښودل شي.د ایندکشن پای $(n \rightarrow n + 1)$: شری اټکل شوی کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}| = \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}} \right|.$$

په ښه ښیي.

د اندکشن د نیونې له مخې ښی اړخ $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}cq^n$ دی او د ټاکنې سره

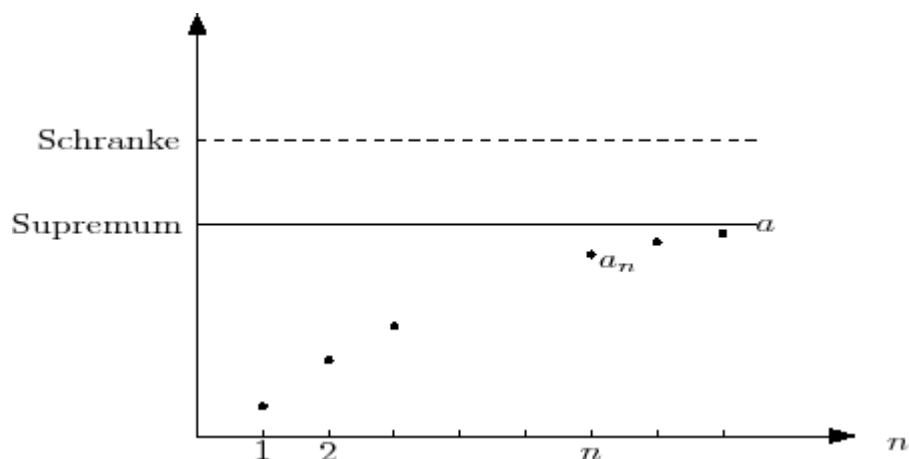
$$q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$$

لکه چې غوښتل مو.

پای.

یو غبریزه پولې ته تلنه Monotone Konvergenz

یو پرلپسې (a_n) همغریز جگېدونکې $a_{n+1} \geq a_n$ همداسې همغریزټیټېدونکې $a_{n+1} \leq a_n$ بلل کېږي، که همداسې وي د ټولو n لپاره. دا کره همغریزجگېدونکې همداسې کره همغریز ټیټېدونکې بلل کېږي، که $a_{n+1} > a_n$ همداسې $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.



يوه رابنده يا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغريز جگېدونکي يا ټيټېدونکي
 پرلپسې (a_n) پولي ته تلونکي ده. پوله ارزښت يې د پرلپسې توکو .
 a_n , $n > n_0$ سوپریموم همداسې اینفیموم دی.

لیکونکی: اېپ، هیولیک

د یوې مونوتون جگېدونکې پرلپسې لپاره د سوپریموم د تعریف سره، چې د ټولو
 $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون لريو د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n > n_0} a_n$$

د همغريزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a, \quad n > n_\varepsilon, \quad \text{für } a_n \rightarrow a.$$

د مونوتون ټيټېدونکې پرلپسې لپاره په ورته توګه دلایل راوړل کېږي.

د پرلپسې پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1 + 1/n)^n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

د اوپلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورگنت جملې په بنسټ و ښوول شي. دواړه وړاندښوني (فرضيې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابندیدنه یا محدودیت: له

$$a_n = (1 + 1/n)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \leq \frac{n^k}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

لاس ته راځي

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \leq 3$$

(ii) همغږیزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1} \frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2} \frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3} \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$$

که دا په (i) کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \frac{1}{n^k} \\ &\leq \frac{(n+1) \cdot n \cdots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdots k} \frac{1}{(n+1)^k} = \end{aligned}$$

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د یوگونو ضریبونو لپاره. دا چې د a_{n+1} لپاره زیاتون یا جمعه لا تر

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \\ \text{لري لاس ته راځي} \\ a_n < a_{n+1}.$$

ناربېنتونی پوله ارزښت Uneigentliche Grenzwerte

یوه پرلپسې (a_n) دا ناربېنتونی پوله ارزښت $(-\infty)$ لري، که د ټولو $a > 0$

لپاره یو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \quad (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسې چې ناربېنتونی پوله ارزښت لري، دا ټاکلې دیورگنت یا پولې ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کیږي. لیکونکي: ایپ، هیولیگ، ویپیر

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \rightarrow \infty,$$

دا په دې معنا چې

د $\frac{n!}{2^n} > a$ ، د $n > n_a$ لپاره، دا a_n سری د یوې ساده افادې یا ویښې له لارې کښته لور ته تخمینوي:

سرلیک

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}.$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

پوله اینفریور او پوله سوپریور (کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superior

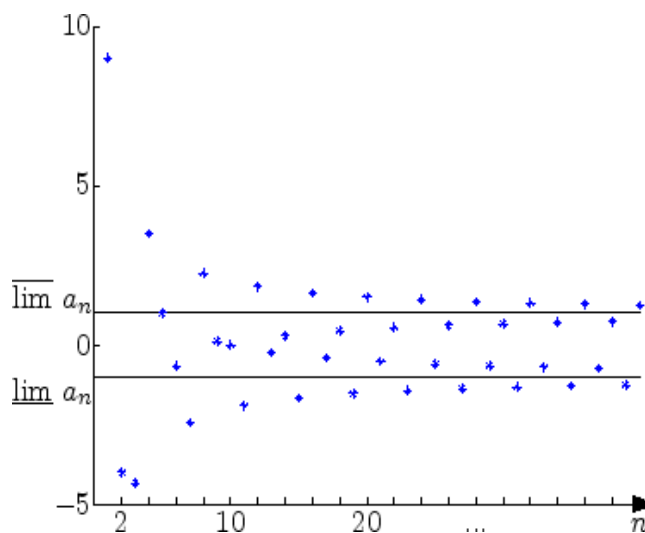
د هرې پرلپسې (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې $\text{uneigentlichen Sinn}$ ، یو پوله ارزښت شتون لري.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n}, \underline{a_n} = \inf_{k \geq n} a_k$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n}, \overline{a_n} = \sup_{k \geq n} a_k$$



لکه په څیره کې چې شول شوی دی، پرلپسې (a_n) د همغږیزې پرلپسې $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لارې یا نوره هم ښه له لورې رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور یو په بل پریوخی، نو پرلپسې (a_n) پولي ته تلونکې ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

لیکونکي: اپې، هیولیگ

د پولي اینفریور او پولي سوپریور شتون د همغږیز پولي ته تلنې جملې له لارې ترلې لاس ته راځي، ځکه چې پرلپسې

$$\underline{a}_n = \inf_{k \geq n} a_k , \quad \overline{a}_n = \sup_{k \geq n} a_k$$

همغږیز جگیدونکي همداسې همغږیز ټیټیدونکي دي.

په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n .$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور همغه ازبنت a ولري، نو لاسته راځي

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$$a_n \rightarrow a \quad n > n_\varepsilon \quad \text{د لپاره، نو}$$

پرتله کونکي قضیه Vergleichskriterium

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچنې n لپاره

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{باور لري، نو دی}$$

$$a \leq \underline{\lim} b_n \leq \overline{\lim} b_n \leq c .$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسې (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a = c .$$

سرلیک

لومړۍ غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\leq$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پټیږي:

$$\inf_{k \geq n} a_n \leq \inf_{k \geq n} b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n.$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim} b_n \leq c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \rightarrow a$. پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلي قضیې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

دلته بنی نابرابرون د بینوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \leq n \leq 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \dots$$

په ټولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^k = 1$$

$k \in \mathbb{N}$

د لپاره . د کم نظم ترمونو د په زیاتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتېږي. د یوه پولینوم

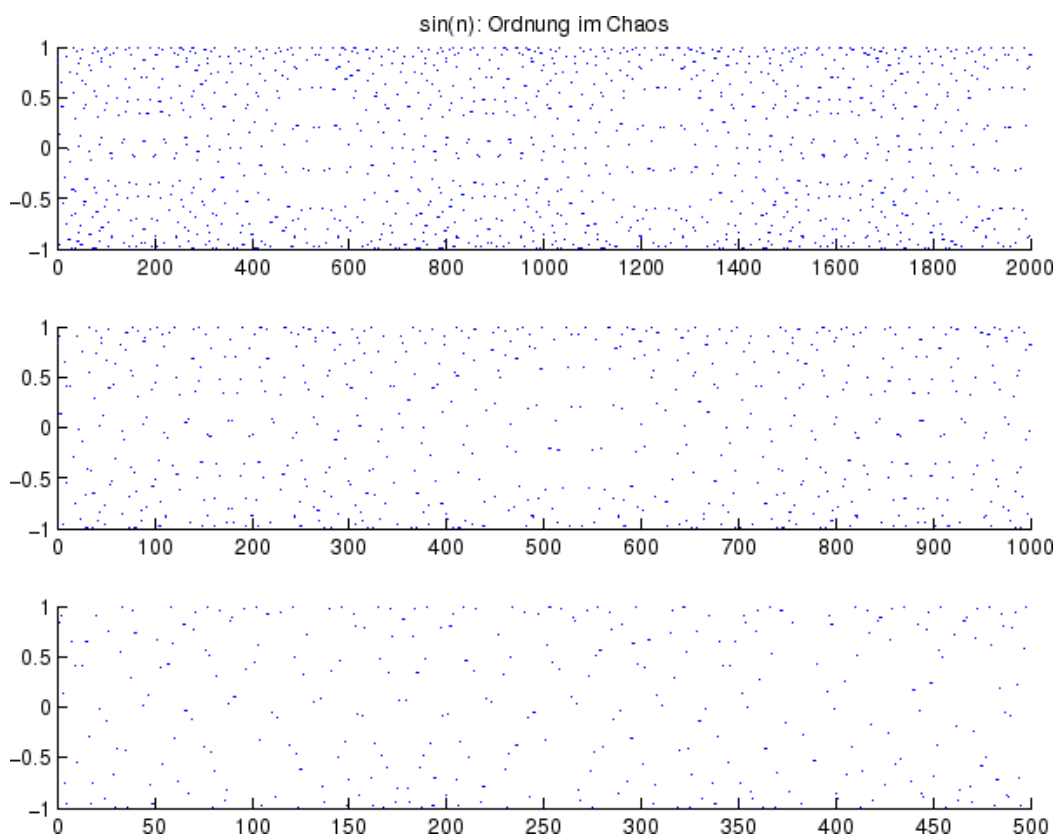
$$p(n) = a_k n^k + \dots + a_0, \quad a_k > 0$$

لپاره هم $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

د یوې پرلپسې بندغالي ټکۍ Häufungspunkt einer Folge

یوه پرلپسې (a_n) بندغالي ټکۍ a لري، که هر انټروال $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ $\varepsilon > 0$ ، دې ته ورته د یوې برخه پرلپسې باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه یو پوله ارزښت د پرلپسې بندغالي ټکۍ هم دی.

څیره پرلپسې $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ ښايي.



سری په نږدې توګه د پرلپسې یا ترادف توکو a_n برابرېشنه په انټروال $[-1, 1]$ کې پیژني. په ریښتوني ښول کېدای شي، چې په $[-1, 1]$ کې هر ټکۍ د پرلپسې بندغالي ټکۍ دی.

سرليک

د یوې پرلپسې یا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره باید کونورگنت برخه پرلپسې و پیژندل شي. د بیلگې لپاره

هغه دا دي

$$a_n = \frac{n \sin(n \frac{\pi}{2})}{n + \sin(n \frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پندغالي ټکي لاس ته راځي

$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ور هوولست - یا فر هوولست- مودل **Verhulst-Modell**Pierre-François **Verhulst** [vər'hʏlst] : یو بیلجیمي شمیرپوه وو

(* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15.

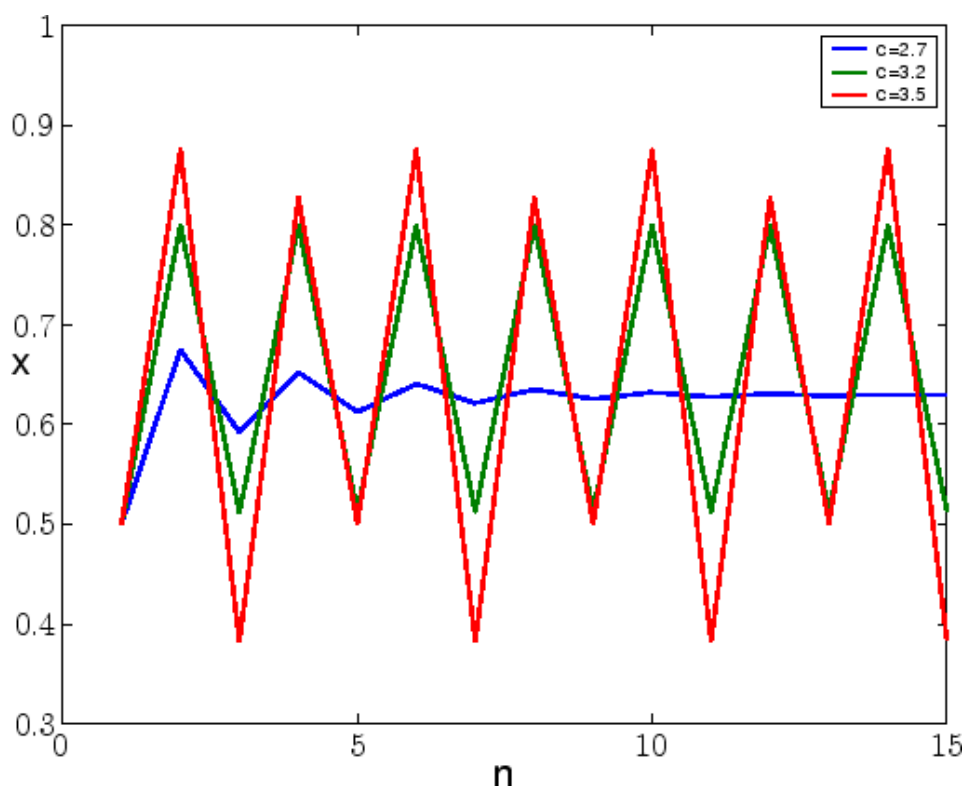
Februar 1849 ebenda)

ریکورژن (په خټ خُغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پیژندل لري یا تعریفیږي

$$x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$$

د $c \in (0, 4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګڼوالي x_n وده په ګوته کوي. یو څو تیوپیګي بیلګې دا لاندې څیره ښايي



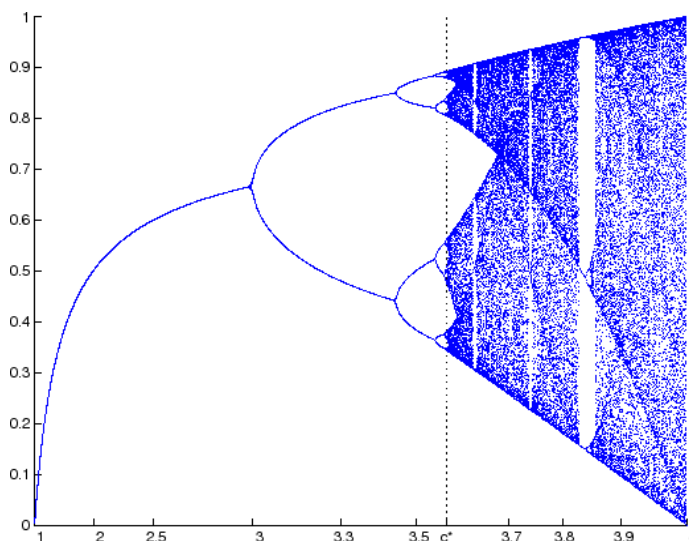
د $c \leq 3$ لپاره x_n د $n \rightarrow \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c}.$$

د $c > 3$ لپاره سری اوسځلیشن کوري. که پارامتر تل لوی شي، نو د پندغالي -

ټکو x_* ګڼون یا تعداد دوه برابره کيږي د افاط پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوبښتلو باندې یعنې له دې نور زیاتیدلو باندې. دا په لاندې څیره کې کښل شوی دی، په کوم کې چې د x_* ټکي د c -محور پورته لور ته ځای په ځای شوي دي.

سرلیک



پوله ارزښت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166 \dots$$

داسې په نامه د انځورونې ثابته ده، چې دا زیات وخت د څانگو کولو پرابلم کې رول لوبوي.

له پورته څیرې څخه روښانه کیږي، چې ایټیشن د

$$c > c^* = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

لپاره یو ګډوډیز chaotisches Verhalten حالت ښايي

د پی **Pi** رګورزیو اپروکسیمیشن

Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نیم اوږدوالی چې د یوې یوونګردۍ یا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$ -ګډونو یا کونجونو په باندې او په کې یعنې په دننه اوډباندې لاندې ریکورژن پوره کړي

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}, \quad a_0 = 2\sqrt{3}, \quad b_0 = 3,$$

د... $\pi = 3.1415926535897932$ په مرسته اېروکسيمي کیدی شي.
 دا فرمول د یوهان فریدرینس پفاف (Johann Friedrich Pfaff (1765-1825 له خوا
 په 1800 زک کال میندل شوی.
 ارینیمیدس (Archimedes (287-212 v. Chr. د 96-گوډونو ($n = 4$) او اټکل
 یا تخمین سره اړیکې

$$3.140845 \dots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857 \dots$$

ومیندلي یا ترې لاس ته راوړي.

د گردۍ گڼ یا عدد π له د یو میلیارد ځایونو ډېر شمیرل شوی دی. لاندې جدول د
 تاریخي ودې څخه یوه کاپي راکوي:.

Wert	korr. Stellen	Jahr	Autor Bibel (1. Könige 7:23)
------	---------------	------	------------------------------------

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	$3 + 1/8$
Archimedes	250	v. Chr.	3	$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

سرلیک

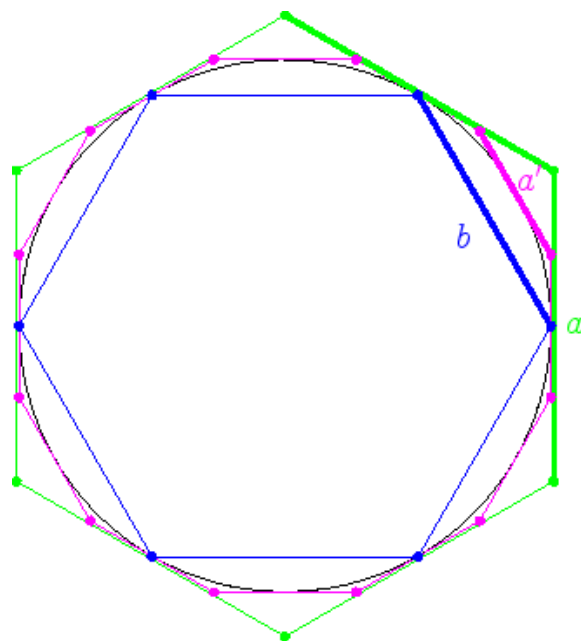
Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

پای.

د ج.ف. پفاف ریکورزیون په ساده هندسي پامکوني باندې ولاړ دی

د وړانګې (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b}.$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډېرګوډي نیم د اړخونوګنون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$\begin{aligned} a_n = k_n a, b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} &= k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b} \\ &= 2 \frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}. \end{aligned}$$

د b_n لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و ښوول شي. له

$$a_n = k_n 2 \tan(\pi / (2k_n)), \quad b_n = k_n 2 \sin(\pi / (2k_n))$$

سرلیک

لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4 \sin^2(\pi/(4k_n)) \\
 &= \underbrace{2k_n^2 \tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) 2k_n^2 \sin(\pi/(4k_n))}_{k_n^2 \sin(\pi/(2k_n)) = b_n} \\
 &= a_{n+1} b_n .
 \end{aligned}$$

د پرلپسټو يا ترادفونو ځانگړي پوله ارزښتونه

يو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n, q < 1$	0
$n^{-\alpha} \ln n, \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1 + 1/n)^n$	e
$(1 - 1/n)^n$	$1/e$

پای.

زیات واره کیدی شي پوله ارزښتونه وشمیرل شي، داسې چې سری د مناسب بڼه بدلون له لارې معیاري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بیلو سره روښانه کیږي. (i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سری ږدي

$$m = 2n + 3, \quad n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right)^2 \cdot \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \right)^{-6} = \\ &= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2. \end{aligned}$$

$$a_n = \binom{3n}{n} / 2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د

پوله ارزښت وشمیرو، سری لیکي

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(3n)(3n-1) \cdots (2n+1)}{n \cdot (n-1) \cdots 1} \cdot \frac{1}{2^n} = \\ &= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3-1/n}{2} \cdots \frac{2+1/n}{2} \right) \cdot \frac{n^n}{n!}. \end{aligned}$$

سرلیک

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سری داسې شمیري، چې سری د مطلق ارزښت د لویې پرلپسې توکو سره ووبشي:

د بیلگې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 + \sqrt{n+4})^2}{5n + \ln n}$$

که غواړو وشمیرو، نو مات یا کسر په لاندې بڼه لیکو

$$\frac{9 + 3\sqrt{n+4} + n + 4}{5n + \ln n} = \frac{13/n + 6\sqrt{1/n + 4/n^2} + 1}{5 + (\ln n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln n)/n$ د صفر پهلور ځی، نو پوله ارزښت دا لاندې دی

$$\frac{0 + 6 \cdot \sqrt{0} + 1}{5 + 0} = \frac{1}{5}.$$

د یوې لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) پوله ارزښت

Grenzwert einer Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

یو زیاتون یا جمعه دېپروو زیاتیدونو سره لړۍ بلل کیږي. دا د یوې پولې ارزښت

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅیږي، که ټوټه زیاتوونو یا - جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

(s_n)

پرلپسې s لور ته وهڅیږي یا کونورگنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسې پولې ته نه تلونکي یا دیورگنت بلل کیږي.

پوله ارزښت کېدی د زیاتوونو (هغه عددونه چې یو په بل زیاتیږي) د لړۍ پرلپسې په واک کې وي، همداسې اړتیا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د یوې لړۍ د پولې ته تلنې لپاره اړین (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د یوې لړۍ روښانه یا اکسپلیخیت شمېرنه ممکن ده. یوه بېلگه یې د ټاکلو لړیو ده د راشنل زیاتیدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه ونې وروسته

$$\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n + 1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

سرلیک

ښه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زیاتېدونې یو بل له منځه وړي یا پورته کوي، داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلی لوستل کېدی شي.

د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره د ټول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| = \left| \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1} \right) + \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m} \right) \right| \leq \frac{4}{n-1},$$

دا چې منځني ترمونه سره پورته کیږي یا له منځه سره وړي. ټوټه زیاتون یا —جمعه د کوشي — پرلپسې جوړوي:

$$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon} \quad |s_n - s_m| < \varepsilon$$

د لپاره

و پولي ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$\left| \frac{3}{2} - s_n \right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بیلګه دا هم ښايي، چې د زیاتوونو یا د جمعې د غړو لړۍ پرلپسې غوره یا ښه روښانه ده.

که لړۍ پرلپسې

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6} \right) + \dots, \end{aligned}$$

وټاکو، نو هر ه په نوکالانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړۍ پرلپسې دیورگنت ده.

هندسي یا ځمکچیزې لړۍ

Geometrische Reihe

ځمکچیزه لری $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ټیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي. د هندسي زیاتونفرمول سره

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وېښانه یا اکسپلیځیت وشمېرل شي:

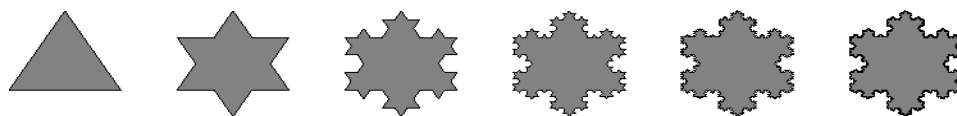
$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

د $|q| < 1$ لپاره پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکودي یا مثلث مخ ته تگ سره ژی د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه ډېری یا سټ لاس ته راځي د وتلو ژيو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوټي Koch-Schneeflocke.



$1/3$

- م د واورو پوټی $3 \cdot 4^n$ ژی لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیري، نو د دې څومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژيو گڼون یا - تعداد ضرب د ژيو اوږدوالی:

$$(3 \cdot 4^n) (3^{-n}) = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow \infty,$$

دا په دې معنا چې د ژيو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورگنت دی.

سرلیک

په n -م پل سره $3 \cdot 4^{n-1}$ برابر اړخیز درېځوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n}
 $\sqrt{3}/4 (3^{-n})^2$

او سطحي
 سطحي لپاره راكوي

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{i=1}^n \left(3 \cdot 4^{i-1} \frac{\sqrt{3}}{4} (3^{-i})^2 \right) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \frac{4^{i-1}}{9^{i-1}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9} \right)^i \right). \end{aligned}$$

دا وتلی پوله ډېری په پسي توگه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 4/9} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ Harmonische Reihe

هارموني لړۍ

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

پولي ته نه ځي يا همداسې ناتاکلی پوله ارزښت $s = \infty$ لري.
 په ټوليزه توگه لړۍ

$$s_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$$

د $\alpha \leq 1$ لپاره ډيورگنت او $\alpha > 1$ لپاره پولي ته تلونکي ده. يو څو ځانگړي
 ارزښتونه د.

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولي ته تلونکي لړۍ Absolut konvergente Reihen

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولي ته لاړ شي، نو لړۍ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولي ته تلونکي بلل کيږي.

د کونورگنت د دې قوي بني څخه لرو، چې لړۍ د زیاتوونو لړۍ پرلپسې په خوښه تغیر له امله هم کونورگنت ده یعنې پولي ته ځی.

کوښی (کوشي) – کونورگنت قضیه راکوي:

$$\exists n_{\varepsilon} : |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon \quad m, n > n_{\varepsilon} \quad \text{für}$$

د درېگودي نابرابرون په مرسته د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m, n > n_{\varepsilon}$ لپاره ،

سرلیک

دا په دې معنا چې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مایورانټ او مینورانټ Majorante und Minorante

که $|a_n| \leq c|b_n|$ د $n \geq n_0$ لپاره وي او یو مثبت یا زیاتیزه ثابت، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورگنت څخه د $\sum a_n$ مطلق کونورگنت لاس ته راځي.

که برعکس $|a_n| \geq c|b_n|$ وي دټولو تر پای ډیرو n لپاره نو د $\sum |b_n|$ دیورگنت څخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورگنت نه ده.

زیاتوخت یا زیات واره هندسي لړۍ $\sum q^n$ او لړۍ $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړۍ په څیر کارول کیږي.

د لړۍ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$
لپاره دی

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \leq 2^{-n}.$$

د دې په تعقیب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ یوه مایورانټ ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.
د لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

په دې پسي يا په تعقيب هارموني لړۍ يوه مينورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي يا ديورگنت ده.

د وېش قضيه Quotientenkriterium

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او يو عدد $q \in (0, 1)$ شتون ولري د

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q, \quad n > n_0,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1, \quad n > n_0,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي يا ديورگنت ده. د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضيه کېدې شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

هم وليکل شي.

په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکې پولې ته تلونکې شرطونه رکورزيو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n|, \quad n > n_0,$$

په توگه دی، چې د هغې په بنسټ کوموينا ممکن نه ده.

پای.

که

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right|, \dots \leq q,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}| \leq q |a_{n+k-1}| \leq \dots \leq q^k |a_n|.$$

له دې سره هندسي لړۍ یوه مینورانته ده.

د دیورگنت لپاره قضیه راکوي، چې

$$0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \dots$$

د لپاره. زیاتیدونې صفرپرلپسې نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ دیورگنت لاس ته راځي یا پولې ته نه تگ. پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړیو استعمال شي، چې د هغې زیاتوونې فاکولتیت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n / \binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سری لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1} (n+1)! (n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n n! n!} = \frac{3 \cdot (n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}.$$

$$\frac{3}{4}$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n \rightarrow \infty$ لپاره دی، پسې (تعقیب) یې لړۍ پولې ته ځي.

د زیاتوونو یو سیده تخمین

$$a_n = \frac{3 \cdot 6 \cdots 3n}{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}$$

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضریبونه

$$\frac{3k}{n+k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سری باید مناسبې جوړې سره یوځای کاندې، چې یوه تخمین ته راشي.

د ریښې یا جذرقضیه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0, 1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولي ته ځي. که برعکس $|a_n| \geq 1$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولي ته نه تلونکې ده. د کونورگنت لپاره پوره کېدونکي شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته ښي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم ولیکل شي.

که $|a_n| \leq q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړۍ یو مایورانن جوړوي. د دیورگنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \geq 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ریښې قضیه استعما کېدی شي په هغو لړیو کتوره وي، چې د هغو زیاتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3 + (-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots$$

سرلیک

لپاره سری د بیلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3 + (-1)^n|}.$$

د دې افادې یا ویینې پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \dots,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې یا سره محدود ده. په تعقیب یې لری د $|x| < 2$ لپاره پولي ته ځي. همدې نتیجې ته رسو، که سری پوله سوپرپور جوړه کړي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2}.$$

دا د n می ریښې اوسخیلیري پرلپسې پولي ته نه ځي بی پروا یا نا غوره یا مهمه نه ده.

د لایبنیڅ قضیه Leibniz-Kriterium

الترنیري (مخ نخښه بدلونې) لری

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \dots$$

پولي ته ځي، که (a_k) یوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لری باقیو یا پاتو لپاره باور لري

$$0 \leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

د یوې الترنيروي جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زیاتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \dots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښی قضیه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي. د دې نامساوات د بنوونې لپاره، چې د لړۍ د پاتې لپاره اټکل راځوي، سړی بې له ټولیزو بندیزونو (o.B.d.A.) نیسي او

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \dots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \dots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لایبنيخ قضیې سره د الترنيروي هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2;$$

پولي ته تګ لاس ته راځي، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه یوه همغږیزه صفر پرلپسې ده. د n -م ټوټه جمعې ناتیګاوی، دا په دې معنا چې د لړۍ پرلپسې مطلق ارزښت دا لاندې دی

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2 \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

د لایبنيخ قضیې دواړه وړاندنیوني غوره دي.

سرلیک

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \dots$$

لړۍ لپاره زیاتوونې a_n صفر پرلپسې نه جوړوي. له

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

څخه دیورگنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{2n} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \dots$$

لړۍ لپاره زیاتوونې a_n همغږیزې نه دي. که یو په بل پسې زیاتوونې سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

$$n > 1.$$

für

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

په تعقیب هاموني لړۍ یوه مینورانت ده، نو له دې کبله لړۍ دیورگنت ده.

د اویلر **Euler** گڼ یا عدد **e** دیوې پرلپسې او یوې لړۍ پولې په حیث

د اویلر عدد $e = 2,71828182845905 \dots$

کیدۍ شي د یوې پرلپسې او یوې لړۍ پوله ارزښت پ څیر انځور شي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \leq 4 \cdot 2^{-n}$ څخه د مایورانن قضیې په بنسټ لاس ته راځي.

پرلپسې $a_n = (1 + 1/n)^n$ د لاندې دواړو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوي یا په نخښه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq e \quad . \quad (a)$$

د ښوونې لپاره لومړۍ په پام کې نیسو چې د $n \geq k \geq 0$ لپاره

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بینوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq e \quad . \quad (b)$$

د ښوونې لپاره $N \geq 1$ په خوښه ټاکو مگر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^N \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{n-N}{n}\right)^N$$

سرلیک

له دې سره لاس ته راځي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{N}{n}\right)^N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}$$

او د پولې ارزښت جوړولو ($N \rightarrow \infty$) سره غوښتنه.له (a) او (b) څخه د $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim} a_n$ له امله لرو :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim} a_n = e.$$

د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د څو غوره لړیو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}, \text{ für } |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

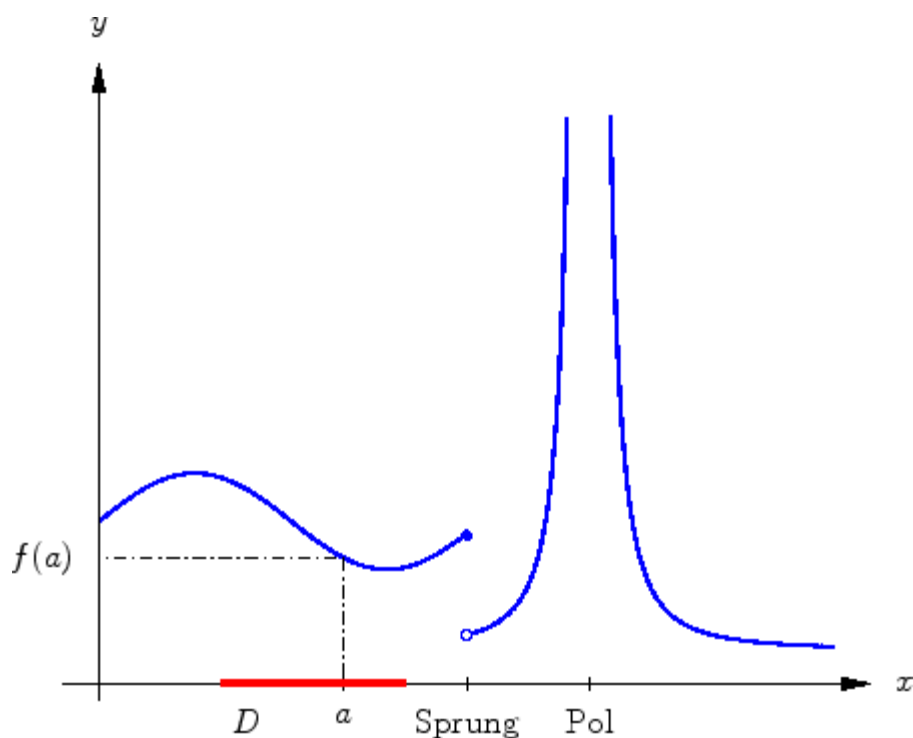
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots = \ln 2$$

ناپریکینه یا متمادیت **Stetigkeit**



سرلیک

یو تابع f په ټکي a کې ناپېرېدونکي یا متمادی دی، که د ټولو پرلپسېو (x_n) لپاره
 د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(a)$ د $f(x_n)$ په لور کونورگنت وي یا هڅیږي:

$$x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a),$$

د پوله ارزښت د تعریف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته یو δ_ε شتون لري د

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \quad |x - a| < \delta_\varepsilon,$$

لپاره، او سری لیکي

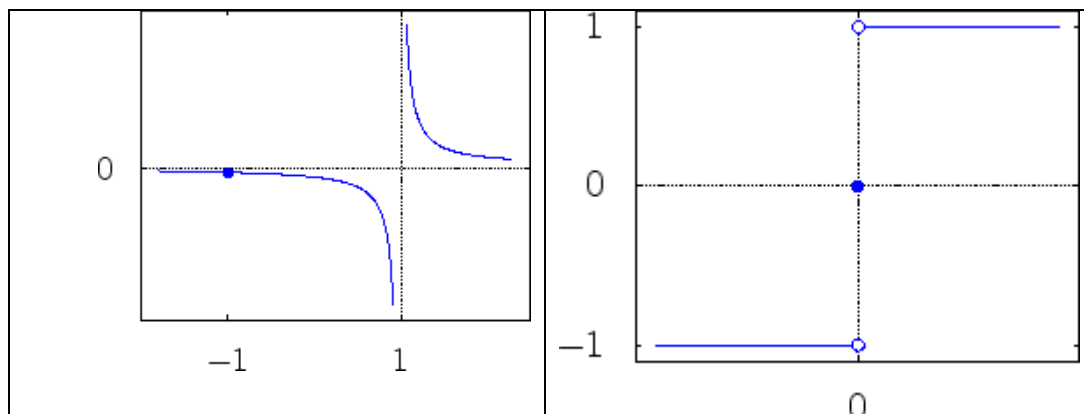
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

یو تابع په یوه انټروال D ناپېرېدونکي ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپېرېدونکي وي.

دا په دې معنا چې د f گراف سره تړلی دی، تابع گام یا توپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کیږي او نه ماتېږي).

بالاخره ناپېرېدونکي په دې معنا ده، چې گراف بهی له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کیږي.

$g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ فنکشن	$f(x) = \text{sign}(x)$ فنکشن
-------------------------------------	----------------------------------



پورته دواړه بیلګې د پرېکړېدنې مختلف تیوپونه ښايي.

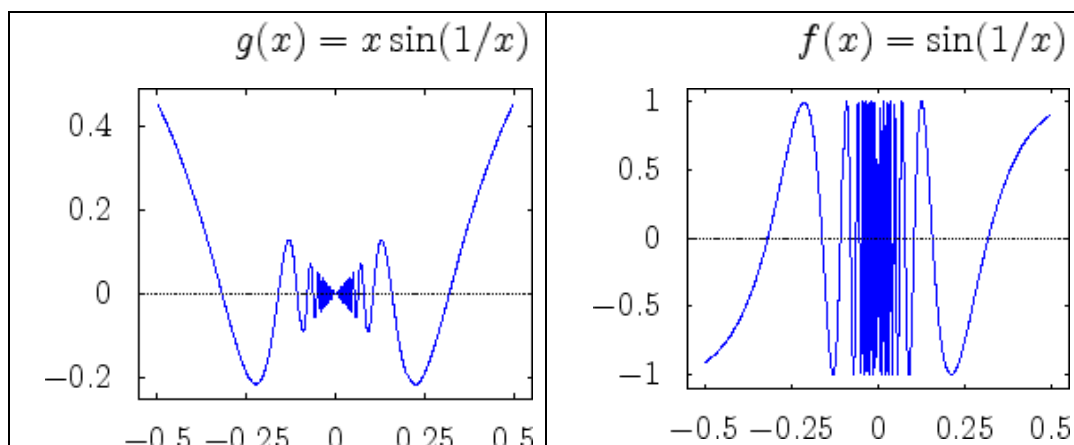
د سیګنوم تابع sign په صفرځای کې یو توپ وهی. په حقیقت کې د تابع ارزښت $\text{sign}(0) = 0$ ، مګر د $f(x)$ تعریف دی، پوله ارزښت د $x \rightarrow 0$ لپاره شتون نه لري.

تابع په $x = \pm 1$ کې تعریفشیا لري. د $x \rightarrow 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هڅیږي، g هلته یو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ شتون لري. دا ترلی د کرښیز ضریب $(x+1)$ د لنډونې څخه کتل کیږي.

$$g(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x \neq -1.$$

دا یوه له منځه وړونکې یا پورته کیدونکې تعریفشیا ده. د تابع ارزښت $g(-1) = -\frac{1}{2}$ د تکمیلونې له لارې په $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ باندې یو ناپرېکړېدونکې تابع کیږي. پای.

سرلیک



تابع (څيرې يې پورته دي)

$$f(x) = \sin(1/x)$$

په صفر 0 کې پرېکيدونکې ده، ځکه چې د $x \rightarrow 0$ لپاره د -1 او 1 ترمنځ اوسځيلی کيږي.

برعکس ياپه څټ د تابع

$$g(x) = x \sin(1/x)$$

تعريفنشيا په $x = 0$ کې پورته کيدونکې يا له منځه وړونکې ده.

له

$$0 \leq |x \sin(1/x)| \leq |x|$$

د $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ سره د پرتله کيدونکې قضیې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0.$$
له دې امله کيدی شي g د

$$g(0) = 0$$

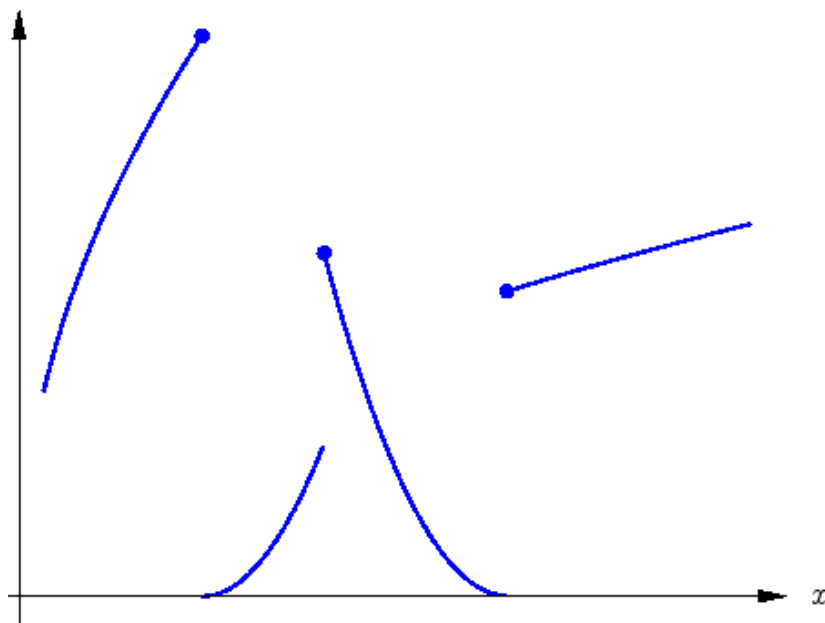
ایښوونې له لارې یوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپېرېدونکې تابع ته پوره شي.

یو اړخیز ناپېرېدونوالی یا متمادیت $\text{Einseitige Stetigkeit}$

ناپېرېدونوالی ته ورته سری کین- همداسې بنی ناپېرېدونوالی تعریفوي

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f^-(a), \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f^+(a),$$

داسې چې د x محور د a په اړونده اړخ ترڅېړنې لاندې ونیسي



که د f په یوه توپځای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په گراف کې پند په نڅېنه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کین- یا بنی اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

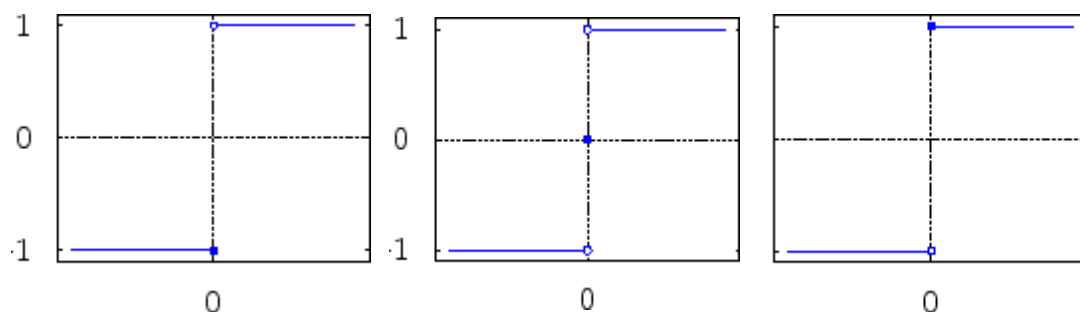
پای.

سرلیک

تابع

$$f(x) = x/|x|$$

په ټولو ټکو کې تر تعریفشیا $x = 0$ پورې ناپېرېدونکې ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کين اړخيزه او د $f(0) = 1$ سره ښی اړخيزه ناپېرېدونکې په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سيکنوم-تابع

$$f(x) = \text{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښی - او نه کينه ناپېرېدونکې دی.

د ناپېرېدونکو توابعو لپاره لارې يا قاعدې

په يوه ټکي a کې ناپېرېدونکې توابعو f او g لپاره

$$rf \quad (r \in \mathbb{R})$$

$$f \pm g$$

$$fg$$

$$f/g \quad (\text{که } g(a) \neq 0)$$

$$f \circ g$$

په a کې ناپېرېدونکې دي.

په ورته وگه په یوه انتروال D ناپېرېدونکې تابع همداسې د کین - اوښي اړخیز ناپېرېدونوالي ځایونو لپاره باور لري. پای.

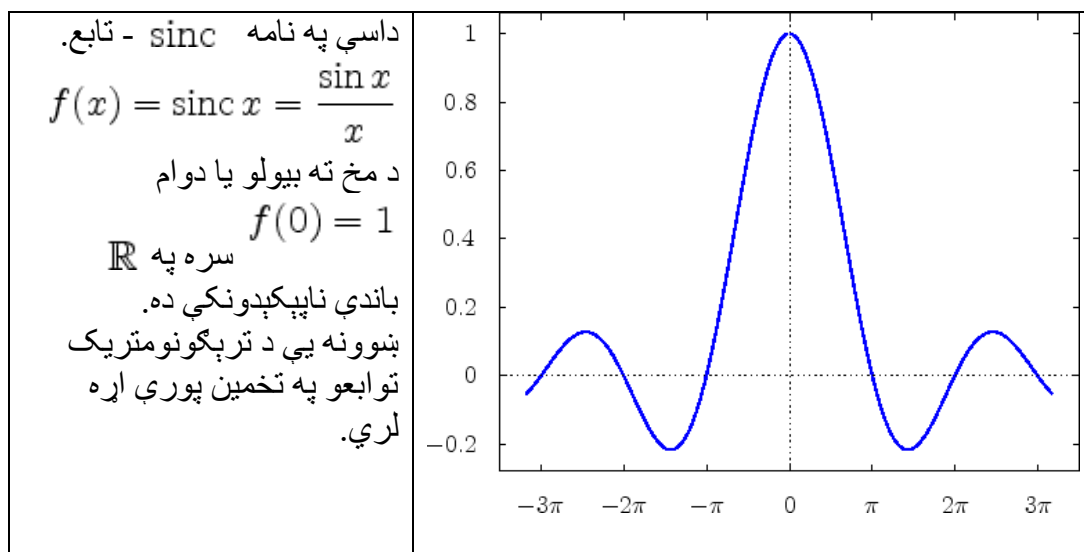
دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وینا څخه تړلې لاس ته راځي. که دېبلگې په ت وگه د ناپېرېدونکو توابعو کمپوزېشن (ترکیب) تر څېړنې ونیسو، د g د ناپېرېدونوالي څخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره داراکوي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(a).$$

دا چې f هم ناپېرېدونکې دی، لاس ته راځي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پای.



سرلیک

د رډېگودي $\Delta(OPQ)$ ، د گردۍ ټوټه ووني يا وتر او درېگودي $\Delta(OPQ)$ د سطحو د پرتلي له لارې په څېره کې کتل کيږي، چې $\frac{\sin x \cos x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$ همداسي $\frac{1}{\cos x} \geq \operatorname{sinc} x \geq \cos x,$ د $\sin x/2$ سره وېشنې له لارې او د معکوس ارزښت جوړونه. د $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ د پرتلي قضیې څخه لاس ته راځي. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sinc} x = 1.$	
---	--

لیکونکي: اپې، هیولیک

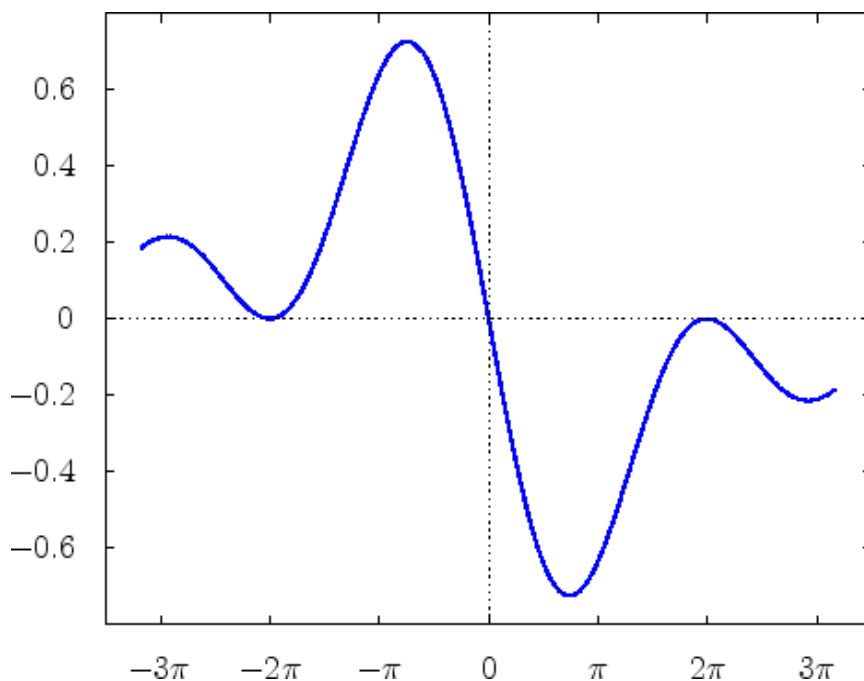
تابع

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$f(0) = 0$$

د مخ ته وړنې سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپېرېدونکې ده

د مخ ته وړنې



باور لري

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\ &= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x + 1} \sin x, \end{aligned}$$

اوله

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

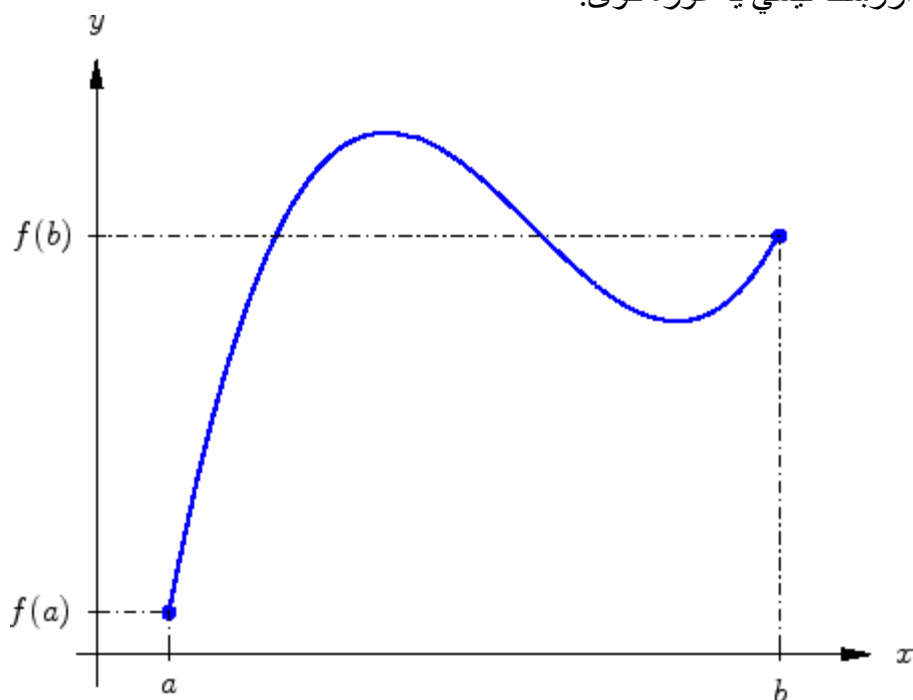
لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

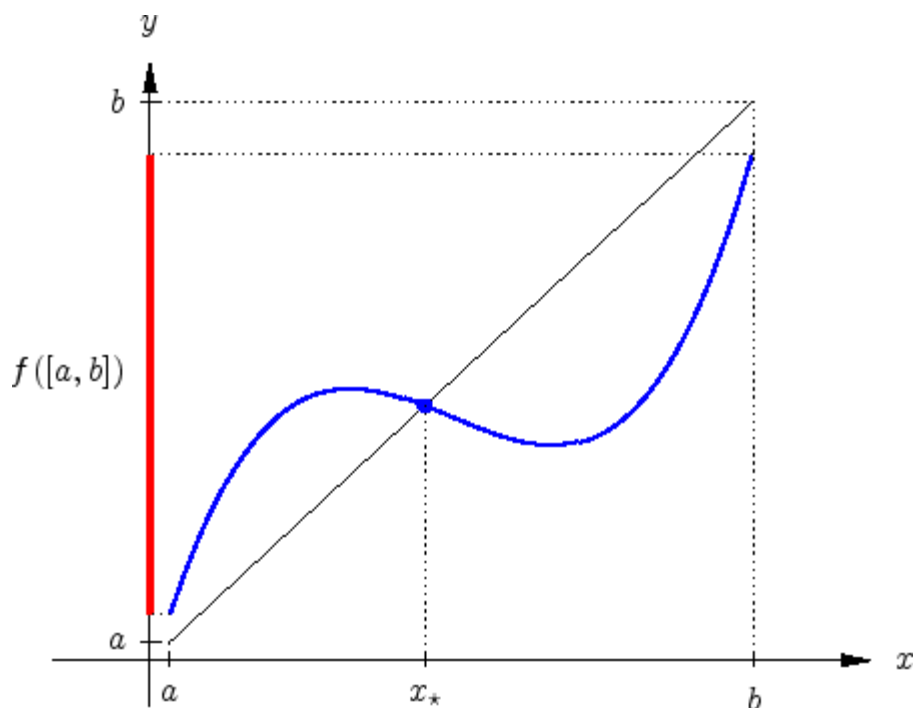
Zwischenwertsatz جمله ارزښت

يو ناپرېکېدونى تابع f په يوه بند انټروال $[a, b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نيسي يا غوره کوى.



ليکونکي: اېپ، هيو ليگ
 f که يو تابع انتروال $[a, b]$ په انتروال $[a, b]$ ناپرېکېدونکى تنظيم کړي، نو يو x_* شتون لري د $x_* = f(x_*)$.

سره.



د ناپېرېکيدونکي تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د يوه
صفرځای $x_* \in [a, b]$ شتون لاس ته راځي:

د نننېرېکيدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

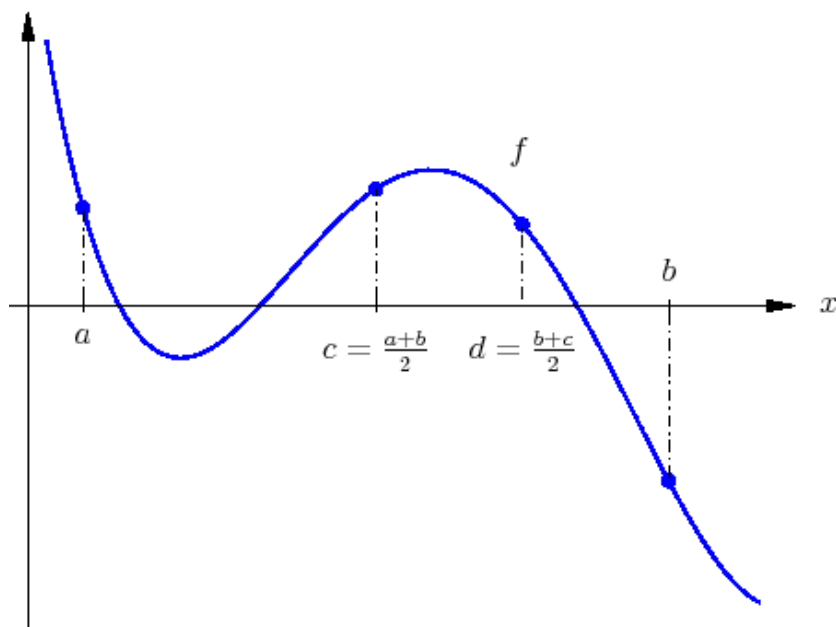
$$g(x_*) = 0 \Leftrightarrow f(x_*) = x_*$$

دا په دې معنا چې د f يو ځاي په ځای - يا بېکس ټکی x_* لیکونکي: هیولیگ، کراخ

سرلیک

د دوه سطحو – یا برخو تڼلار **Bisektionsverfahren**د منځ ارزښت جملې په بنسټ یو ناپېرېدونکی تابع $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ د

$f(a)f(b) \leq 0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای په $[a, b]$ کې لري.



که دا انټروال نیم شي او f ته د انټروال په قنځ کې ارزښت ورکړي

$$c = \frac{a+b}{2},$$

نو کیدی شي د مخنښې په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انټروال په نیمایي کې باید صفرځای پروت وي:

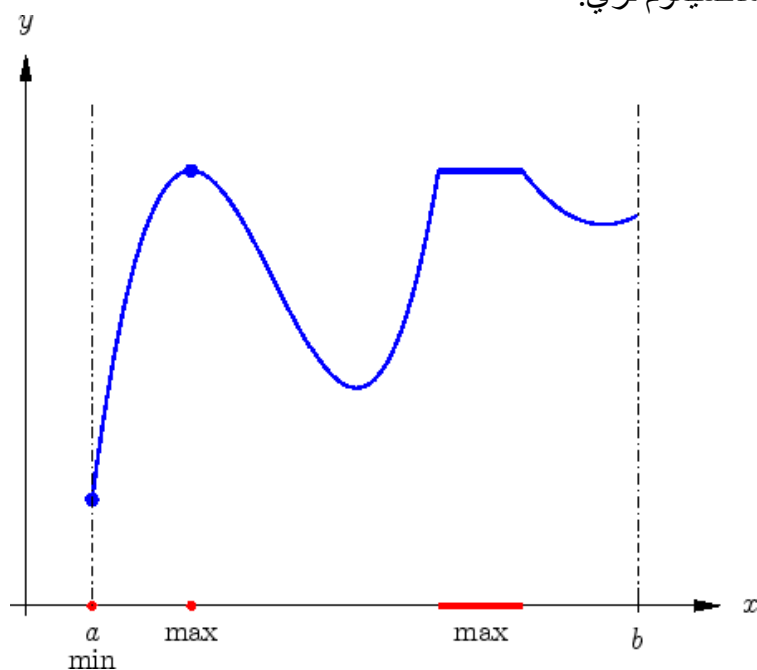
$f(a)f(c) \leq 0$ لاسته راځي، چې په $[a, c]$ کې صفرځای شتون لري

$f(a)f(c) \geq 0$: لاس ته راځي صفرځای په $[c, b]$ کې شتون لري

سری اوس دا اړونده برخه انټروال ټاکي او د ایتريشن (iteriert) ټیک حل ته ور نږدې کونه کوي، تر څو د انټروال اوږدوالی غوښتونې ټیکوالي ته ورسېږي. لیکونکي: اپې، هیولیگ، پفایل

د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت Extrema stetiger Funktionen

يو ناپرېکيدونکی تابع په يوه پای رابند انتروال $[a, b]$ لږ تر لږه يو مينيموم او يو ماکسيموم لري.



ليکونکي: اېپ، هيوليگ

$$c > 0$$

يو شتون لري د

$$(x + y)^n \leq c(x^n + y^n)$$

$$x, y \geq 0$$

سره د لپاره

د بنووني ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x = 0$ ساده دی) لیکو

$$z = y/x$$

او ناپرېکيدونکی تابع

سرلیک

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

څیرو.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$$

دا چې د $z \geq b$ لپاره باوري کوي. د

شتون لري، داسې چې

$$b > 0$$

دی، نو یو

$$f(z) \leq 2$$

$$c = \max \left\{ 2, \max_{z \in [0, b]} f(z) \right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \leq c$$

او له دې سره پورته غوښتنه
لیکونکي: ایپ، هیولیگ

برابر ډوله ناپرېکېدنوالی Gleichmäßige Stetigkeit

یو تابع f په یوه انټروال D برابر ډوله یا برابر ارزښته ناپرېکېدونکی دی، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو δ_ε شتون ولري، داسې چې راکړي

$$|x - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس د a په واک کې نه ده. تنهپه یوه محدود رابند انټروال کې ناپرېکېدنوالی کی او برابر ارزښته یا - ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی. لیکونکي: هیولیگ، پفایل

په ټکي ډول پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

د توابعو (f_n) یوه پرلپسې په یوه انټروال D ټکي ډوله د پولې تابع f په لور پولې ته ځي.

$$f_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f,$$

که $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.

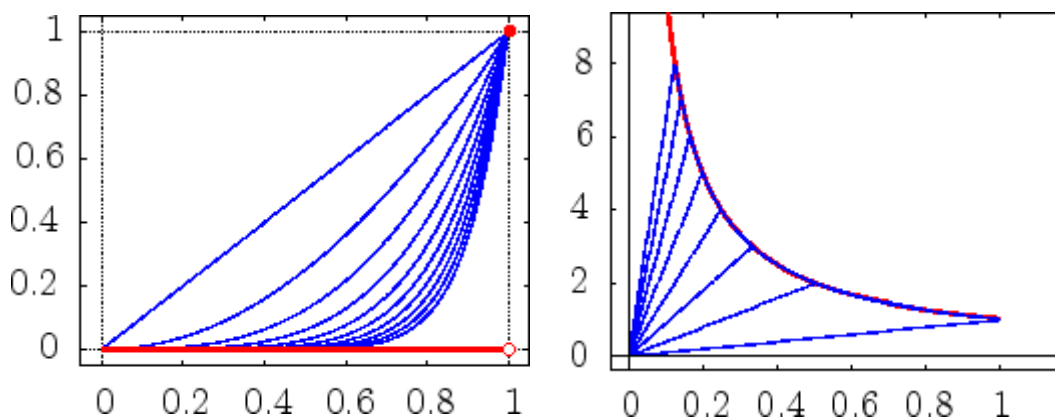
لیکونکي: ایپ، هیولیک

په ټکیدوله پولې ته تللي باید نه دی چې ناپربکېدونال او بندوالی ساتلي پاتې شي.

د بېلګې په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په بني انټروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کینه څېره کې چې ښوول شوی دی.



د یو کونورګنت لپاره بېلګه چې د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسې سره

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 < x \leq 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

بښايي، چې په $(0, 1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولي ته ځي. لیکونکي: اېپ، هیولیگ

برابر ارزښته یا برابر ډوله پولي ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو یوه پرلپسې (f_n) په یوه انټروال D برابر ډوله د یوه پولي تابع f په لور پولي ته ځي،

$$f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته یو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \implies |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري. د کوشي-قضیې په مرسته کېدی شي برابر ډوله پولي ته تلنه یې د پولېتابع نسبت څخه تعریف شي. سری ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باید باور ولري. که توابع f_n ناپېرېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده. لیکونکي: اېپ، هیولیگ

د درېگودي نامساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} & |f(x_0) - f(x)| \\ & \leq |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ & \leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابر ډوله کونورگنت له امله یو n_ε شتون لري، داسې چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in D$$

باوري کوي. د یوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي،
 $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ که $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ وي. دا له لاس ته راځي او له دې سره $x \rightarrow x_0$ د $f(x) \rightarrow f(x_0)$ لیکونکي: اېپ، هیولیگ

Konvergenz von Funktionenreihen د توابعو لړۍ پولي ته تلنه

یوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابر ډوله) پولي ته تلونکې ده، که دا د $s_n = \sum_{k \leq n} f_k$ لاندې ټوټه جمعي یا زیاتون لپاره دا حالت ولري.

یوه کلکونه یې مطلق پولي ته تلنه ده، چې د هغې سره د $\sum_n |f_n|$ د برابر ډوله پولي ته تلنې لپاره غوښتل کیږي. په دې حالت کې پولي ته تلنه د لړۍ یوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتېږي. د تعریف سره سم دا وینا وي په تابع پرلپسېوو هم د باور وړ دي. لیکونکي: اېپ، هیولیگ

په لاندې کې د یو څو تیوپیګي بیلګو حالتونه ښولکيږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \dots]$$

سرلیک

په $[0, 1]$ ټکي ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړۍ لپاره فرمولپه مرسته ډوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکي دي، کېدای شي لړۍ برابرډوله کونورگنت نه وي.

(ii) د $x \in [0, 1]$ لپاره لړۍ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \dots$$

د لایبنيخ-پولې ته تلنې له امله (همغریز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړۍ پاتې د لایبنيخ پسې د

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-x)^k}{k} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} \right| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدای شي، لړۍ په $[0, 1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مگر سره له دې په $[0, 1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum (1/k)$ دیورگنت ده.

(iii) لړۍ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \dots$$

په $[-1, 1]$ باندې مطلق پولي ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^m \left| \frac{x^k}{k^2} \right| - \sum_{k=1}^n \left| \frac{x^k}{k^2} \right| = \sum_{k=n+1}^m \left| \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

پولي ته ځي.

ليکونکي: اپې، هيوليگ

توابعو لړۍ ته مايورانن يا پورته پولي

Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)| \leq ca_n, \quad x \in D,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

اوکه لړۍ پولي ته ځي، بيا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

مطلق پولي ته تلونکي ده.

ليکونکي: اپې، هيوليگ

وينا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مايورانن له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو

$$x \in D$$

لپاره لرو

سرلیک

$$\sum_{k=1}^n |f_k(x)| - \sum_{k=1}^m |f_k(x)| \leq c \sum_{k=m+1}^n a_k$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوه ضرب د پوله ارزښت په حیث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n, x \in \mathbb{R},$$

په هر انټروال $[-a, a]$ د برابرېدوله پولې ته تګ سره.
لیکونکي: اېپ، هیولیک

لومړی به د

$$f_n(x) = (1 + x/n)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{x}{n} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{x^n}{n^n}.$$

برابرېدوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سړی ترې کار اخلي یا استعمالوي، چې

(i)

$$a \geq 0 \quad a^k/k! \rightarrow 0$$

د په خوښه لپاره ؛

(ii)

$$j \in \mathbb{N} \quad p_{n,j} = \frac{n(n-1) \cdots (n-j+1)}{n^j}$$

لپاره یو مونوتون جګېدونکي د 1 د هر

په لور تلونکي پرلپسې ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سړی کمښت یا تفریق

$$f_m(x) - f_n(x)$$

په لاندې بڼه لیکي

$$\sum_{j=0}^{k-1} (p_{m,j} - p_{n,j}) \frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^m p_{m,j} \frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^n p_{n,j} \frac{x^j}{j!}$$

د سره $k < n < m$ سره $a \geq 1$ او $k \geq 2a$ لپاره د $|x| \leq a$ سره د اخیښو زیاتېدونو ارزښت هر ځل

$$\leq \frac{a^k}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{a}{k+1} + \frac{a^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots\right)}_{\leq 2},$$

دی، نو د (i) پسې د یوه پوره لوی ټاکلي k لپاره. د (ii) پسې یا له مخې دی

$$|p_{m,j} - p_{n,j}| < \frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د لپاره، اوله دې سره کیدی شي د لومړنۍ جمعې هره زیاتېدونې د

$$f_m(x) - f_n(x) \leq \frac{\varepsilon/3}{k}$$

په ټوټه کیدو د له لارې اټکل کړي. په ټولیزه توګه لرو

$$|f_m(x) - f_n(x)| < k \frac{\varepsilon/3}{k} + 2 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad m, n > \max_{j < k} N_j(\varepsilon).$$

د

برابردوله پولي ته تلنې په بنسټ په هر انټروال $[-a, a]$ باندې د پولي تابع $f(x) = e^x$ ناپېرېدونکي ده. بسیا کوي، چې $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ د راشنل پروت

محور $x = p/q$ لپاره وښایو. د یوې برخه پرلپسې $n = mp$ په راوړنې سره د e د تعریف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{mp}\right)^{mp} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q} = e^{p/q}$$

د $t \mapsto t^{p/q}$ ناپېرېدونې له امله.

د اکسپوننشل تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوې لړۍ د پوله ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, x \in \mathbb{R},$$

د هر انټروال $[-a, a]$ برابردوله پولي ته تلنې سره. لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکیري:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$x > 0$$

دا تړلی د تیلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د لپاره دا لاندې سیده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

سری پوله ارزښت $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \left(\frac{x^j}{j!} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{n \cdot n \cdots n}}_{\leq 1} \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \left(\frac{x^j}{j!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{n \cdot n \cdots n} \right)$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{j=0}^m \left(\frac{x^j}{j!} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - k/n) \right) \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

د یوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \rightarrow \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو څخه وروسته د دواړو اټکلونو یو بل سره برابروالی لاس ته راځي. یوه ورته دلیل راوړنه د $x < 0$ لپاره هم شونې ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلي جمعه کې ځانله یا جداوڅیږي. لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بیلوژیکي ودې پروسې تر څیړنې لاندې نیسي. د بیلګې په توګه په یو ساده د د قومونو ودې موډل کې د زېږېدنې ګڼون یا تعداد متناسب دی د د ورځنې اوسیدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

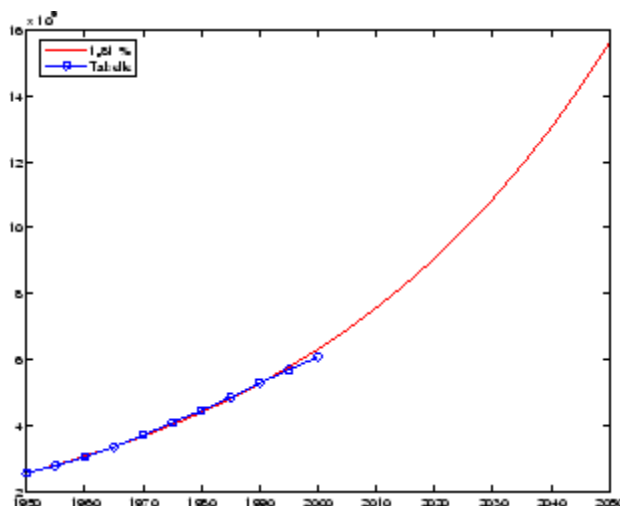
$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)).$$

د $\Delta t \rightarrow 0$ لپاره دا د ودې قانون

$$p(t) = ce^{\lambda t}, \quad c = p(0),$$

له لارې مودلي کيږي.

کال	د نفوسو تعداد په میلیونو	ونډه
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %



(کين) جدول د نړۍ اوسېدونکي بنسټي همداسې کلنۍ د ودې تعداد (اټکل شوی ارزښت). کلنۍ منځنۍ د ودې زیاتون (ریټ) په کلونو 1950-2000 کې 1.81 % وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منځني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

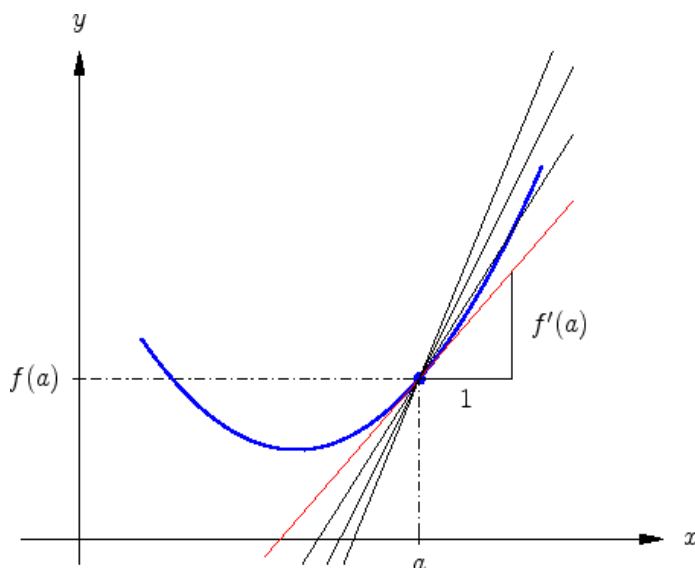
به د نړۍ اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 میلیارده وگنل شي (ټکي په ټکي شوې کړه یا منځني).
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

مشتق (رابیلیدنه) Ableitung

یو تابع f په ټکي a کې مشتقور یا رابیلېږ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..



مشتق‌وړوالی یا رابیلیدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د ټوټه ونې یا سیکانټ جگوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

څخه د ورکړ شوي تانجنت جگوالي په لور وهڅیږي یا کونورگنت شي (پوله یې ونیول شي).

سړی داسې هم لیکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره. دا لیکدود یا ه-ډول په کمښت وېش کې $\Delta x \rightarrow 0$ پولي ته تګ ښايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}.$$

سرلیک

جگ مشتقونه د $f'', f''', \dots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \dots$ سره په نڅېنه کېږي. f یو تابع په یوه ډېرۍ یا سټ D باندې مشتقور بلل کېږي، که $f'(x)$ د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعریف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

دویم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی. $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$ لپاره د بېنوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نڅېنه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدې شي د زیاتون - یا جمعې قضیې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمښت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin((x+h/2)+h/2) - \sin((x+h/2)-h/2)}{h}$$

$$= \frac{2 \cos(x + h/2) \sin(h/2)}{h}.$$

د

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(h/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $h \rightarrow 0$ لپاره بنی اړخ د $\cos x$ په لور هڅیږي. لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د بنسټوابعو مشتق یا رابیلیدنه

لاندې جدول د غوره بنسټوابعو مشتق ښایي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$x^r, r \neq 0$	rx^{r-1}
e^x	e^x		$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

سرلیک

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
----------	-----------------------	--	---------------------------	--------------------

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

Linearität der Ableitung د مشتق یار ایلیدني کر بنزوالی

مشتق کر بنیز دی، دا په دې معنا چې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

Produktregel د ضرب قانون

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټولیزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري

$$f' = \sum_{i=1}^n f'_i \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د تعریف څخه ترلی راګوي

$$\begin{aligned}
 (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
 \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د پولینوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$x = 1, 2, 3$$

مشتق د په ځایونو کې ټاکل کیږي. دا چې د هر کرښیز ضریب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې یا قاعدې څخه لرو

$$p'(1) = (1-2)(1-3) = 2,$$

$$p'(2) = (2-1)(2-3) = -1,$$

$$p'(3) = (3-1)(3-2) = 2.$$

په ورته توګه سړی د

$$p(x) = (x-1) \cdots (x-n),$$

لپاره شایي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k} (n-k)! (k-1)!$$

سرليک

دی د $k = 1, \dots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار Quotientenregel

د دوه مشتقو توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - 2x}{4 + 3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - 2x)'(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(4 + 3x^2)'}{(4 + 3x^2)^2} \\ &= \frac{-2(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(6x)}{(4 + 3x^2)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2} \end{aligned}$$

په بدیلې ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

$$\begin{aligned} & \left((1-2x) \frac{1}{4+3x^2} \right)' = \\ & = (-2) \frac{1}{4+3x^2} + (1-2x) \frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}. \end{aligned}$$

(Autoren: Höllig/Kreitz)

ځنځیری لار یا - قانون Kettenregel

د توابعو د ځنځیروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لپاره مشتق دی

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د $f(y) = z$, $g(x) = y$, $h(x) = z$ سره سری لیکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي

سرلیک

$$\begin{aligned}
 (f(g(x)))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + \tilde{h}) - f(g(x))}{\tilde{h}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(g(x))g'(x),
 \end{aligned}$$

چیرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.
لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د ځنځیري قانون د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy} \left(\sin \left(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)} \right) \cdot x^2 \right) g'(x).$$

د دننني مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کیږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} (2x).$$

په بدلي توگه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} = \cos(y) \frac{1}{w} 2x = \cos(\ln(1+x^2)) \frac{1}{1+x^2} (2x).$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

ایمپلیسیت مشتق نیول Implizites Differenzieren

که یو تابع $y = f(x)$ ایمپلیسیت وي، دا په دې معنا چې یو برابر وړون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوې د x پسې مشتق کېدې شي. دلته یواځې په $y = y(x)$ کې افادو باندې ځنځیري قانون استعمالیږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E: x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوي ایلېپسې یا هګۍ

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3y^2) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx} 7 = 0$$

همداسې

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{x}{y}$$

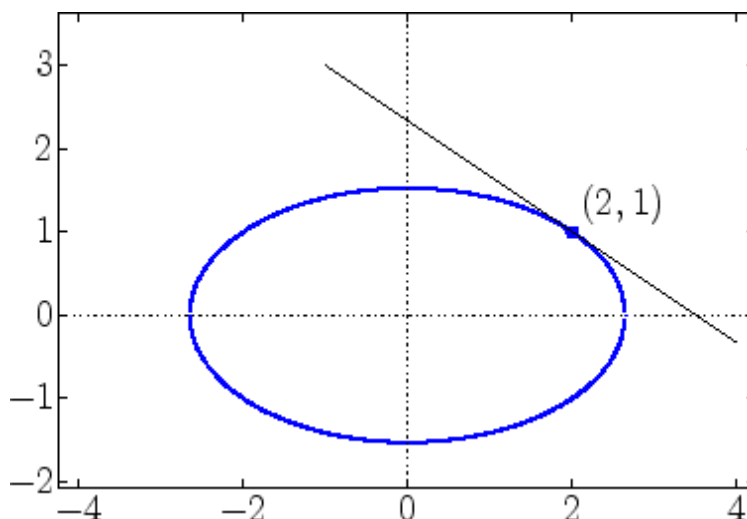
لاس ته راوړي.

له دې سره کېدې شي د E په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2, 1)$ لپاره په لاس راځي

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

سرلیک



په ورته توگه جگ مشفقونه شمېرل کيږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx} (2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0.$$

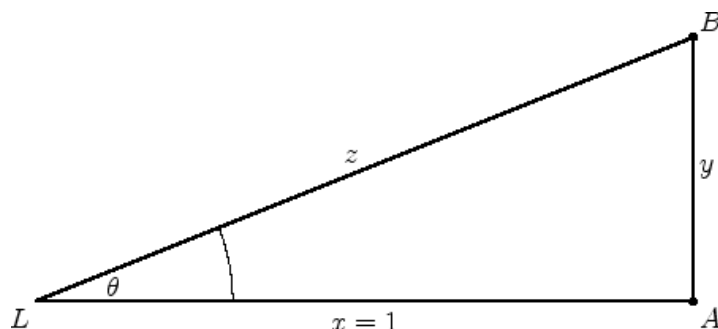
له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}.$$

کیدۍ شي په E باندې د یوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پیژندلو له لارې څرگند ازښتونه ټاکي لیکونکي: هیولیگ، کوپف

په ټکي L کې یو د برېښنا یا رڼا برج دی د یوه څرخېدونکي بېجلی یا گروپ سره، چې درناوړانگه یې د ټکو A او B له لارې تللی 1 km کرښیز لري دښته لویږي.

سرلیک



وړانګه غورځونکي د یوه څرخون لپاره 2 ثانیه ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

. د رڼاوړانګې پوزیشن یا ځای په دېنټه کې دی

$$y(t) = x \tan \theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi \frac{1}{\cos^2(\theta)} \rightarrow \infty \quad \text{für } \theta \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سوري يې له رڼا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راځوي. د دې وخت توپیر په پام کې نیولو له امله رڼا B ته د په

$$t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c} \quad \text{وخت}$$

$$c = 300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

د رڼا چټکتیا ده،

ورسیري، دکوم سره چې

له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}$$

.

$$z^2 = y^2 + 1$$

مشتق راځوي

وروسته د t پسې د

سرلیک

$$zz' = yy', \quad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' اېښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راځوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \left(\pi - \frac{\pi}{c} y' \sin \theta \right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c \cos^2(\theta) + 1\pi \sin(\theta)}$$

د $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \rightarrow c$ هڅيږي، د اېنشتاين د تيوري سره په هم غږۍ کې باور لري

t

$$y' \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \rightarrow -\frac{c}{\pi},$$

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

داپه دې معناچې د لاس ته راوړي. سوری له دې امله درنا گړندی دی. دا د اېنشتاين تيوري سره په تضاد کې نه دی، ځکه چې سوری یو ه پېښه، Phänomen گوري، نا دا خورنده ماده. د ،، ساده

$$300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

څېړونکي، لپاره بو نا ښه احساس پاتيري دا په هر صورت له ورو خوزي.

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د لایبنيڅ قاعده يا لار Leibniz-Regel

د یوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

(Autoren: Höllig/Kopf)

د په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$\begin{aligned} (fg)''' &= (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' = \\ &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''' \end{aligned}$$

ټولیزه بڼه د اندکشن له لارې صورت په n نیسي د بینومیال ضریبونو لپاره د ریکورزین په پام کې نیولو سره. لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د $x = 0$ په ځای کې دی

$$f(x)g(x) = x^9 \cos(\sin x)$$

یولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9-م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!.$$

سرلیک

د لایبنيڅ- فرمول له دې سره فقط په یوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}|_{x=0} = \binom{11}{2} f^{(9)}(0) g^{(2)}(0).$$

د ځنځيري قانون سره لرو يا لاس ته اځي

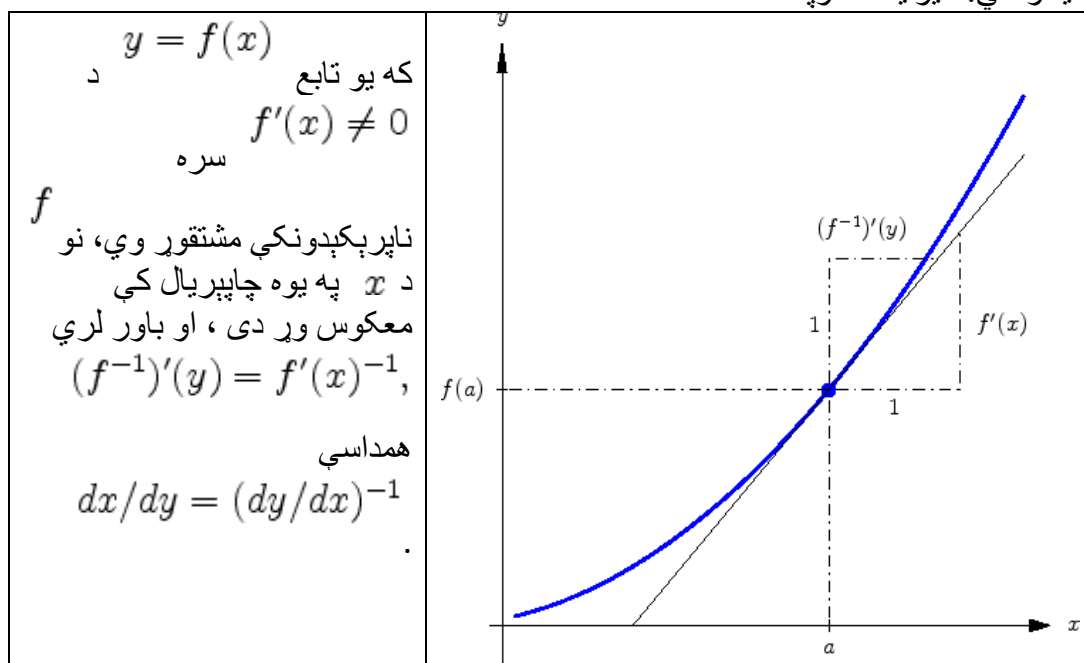
$$g'(x) = -\sin(\sin x) \cos x$$

$$g''(x) = -\cos(\sin x) \cos^2 x + \sin(\sin x) \sin x,$$

يعني $g''(0) = -1$. له دې سره غوښتونې مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2} 9! (-1) = -\frac{1}{2} (11!).$$

ليکونکي: هيو ليگ، کوپف



لکه په څېره کې چې لیدل کیږي، د f او f^{-1} جگوالي معکوس دي. لیکونکي: اپې، هیولیک،

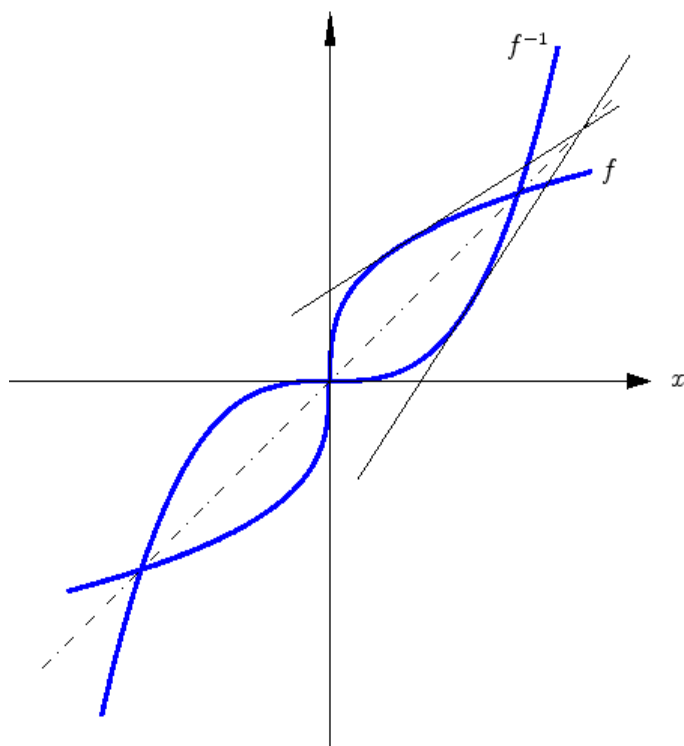
که کیږدو $g = f^{-1}$ ، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځیري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x).$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه یا ثبوت لاس ته راځي



سرلیک

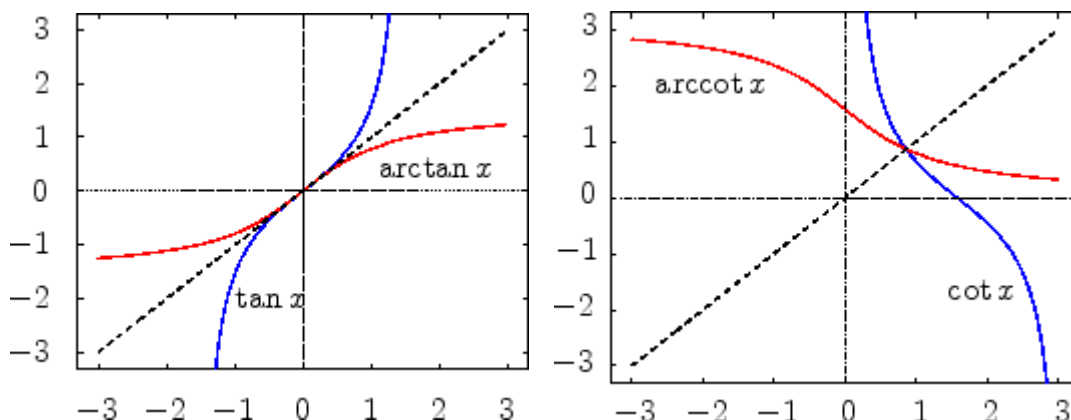
دا چې د f او f^{-1} جگوالی په اړونده د x او y په ځایونو کې سره معکوس دي، روښانيږي، که په پام کې ونیول شي، چې f او f^{-1} یو بل ته سیومتریکی دي. لیکونکي: ایپ، هیولیک،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمېرو

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d \sin x}{dx \cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^{-1} = \cos^2 x.$$



بنی اړخ اوس باید د y تابع په څېر ولیکل شي. د دې لپاره کټوتوالی کارول کیږي با استعمالیږي.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

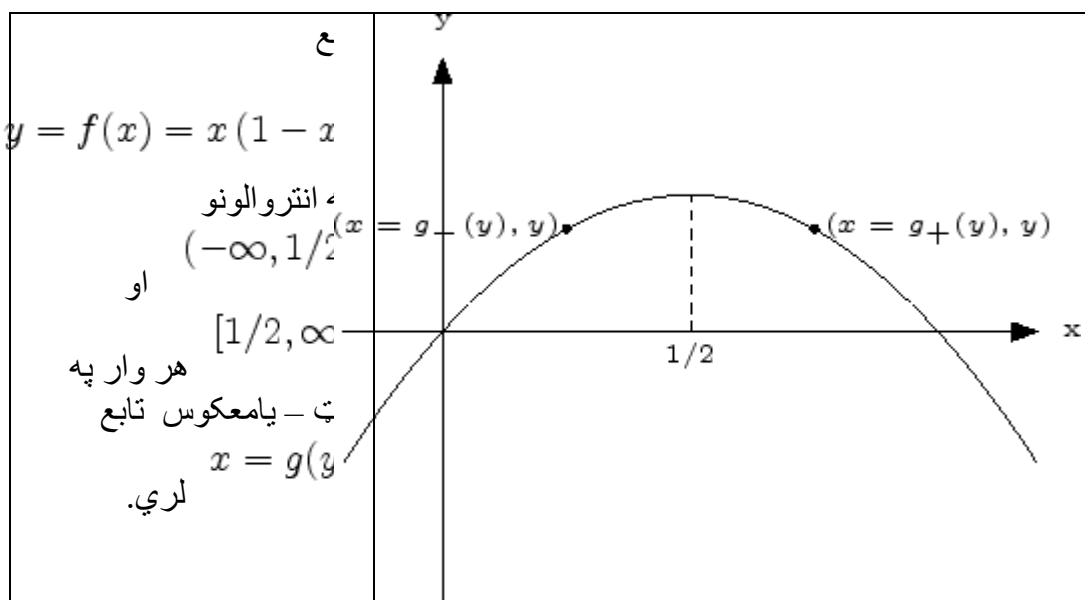
او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1 + y^2}.$$

په ورته توګه د کوتانجنټ په څېر - یا معکوس تابع ښایو.

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arccot} y = -\frac{1}{1 + y^2}.$$

لیکونکي: ایپ، هیولیک،



سرلیک

په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x}.$$

بل يې مشتقنيول راكوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x} \right)' \frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2} \frac{1}{1-2x}.$$

په ځانگړي ډول د $x=1, y=0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2.$$

مشتقونه شمېرلور دي، بې له دې چې معكوس تابع بايد روښنه جوړه شي. دا ټيک هلته

شونې دي، چې كه سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ وليکي. په دې بيلگه کې داشوندي دي، ځکه x د y تابع په څېر ليکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y}.$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې

(1,0)

اړونده څانگه بايد وټاکل شي.

ليکونکي: هيوليگ، کرايش

لوگاريتمي مشتق يا - رابيليدنه Logarithmische Ableitung

دا فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

$$y = g(x)^{h(x)} \quad g(x) > 0$$

کيدی شي د سره د بني توابعو مشتقيدو ته وکارول شي. سړی لاس ته راوړي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} (h(x) \ln g(x)) .$$

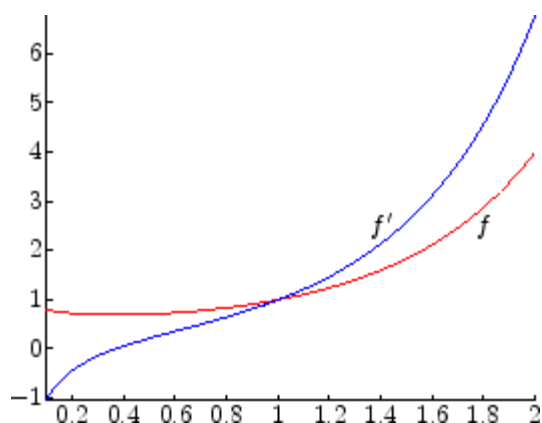
لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

د $x > 0$ سره تابع

$$f(x) = x^x$$

لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1) .$$



$$\ln f(x) = x \ln x$$

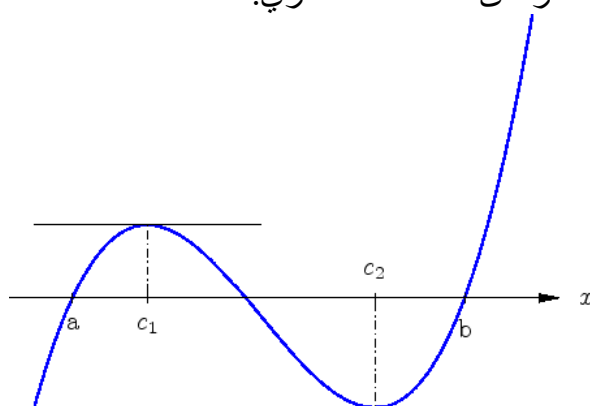
د $x \rightarrow 0$ لپاره $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښي اړخیز ناپېژېدونکي ده. د مشتق لپاره
 $\ln x + 1 \rightarrow -\infty$ او $x^x \rightarrow 1$ دا حالت نه دی. له امله د $x \rightarrow 0$ لپاره
 په صفر یو ولاړ یا عمود تانجنت لري.

لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

د رولي جمله Satz von Rolle

سرلیک

د یوه ناپېرېدونکي مشتقور تابع f مشتق د $f(a) = f(b) = 0$ سره لږ تر لږه یو
صفرځای $c \in (a, b)$ لري.



تولیز باور لري: که یو تابع په یوه انتوال $[a, b]$ کې n صفرځایونه ولري (د ډېروار والي په شمول)، نو هلته k -م مشتق $\geq n - k$ صفرځایونه لري.
لیکونکي: اپې، هیولیګ،

دا چې f ناپېرېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a, b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

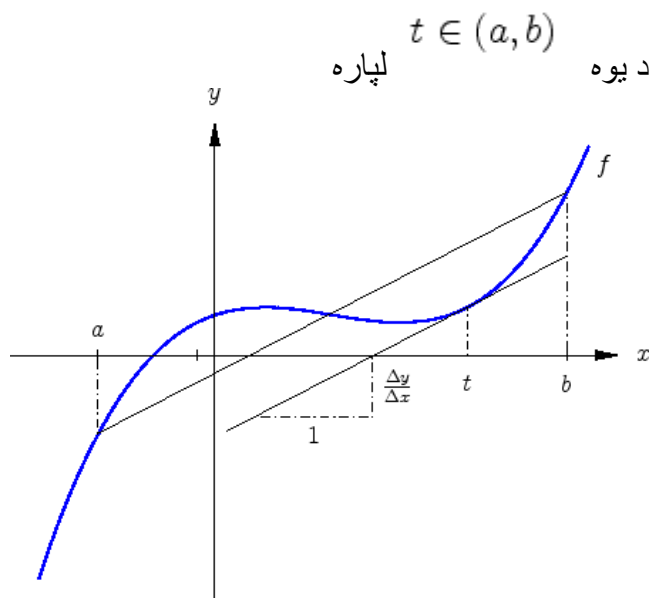
$$f(d) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

که f نا ثابت وي (د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې
 امله لږ تر لږه د دې دواړو ټکو څخه یو یې په (a, b) کې پروت دی. دا چې
 مشتقور دی باید د دې ځایز یا لوکال افراطیت لپاره مشتق ورک – یا صفر شي.
 لیکونکي: اپې، هیولیگ،

منځ ارزښت قضیه **Mittelwertsatz**

د یوه ناپېرېدونکي مشتقور تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a)$$



هندسي دا کټوتوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په یوه ټکي کې غبرگ دی د له پای
 ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي تویه ونې یا وتر سره. داسې هم لیکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

ليکونکي: ايپ، هيوليگ،

د يوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپېرېدونکې مشتقور دی، نو g هم

ناپېرېدونکې مشتقور دی او د رولي د جملې پر بنسټ يو لاندې سره شتون لري د

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ليکونکي: ايپ، هيوليگ،

ټوليزه (شوي) منځ ارزښت جمله Verallgemeinerter Mittelwertsatz

که f او g ناپېرېدونکي مشتقور توابع وي، نو $t \in (a, b)$ يو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t).$$

که برسېره پردې په (a, b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سړی کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

هم وليکي.
ليکونکي: اپې، هيوليگ،

د تابع

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) - f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

لپاره $h(a) = h(b) = 0$ باور لري. دا چې f او g ناپېرېدونکي مشتقور دي، نو h هم ناپېرېدونکي مشتقور دی او د پورته د رولي د جملې سره سم یو $t \in (a, b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0 = h'(t) = (f(b) - f(a))g'(t) - (g(b) - g(a))f'(t)$$

bzw. همداسي

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t).$$

که (a, b) په باندې $g'(x) \neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم $g(b) - g(a) \neq 0$ هم او سری لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

ليکونکي: اپې، هيوليگ،

لاندې-سيمبول Landau-Symbole

سری ليکي

سرلیک

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow a),$$

که یو ثابت c شتون ولري، دسې چې

$$|f(x)| \leq c|g(x)|$$

وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د 0 په لور هڅیږي، نو سړی په اړونده توګه لیکدود کاروي

$$|f(x)|/|g(x)|$$

$$f(x) = o(g(x))$$

لیکونکي: اپې، هیولیګ،

د بینوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

په څټ - یا معکوس جوړونې د $1 - nx$ سره د غزونې وروسته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^n} &= \frac{1}{1+nx+O(x^2)} \\ &= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)} \\ &= 1-nx+O(x^2). \end{aligned}$$

د $x \rightarrow \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

لیکونکي: اپې، هیولیګ،

ناپېرېکېدنه او مشتقوړوالی کیدی شي د لاگرانژ فرمول په مرسته تعریف شي.

يو تابع f په $x = a$ کې ناپېرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \rightarrow a).$$

مشتقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په یوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \rightarrow 0).$$

سره.

د یوه دوه واره ناپېرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د تېلور-وډې څخه هغه تېره

$$r = O(h^2)$$

ایټکل لاس ته راځي

لیکونکي: کلاوس، هیولیگ،

د لو، پیتال قاعده یا لار Regel von l'Hospital

که دوه ناپېرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې یوه گډ صفرځای یا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښی پوله ارزښت شتون ولري (په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې) د ټولیزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ یو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

سرلیک

که سری، د یوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ یعنې داسې $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $x \rightarrow a$ سره هم $t \rightarrow a$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

لیکونکي: اپې، هیولیگ،

د لو، پیتال د جملې استعمال د یو څو بېلگو لړیو په بنسټ روښانه کيږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^2 - 7x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{6x - 7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0$$

د ټولو $x \rightarrow \infty$ لپاره:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

ډېواره استعمال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2 \cos(x) - x \sin(x)} = 0$$

په دې بېلگو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لويپیتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلي پوله ارزښت د شتون له لارې تضمین دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

کرنیز اپروکسمیشن (ورنږدېوالی) Linear Approximation

د یوه دوه واړه ناپېرېدونکي مشتق تابع f لپاره باور لري

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R = \frac{1}{2} f''(t)(\Delta x)^2 = O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x + \Delta x$ سره.
لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

تابع

$$g(y) := f(y) - f(x) - f'(x)(y - x) -$$

$$- \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2} (y - x)^2$$

د $y = x + \Delta x$ لپاره یو صفرځای لري او د $y = x$ لپاره یو ډبل یا دوه واړه صفرځای لي. د رولي د جملې په تعقیب یو شتون لري د لاندې سره

لیکونکي: ایپ، هیولیک،

یو کونج $\vartheta \in (0, \pi/2)$ کېدی شي د کاتېتونو یا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جگېدونکي درېځوډي کې داسې وټاکو:

$$\vartheta = \arctan(y/x).$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضریب c_a د مطلق ناتیکیاوي لپاره د

$$\left| \frac{d\vartheta}{dy} \right| = \left| \frac{1/x}{1 + y^2/x^2} \right| = \left| \frac{x}{x^2 + y^2} \right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y = 0$ لپاره ماکسمال کیږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \leq |1/x| |\Delta y|.$$

لویې ناتیکیاوی د کوچني x لپاره غزیږي. په ورته توګه د نسبي ناتیکیاوي د قوی کېدنې فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left| \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{y}{\vartheta} \right|.$$

که دا لاندې تخمین وکارول شي

$$|\vartheta| \geq |\sin \vartheta| = \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|,$$

نو لاس ته راځي

سرلیک

$$c_r \leq \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1.$$

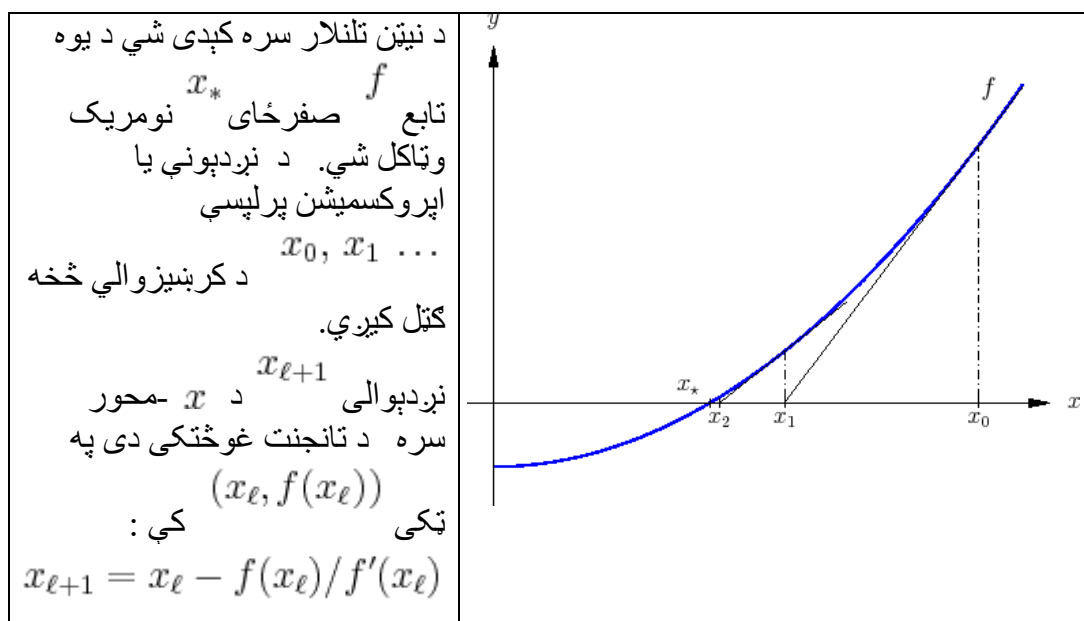
نو نږدېوالي ډول باور لري

$$\frac{|\Delta \vartheta|}{|\vartheta|} \leq \frac{|\Delta y|}{|y|},$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کيږي

لیکونکي: کلاوس، هیولیگ،

د نیوټن تلنلار یا - قانون Newton-Verfahren



د یوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نیوټن – ایتریشن لوکال مربع پولې ته ځي، دا په دې معنا چې

$$|x_{\ell+1} - x_*| \leq c |x_\ell - x_*|^2$$

د پیلټکي x_0 لپاره د x_* په یوه پوره کوچني چاپیریال کې.

لیکونکي: ایپ، هیولیک،

د تیلور-نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سری

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2,$$

سره د یوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپولیشن قاعده کې کیږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r,$$

نو لاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r/f'(x_\ell).$$

د $f'(x_\ell) \neq 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)} \right|.$$

سرلیک

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپریکینډنډ امله د x_ℓ لپاره په یوه د x_* چاپیریال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې محدود دی:

$$c_\ell \leq c.$$

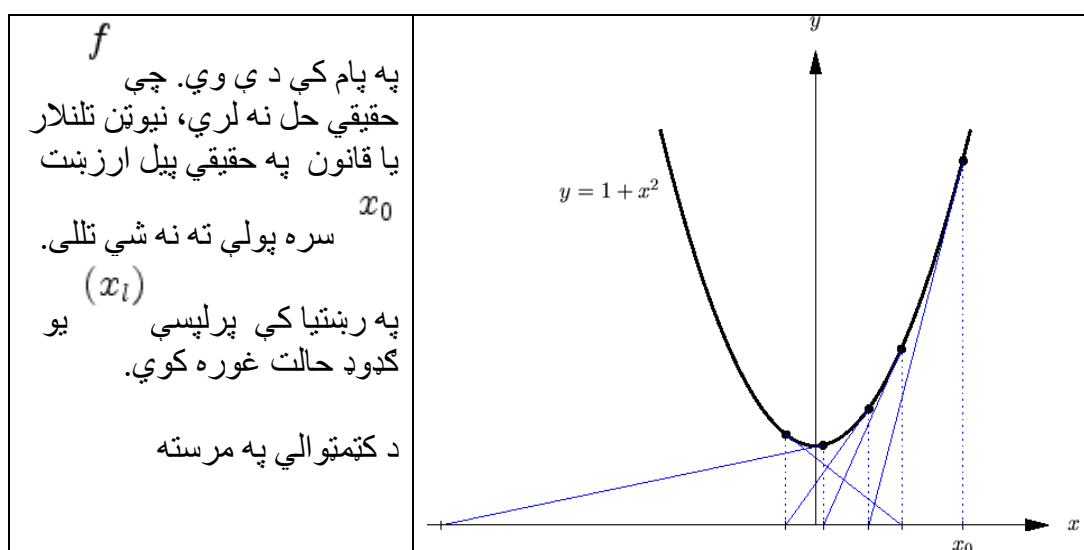
له ی سره د مربع یا څلوریز پولې ته تگ لاس ته راځي. لیکونکي: ایپ، هیولیگ،

که په لاندې مساوات د نیتن قانون وکاروو

$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$

نو اتریشن (پل په پل اصلي حل ته وردردي کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2} \left(x_l - \frac{1}{x_l} \right).$$



$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2} \left(\cot \phi - \frac{1}{\cot \phi} \right)$$

پرلپسې (x_ℓ) کېدی شي اکسپلیڅیت ورکړل شي:

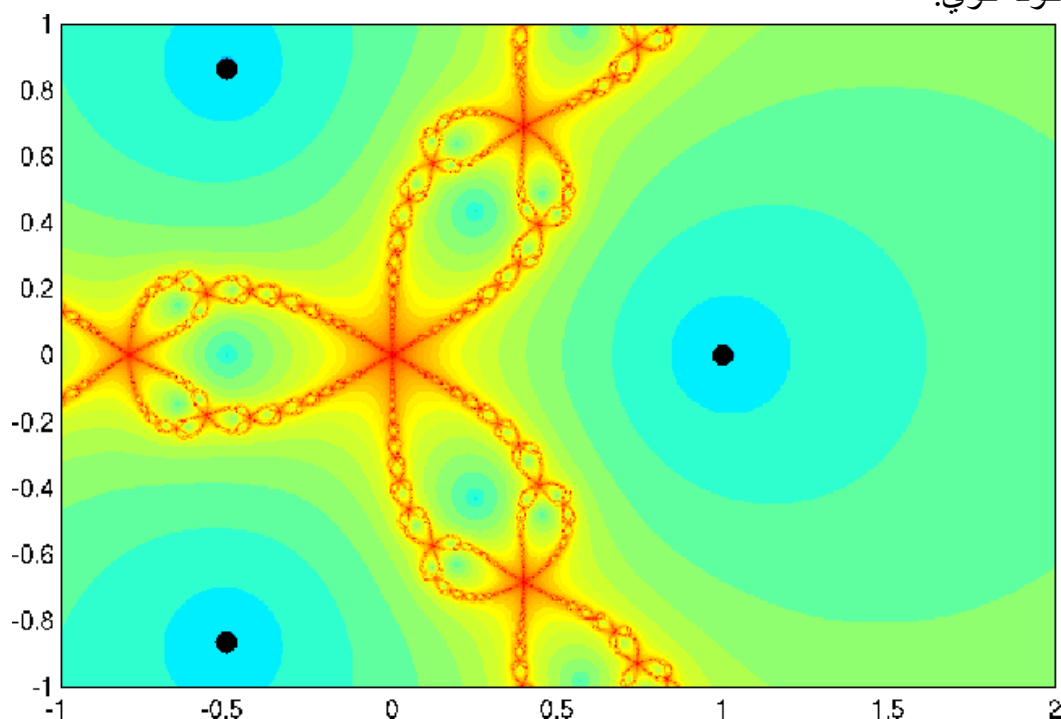
د نیتن-تلنلار د هندسي روښانه ونې څخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د لیلاره پولې ته تلونکې ده.

لیکونکي: ایپ، هیولیک،

لاندې څېره د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نیوټن-اېترشن پولې ته تله بنایي

$$z^3 - 1 = 0$$

د حلونو $z = \exp(2\pi i k/3)$ سره. مختلف رنگونه د پولې ته تلنې ورشو گانې بنایي د همغه یا اړونده صفرخای لپاره. تیاره رنګه شوط ځایونه گرندی پولې ته تله په گوته کوي.



سری د پولې ته تلنې ورشو په روښانه توګه fraktal مات خوي پیژنې

د تیلور پولینوم Taylor-Polynom

د تیلور پولینوم Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

د یوه تابع f انټرپولیری (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a

$$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k = 0, \dots, n$$

ترت نظم n پورې، دا په دې معنا چې

که یو $f^{(n+1)}$ -واړه ناپېرېدونکی مشتق وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

د یوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي. لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

سیده پسي شمیرنه د f او p_n مشتق یو بل سره توافقی یا یو غبریزوالی ښایي. د پاتي غړي R د پوره کیدو یا تکمیل ته سړی د تیلور پولینوم په یوه بل ترم غزوي:

$$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}.$$

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسي $q - f$ یو صفرځای لري د

د ډېروالي سره په $y = a$ کې او یو بل صفرځای په $y = x$ کې، په ټولیزه

نو $n+2$ صفرځایونه. درولې جملې پسي باید $(n+1)$ -م مشتق باید لږ تر لږه یو صفرځای t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t).$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتي غړي غوښتونې ښه راکوي. لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

سرلیک

$$f(x) = \sin x \quad \text{د ساین تابع مشتقونه دي}$$

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \dots$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \dots$$

سره لومړي د تیلور پولینومونه د ساین تابع دي.

$$p_1(x) = x$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

په ورته توګه د کوساین تابع لپاره هم باور لري

$$p_0(x) = 1$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

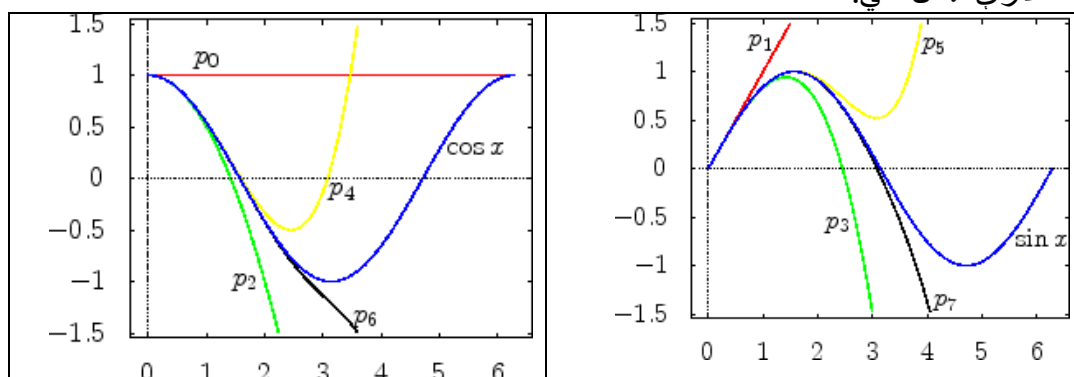
نږدې شمېرنه یا اېروکسیمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقیق دی. د بېلګې په توګه کېدای شي د نږدېونې ناتیګاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\dots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5!} 0.1^5 \leq \frac{1}{12000000} \leq 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د خپرې څخه چې لیدل کیږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د جګو درجو سره پوره ټیک یا دقیق وي. په جدول کې د x - ارزښت لپاره ناتیګاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

سرلیک

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

لیکونکي: ایپ، هیولیک،

حقیقي د تیلور لړۍ Reelle Taylor-Reihe

په یوه ټکي x_0 کې د یوه ناپای ډېرواره مشتقو تابع f د تیلور لړۍ د یوې په توان لړۍ یوه وده ده:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

د $x \in \mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په یوه انټروال $(x_0 - r, x_0 + r)$ کې مطلق پولي ته تلونکي دي او د $|x - x_0| > r$ لپاره پولي ته نه تلونکي دي. د $|x - x_0| = r$ لپاره به له نورو څېړنو د لړۍ پولي ته تلنې په هکله ویناوي ناشونې دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بنديز) r د پولي ته تلنې یا کونورگنت وړانګې په نامه یادېږي او د فرمول

$$r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

سره شمېرل کيږي. له دې سره ارزښتونه $r = 0$ او $r = \infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورگنت انټروال یا تش دی او یا ټول $\mathbb{R}$ دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

د ریښې قضیې په بنسټ دی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \right|} = \frac{1}{r} |x-a|.$$

په توګه د $|x-a| < r$ لپاره د تېلور-اړی یوې ته ځي او د $|x-a| > r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a| = r$ لپاره نورې څېړنې اړیښي دي یا نورو څېړنو ته اړتیا ده. لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

تابع

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

په 0 کې برابر ډوله ناپېرېدونکې ده. دا پسي دپوره ایندکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د یوه مناسب پولینوم p_n سره. دا چې د $x \rightarrow 0$ (همداسې د $1/|x| \rightarrow \infty$)

(لپاره اکسپوننشل تابع نسبت یوه پولینوم ته په قوت یا قوي جګيږي، نو ټول پولینومونه په $x = 0$ ځای کې ارزښت 0 لري. اړونده تیلور-لړۍ نوله دي امله صفر لړۍ ده

سرلیک

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k.$$

دا چې د $x \neq 0$ لپاره $f(x) \neq 0$ دی، نو د تیلور-لړۍ د f سره فقط د $x = 0$ لپاره یو بل سره برابر یا یو غریز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه $0 < r$ ده.

لیکونکي: اپې، هیولیګ،

$$f(x) = \exp(x) \quad \text{اکسپوننشل تابع}$$

$$f^{(n)}(x) = \exp(x) \quad \text{لاندې مشتق لري}$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1.$$

د دې په تعقیب د اکسپوننشل تابع د تیلور-لړۍ لاندې ښه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

دا چې

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0,$$

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تیلور-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي یا کونورګنت ده.

لیکونکي: اپې، هیولیګ،

سرلیک

د بیلگې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په $a = 4$ وديز کيږي.

ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړيږي:

$-\frac{1}{2} x^{-3/2}$	=	$f'(x)$
$\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2}$	=	$f''(x)$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$(-1)^n 2^{-n} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}$	=	$f^n(x)$

په وديزې ټکي د قيمت ايښوونې يا -وضع کونې سره سړی د ټيلور-ضريبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} 2^{-2n-1}.$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16} (x-4) + \frac{3}{128} (x-4)^2 + \cdots.$$

د دې لپاره چې د ضريبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نيسو

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2n} 2^{-2n} \leq c_n \leq \frac{1}{2} 2^{-2n}.$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1/(4n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{c_n} \leq \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1/2}.$$

سرلیک

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چې د لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

لیکونکي: اپې، هیولیگ،

د اویلر فرمول

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t$$

کیدۍ شي د تیلور-ودیزینې په مرسته

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

د کوساین - او سین توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(it)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{i^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(it)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{i^4 t^5}{5!}, \dots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!}$$

$$i \sin t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زیاتون یا جمعې له لارې د تیلور-ودیزینې له لارې د اویلر فرمول لاس ته راوړو

$$\begin{aligned}
 \exp(it) &= 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} \cdots \\
 &= 1 - \frac{t^2}{2!} \pm \cdots + i\left(t - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots\right) \\
 &= \cos t + i \sin t.
 \end{aligned}$$

لیکونکي: اپې، هیولیک،

د لوگاریتم تابع

$$f(x) = \ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

په دې پسي مربعیز د تیلور-پولینوم په ټکي $a = 1$ کې دی

$$p(x) = 0 + (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$

باقی - یا پاتې غړی دابنه لري

$$\begin{aligned}
 r(x) = f(x) - p(x) &= \frac{1}{3!} f'''(\xi) (x - 1)^3 \\
 &= \frac{1}{3\xi^3} (x - 1)^3
 \end{aligned}$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناتیځاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)| \leq \frac{1}{3} \left| \frac{x - 1}{\min(1, x)} \right|^3.$$

سرلیک

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتيکاوۍ دۍ

$$\leq \frac{1}{3} \left| \frac{1/4}{3/4} \right|^3 = \frac{1}{81}.$$

ليکونکي: هيوليگ،

بينوميال لړۍ Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$

سره يوه تيلور-لړۍ لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

د $|x| < 1$

لپاره، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}$$

ټوليز شوی بينوم ضريب دۍ

ليکونکي: اپ، هيوليگ،

دا تړلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

سرلیک

لړۍ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

د وېش قضیې

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| = |x| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - k}{k + 1} \right| = |x| < 1.$$

له مخې پولې ته ځي
لیکونکي: اپې، هیولیګ،

د تیلور لړۍ مشتق او انتیګرال

Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د یوې د تیلور-لړۍ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

کېدی شي غري ډوله یا یې غري په غري مشتق او انتیګرال ونيول شي:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} (x - a)^k$$

$$\int f(x) dx = c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{k} (x - a)^k.$$

په دواړو عملیو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغیره پاتېږي.

لیکونکي: هیولیګ، کرایڅ

سرلیک

د بینوملری

$$(1+t)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} t^3 + \dots,$$

خڅه د $\alpha = -1/2$ او سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} x^{2k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{5}{16} x^6 + \dots \end{aligned}$$

د انتیګرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نیولو سره د غړي په غړي انتیګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \arcsin \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots \end{aligned}$$

لیکونکي: اپې، هیولیګ،

د انتیګرا

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

نږدې ډوله شمیرنه د تیلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راوړي

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

د نومړيکي نږدېونې پخ حيث د

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt$$

لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تیلور-لړۍ ضرب Multiplikation von Taylor-Reihen

د تیلور - لړۍ کېدې شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x-a)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

د لاندې سره

سرليک

$$c_k = \sum_{j=0}^k f_{k-j} b_j .$$

د ضرب د کونورگنت وړانگه د دواړو ضریبونو د پولې ته تلنې وړانگې د مینیموم سره
برابره ده.
لیکونکي: ، هیولیک، کرایخ

د لاندې تابع د تیلور – لړۍ شمیرنې ته

Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t} \cos(\omega t)$$

سری کړی شي د اکسپوننشل تابع د تیلور – لړۍ او د کوساین –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \dots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \dots$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t} \cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!} t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!} \right) t^3 + \dots$$

$$e^{-t} \cos(\omega t) = \operatorname{Re} (e^{(i\omega - 1)t})$$

هم و کارول شي:

بدیلي کېدی شي

$$e^{-t} \cos(\omega t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega - 1)^k t^k}{k!} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left(1 + (i\omega - 1)t + \frac{(i\omega - 1)^2}{2!} t^2 + \frac{(i\omega - 1)^3}{3!} t^3 \dots \right) \\
&= 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!} t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{3!} t^3 + \dots
\end{aligned}$$

لیکونکي: اپې، هیولیگ،

د تیلور-لړۍ وېش Division von Taylor-Reihen

د دوه تیلور - لړیو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k / \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k, \quad g_0 \neq 0,$$

د ضریبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کتوتوالي

$$(q_0 + q_1 u + \dots)(g_0 + g_1 u + \dots) = f_0 + f_1 u + \dots, \quad u = x - a,$$

څخه وټاکل شي:

$$q_0 g_0 = f_0 \longrightarrow q_0$$

$$q_1 g_0 + q_0 g_1 = f_1 \longrightarrow q_1$$

⋮

$$q_n = (f_n - q_{n-1}g_1 - \dots - q_0 g_n) / g_0 \longrightarrow q_n.$$

لیکونکي: هیولیگ، اېریش

$$q(x) = \tan x$$

د 5 تر نظم پورې وډیزوني لپاره ږدو:

سرلیک

$$(q_1x + q_3x^3 + q_5x^5 + \dots) \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right)}_{\cos x} = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناچوره (طاق) دی، دا په دې

$$q_0 = q_2 = \dots = 0$$

معنا چې

د ضریبونو له پرتلې څخه لرو:

$$q_1x = x \longrightarrow q_1 = 1,$$

$$\left(-\frac{q_1}{2} + q_3\right)x^3 = -\frac{1}{6}x^3 \longrightarrow q_3 = \frac{1}{3},$$

$$\left(\frac{q_1}{24} - \frac{q_3}{2} + q_5\right)x^5 = \frac{1}{120}x^5 \longrightarrow q_5 = \frac{2}{15}.$$

لیکونکي: هیولیک، ابریش

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه

Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د یوه راشنل تابع $r(z)$ د تیلور-ودیزېنه په ټکي $z = a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معنا چې r د یوه پولینوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j-1} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

د یوگونو زیاتونونو (د جمعي اعضاوې) د کونورگنت وړانګې د وډیزېنې ټکي د قطب

نقطو د واټن $|u - a|$ سره برابره ده
لیکونکي: کلاوس هیولیک

وډیزېنه یا وده د بینوم لړۍ یو ځانګړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u - z)^j} = \frac{1}{((u - a) - (z - a))^j} = (u - a)^{-j} (1 + x)^{-j},$$

$$, \quad x = -\frac{z - a}{u - a}.$$

بدیلي کېدې شي په ټکي $z = a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n -م د تیلور ضریبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j \cdot (j + 1) \cdots (j + n - 1)}{n!} = \binom{n + j - 1}{n} (u - a)^{-j - n}.$$

د

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n + j - 1}{j - 1}^{1/n} = 1$$

له امله د کونورگنت یا پولې ته تلنې وړانګه $|u - a|$ ده.
لیکونکي: کلاوس هیولیک

د بنووني لپاره د

$$r(z) = \frac{1}{z^2 - z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1 - z}$$

وده په $a = 3$ وټاکل شي. د لومړي ترم لپاره د تولیز فرمول څخه د $u = 0$ او

$j = 1$ سره لاندې د تیلور n -م ضریب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0} (-3)^{-(n+1)},$$

سرلیک

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} ((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3.$$

دا ترې لاس ته راغلي هندسي لړۍ کېدې شي سیده هم لاس ته اړورل شي. دا د دویم ترم په بنسټ بنوول کېږي. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} ((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2.$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راځي

$$\frac{1}{z^2 - z} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2).$$

لیکونکي: کلاوس هیولیک

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه

Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

$$g(0) \neq 0$$

که وي، نو کېدې شي د ایترېشن له لارې

$$f \leftarrow 2f - gf^2$$

$$f = 1/g$$

$$f(x) = 1/g(0)$$

وده وشمېرل شي.

څخه په وتو د معکوس ارزښت

له

د لټه په هر پل کې د ټیکو ترمونو تعداد یا ګڼ،ن دوه برابره کېږي.

$$\frac{1}{f} - g = 0$$

دا متود د نیوټن تلنلار د د یوه حل ټاکل په ګوته کوي

لیکونکي: کلاوس هیولیگ، اپیرین

د پولي ته تلنې وینا کیدی شي د کتوتوالي

$$f_{\text{neu}} - \frac{1}{g} = -g \left(f_{\text{alt}} - \frac{1}{g} \right)^2$$

حخه ولوستل شي، خکه چې له $f_{\text{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\text{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي

لیکونکي: کلاوس هیولیگ، اپیرین

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تیلور ودیزینه کېدی شي لکه چې په تعقیب یې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6), \quad f_0 = 1$$

خخه په وته لاس ته راځي

$$f_1 = 2 \cdot 1 - g \cdot 1^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$

$$f_2 = 2\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4\right) - g\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4\right)^2 + O(x^6)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6).$$

سملاسي له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټيک دي.

سرلیک

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

د سره له ضرب پسي د تانجنت لړۍ راكوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \dots$$

ليكونكي: كلاوس هيوليگ، اپيرين

د معكوس تابع د تيولور وديزيينه

Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د يوه تابع f د معكوس تابع $g(x)$ د تيولور ضريبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټكي

$$b = f(a)$$

كې كېدى شي د

$$g(f(x)) = x$$

له مشفوني و ټاكل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b) f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b) f'(a)^2 + g'(b) f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

⋮

دا منځ ته راغلي مساوات كېدى شي تل پسي sukzessive د مشتقونو

$$g'(b), g''(b), \dots$$

پسي وشمېرل شي.

ليكونكي: كلاوس هيوليگ، اپيرين

د $f(x) = \sin x$ او $g(x) = \arcsin x$ لپاره لرو $a = 0$

$$g(0) = 0$$

$$g'(0) \cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0) \cos^2 0 - g'(0) \sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$g'''(0) \cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0) \cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونیول شي،
 چې د یوه ناجوره یا طاق تابع په څېر - یا معکوس تابع ناجوره ده، نو سملاسي یې
 وديزیږنه تر پنځم ترم پورې ټیک ده.
 لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپیرین

د تیلور ځانګړې لړۍ Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

سرلیک

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots \right) \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arctan} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots \quad |x| < 1$$

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د پاد نږدې ارزښت شمېرنه Pade-Approximation

د یوه تابع $f(z)$ د (m, n) پاد-نږدې ارزښت شمېرنه یو راشنل تابع دی د صورت - یا ماتېاندي درجي m او مخرج یا ماتلاني درجي n سره، چې د $z \rightarrow 0$ لپاره تر جګو درجو ترمونو همغږیز کیږي یا سره برابرېږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1}).$$

پولینومونه $p(z) = a_0 + \dots + a_m z^m$ او $q(z) = b_0 + \dots + b_n z^n$ کېدی شي د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي. لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \dots) - (c_0 + c_1 z + \dots)(b_0 + b_1 z + \dots) = cz^{m+n+1} + \dots,$$

$$\begin{aligned}
 & \text{او لاس ته راځي، چې د } k \leq m+n, \quad z^k, \text{ ضریبونه باید ورک شي:} \\
 & k=0: \quad a_0 - c_0 b_0 = 0 \\
 & k=1: \quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0 \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

دا کښته – یا لامدې ټاکل شوی هوموچېن کرښیز مساوات سیستم ($m+n+1$)

مساوات د $m+n+2$ متحولو یا ناکلو سره (راځوي، چې تل حل لري. f)
 دا چې په صفر کې قطب نه لري، راځوي چې $a_0 = 0$ ، $b_0 = 0$ راځوي. له دې
 امله کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توپیرېدونکي ضریبونه د
 1 سره برابر ایښول کېښولی شي.
 لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m, n) -پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سیستم په
 لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

...

$$0 = a_m - b_m - \dots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \dots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

...

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \dots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 .$$

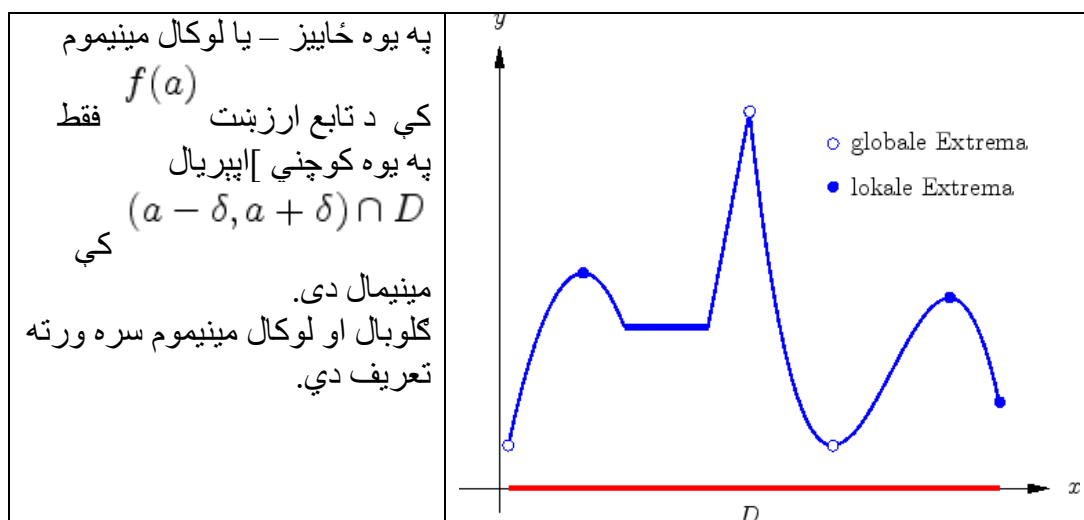
د حل لپاره د بیلګې په توګه لاس ته راوړی شو

$$r_{1,1}(x) = \frac{1 + x/2}{1 - x/2}, \quad r_{2,2}(x) = \frac{1 + x/2 + x^2/12}{1 - x/2 + x^2/12}.$$

لیکونکي: اپې، هیولیګ

اکسترېما (افراطیت) Extrema

تابع f په a کې په یوه ډبرې (سټ) D یو ټولیز یا ګلوبال مینیموم لري، که وي

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$


په یوه رابند انټروال د یوه ټوټه ډوله ناپېرېدونکي او مشتقو تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفر ځایونو، پرېکېدونکي ځایونو او یا په ژي ځایونو کې رامنځ ته شي. تیوپ یا ډول یې کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او د ت ابع ارزښتونو د پرتلې له لارې پیداشي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د یوه ناپېرېدونکي مشتقو تابع لپاره د لوکال مینیموم سره د تعریفوړشو په دننني ټکي a کې د مشتق لپاره لرو

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \geq 0}} \frac{\overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\geq 0}}{h} \geq 0$$

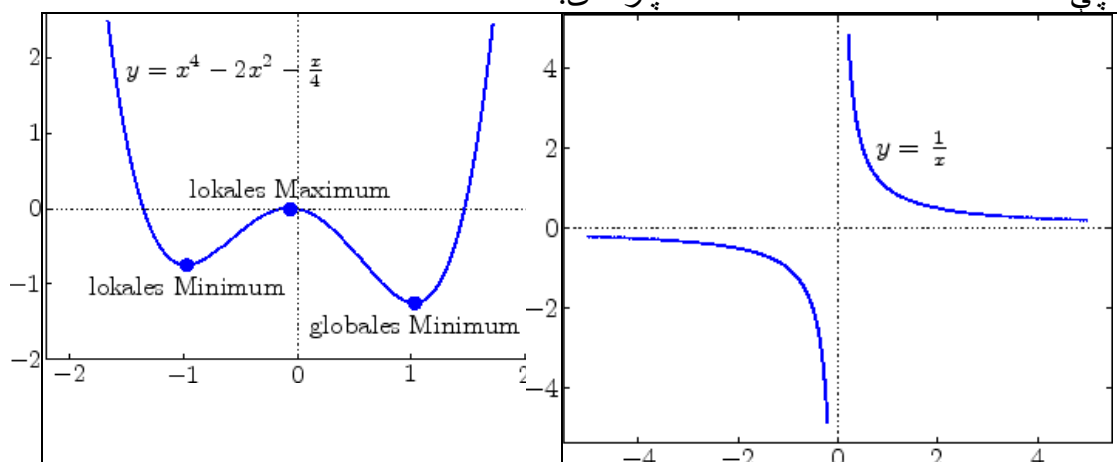
او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \leq 0}} \frac{\overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\geq 0}}{h} \leq 0$$

نو $f'(a) = 0$. یعنی د تعریف ورشو په دننه کې په یوه لوکال افراطیت کې باید مشتق صفر وي یا f هلته مشتقور نه وي. لیکونکي: هیولیک، هیورنر

په لاندې کې به یو څو ټیپیکي حالتونه وڅیړل شي.

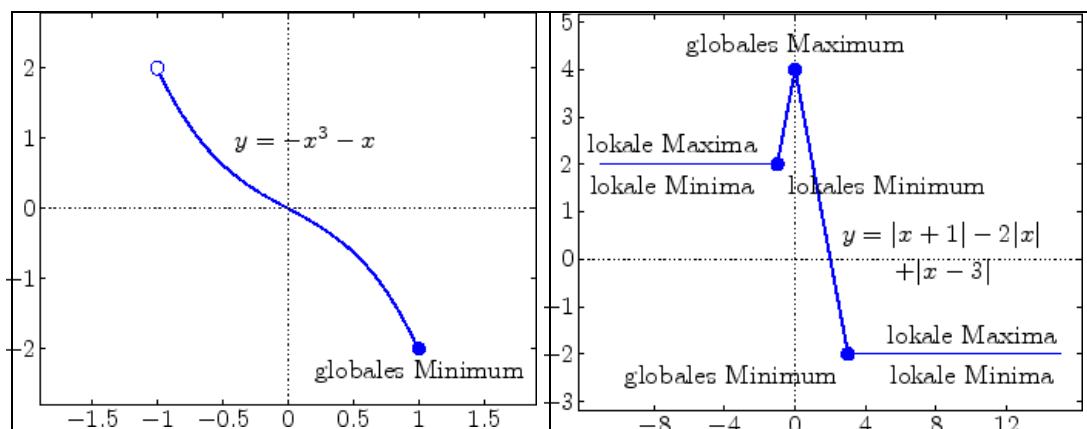
تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مینیمیا او یو متکسیمیا لري. مینیموم د کوچني تابع ارزښت سره گلوبال دی. یو کلوبال ماکسیموم شتون نه لري، ځکه چې $f(x) \rightarrow \infty$ د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره دی.



تابع $f(x) = 1/x$ د $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره اکستیم یا افراطي ارزښتونه نه لري. که یو تابع په یوه واز انټروال ثابت وي، نو دا ځایونه هم (لکال) ماکسیمیا او هم (لوکال) مینیمیا دي.

سرلیک

یوه کره همغږیز - یا مونوټون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژۍ ټکو کې نیول کیږي، که دا تعریفورشو پورې تعلق ولري یا اړوند وی.

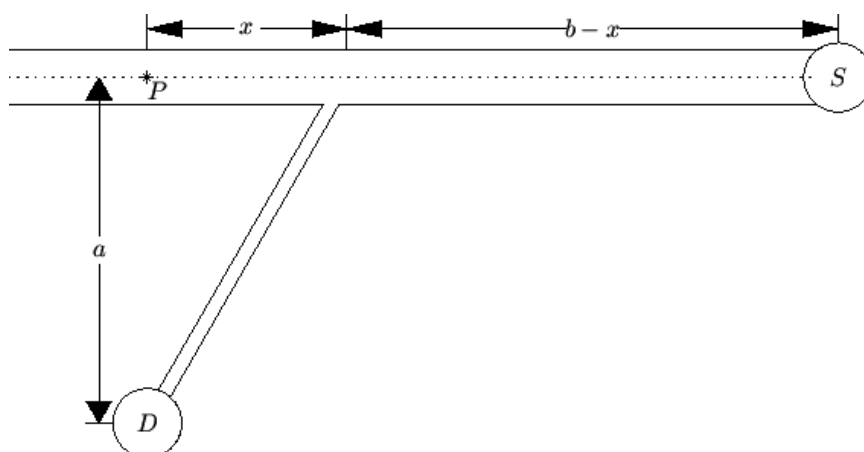


لیکونکي: هیولیک، هیورنر

له یوه کلي D څخه یوه ښار S ته یوټرنسړک جوړیږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته یو سړک جوړ دی له ښار څخه تر ټکي P پورې لار، هغه سړک چې کلي ته بل یا پسې نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.

دا سیده کرښیز ټوټه لار باید داسې جوړه وي، چې د ښار گړندی رسیدنه شونې یا تضمین

وي، که د یوه منځني [ټکټیا km/h $v_a = 120$ $v_n = 60$ د په واټن په نوې ځنګیز یا فرعي سړک څخه لار شو.



د P او د څنګیز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مینیمم – یا کمونې له لارې اړین وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفر ځایونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow x_m = a/\sqrt{3}$$

یعنې ممکنه لوکال اکسټریم ځای په $(0, b)$ کې. ایا چې دا مینیموم دی، باید د خوزښت وخت سره په انټروال کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}, \quad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}, \quad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پایټکو لپاره باور لري

$$t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2$$

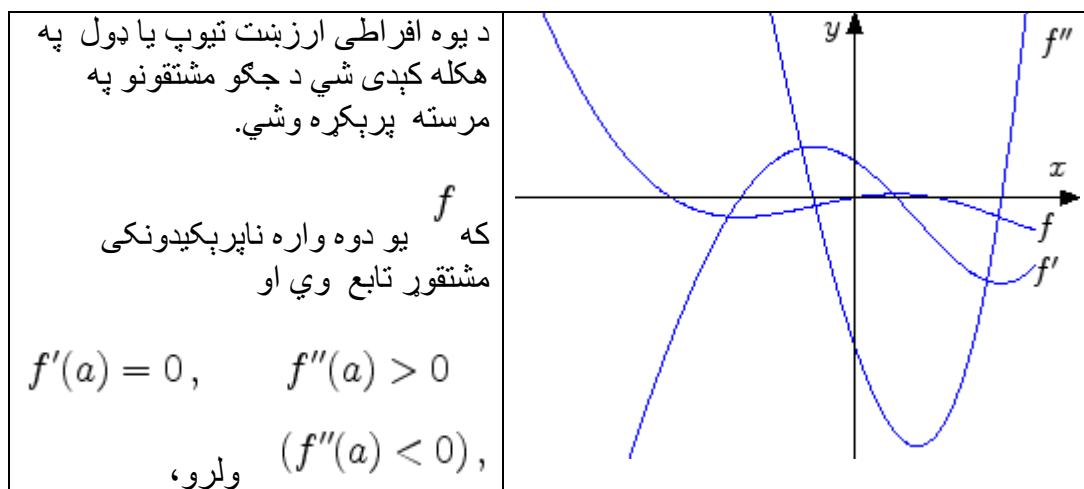
$$\Leftrightarrow a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0.$$

اخرنۍ مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټیمال یا اغیزمن دی،

$$b \geq a/\sqrt{3} \quad (0, b)$$

که په غوره انټروال کې پروت وي. په بل حالت کې به مینیموم په ژۍ ټکي b ته، یعنې ښار ته د سیده ترڅنګ، سره ورسېږي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د اکستریم – یا افراطي ازبنتونو ازماښت **Extremwerttest**

نو f په a کې یو ځاییز مینیموم (ماکسیموم) لري. که د a په ځای کې دویم مشتق ورک شي یا صفر شي، نو باید جگ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

نو f په a کې ټیک هلته یو افراطیت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې f په a کې یو لوکال یا ځای اړونده ماکسیموم همداسې مینیموم لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د ښوونې لپاره و f ته سړی د a په ځای کې د $n - 1$ درجې د تیلور-پولینوم کاروي د باقي یا پاتې

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x - a)^n$$

غري سره او په پام کې نیسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره (او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه یا برابره مخنښته ولري.

د ناجوړه یا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلنې کې د پورته مساوات
بنی اړخ یو د مخنځېني بدلون لري. د دې پسي $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنځېني
بدلون لري او a د f افراطي ځای نه دی.

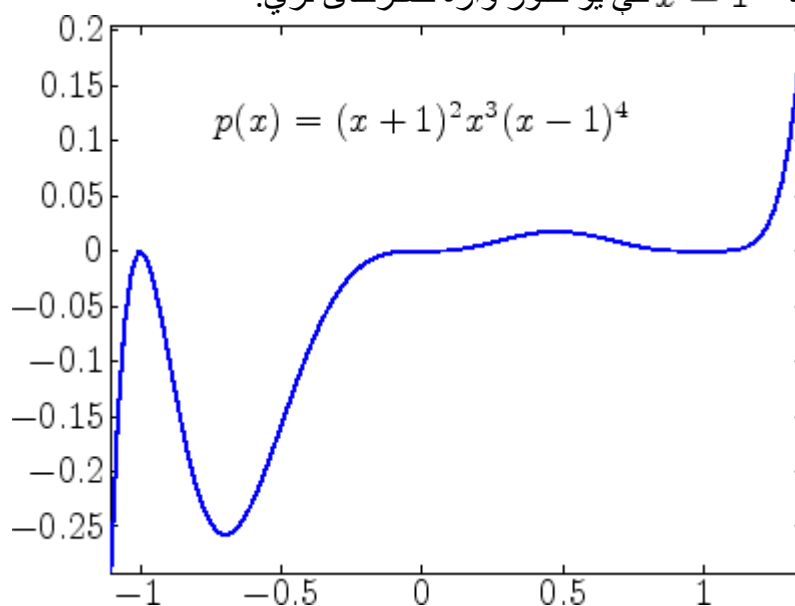
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x - a)^n > 0$ دی. د $f^{(n)}(a) < 0$ په
حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دی $f(x) < f(a)$

لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې یو لوکال ماکسیموم لري. حالت
 $f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه یو لوکال میډیموم راکوي.
لیکونکي: ایډ، هیولیک

پولینوم

$$p(x) = (x + 1)^2 x^3 (x - 1)^4$$

په $x = -1$ کې یو ډبل صفر ځای، په $x = 0$ کې یو درېواره صفر ځای لري او
په $x = 1$ کې یو څلور واره صفر ځای لري.



باور لري

په $x = -1$ کې p یو ماکسیموم لري. په $x = 1$ کې p یو مینیموم، ځکه چې

$$p(1) = \dots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0.$$

بِالْآخِرَةِ p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او په $x = 0$ کې یو مخنځې بدلون له امله په سرچینه کې افراطي ځایونه نه لري.

لیکونکی: ایپ، ہیولیک

د دې ورکړ شوي
غوځنموني په مرسته دې
د مربعیز ټوټه
کارتونونو څخه دې
ممکنه د لوی حجم صندوق
جوړ شي

پکی یا حجم دی

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

جگوالی سور اوږدوالی

د مشتق صفر ځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

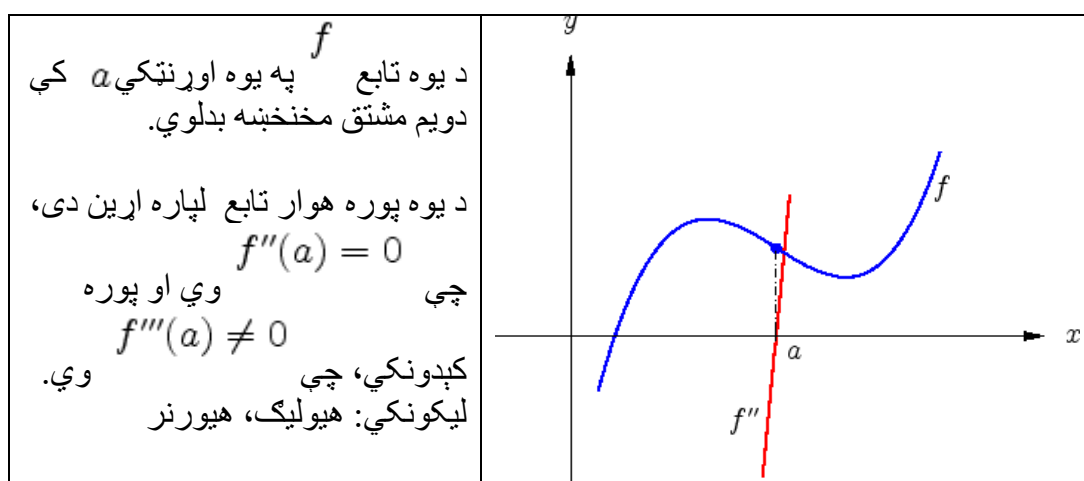
يعني ممکنه افراطي ځایونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}.$$

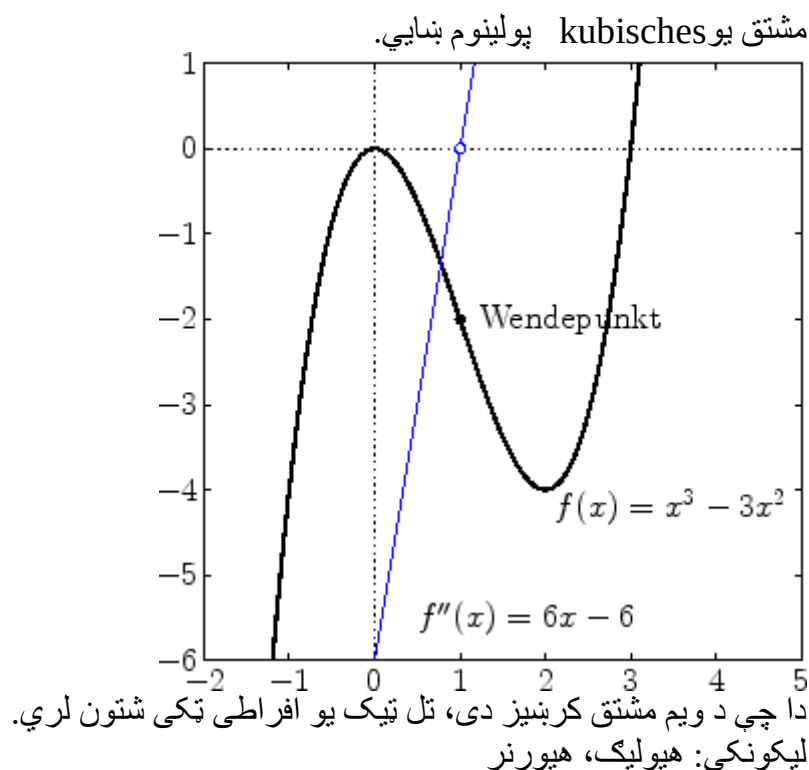
دا چې د ژۍ ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکۍ يا حجم صفر 0 دی، صندوق د $h = 1/6$ لپاره ماکسیمال ډکۍ يا حجم لري.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

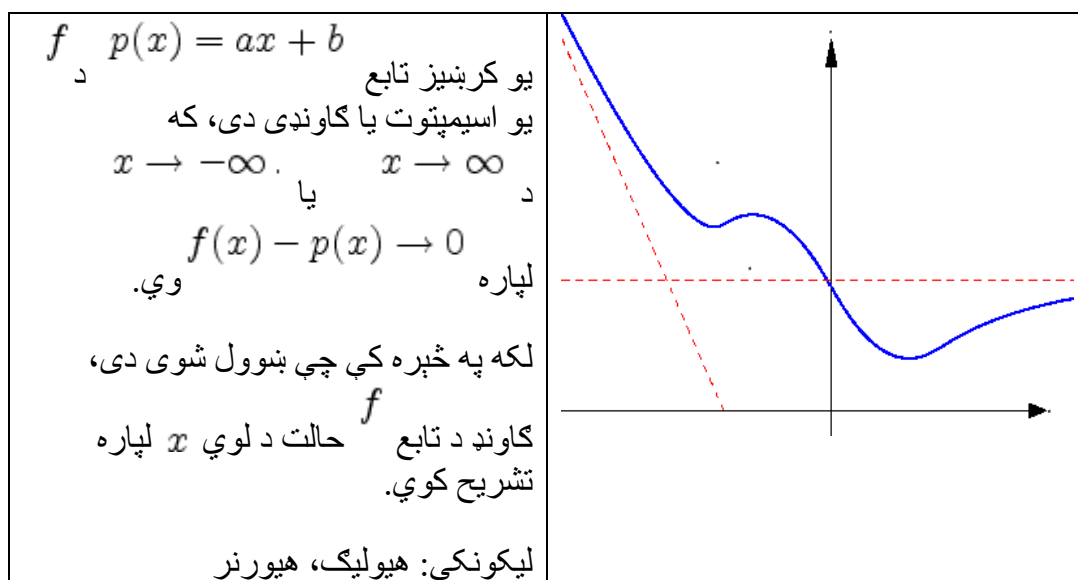
Wendepunkte (نقطه انعطاف) اوړونټکي



سرلیک



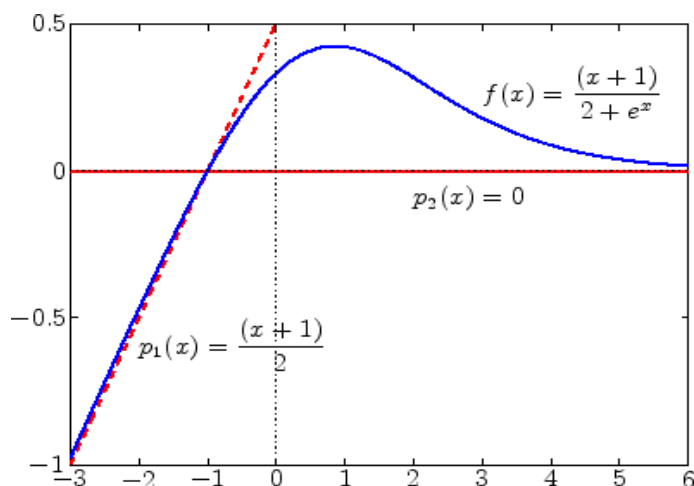
اسیمپتوتي (یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډی) Asymptoten



د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \rightarrow \pm \infty$ ځانله تر څېړنې نیسو.



د $x \rightarrow \infty$ لپاره دی

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) \cdot e^{-x}}{2 \cdot e^{-x} + 1} \\ &= \frac{0}{0+1} = 0. \end{aligned}$$

له دې سره د x محور ګاونډ یا اسیمپټوت دی

د $x \rightarrow -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هڅیږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپتوتي
Asymptoten rationaler Funktionen

یو راشنل تابع

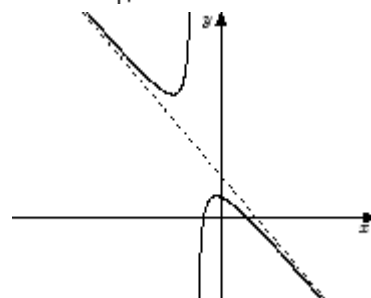
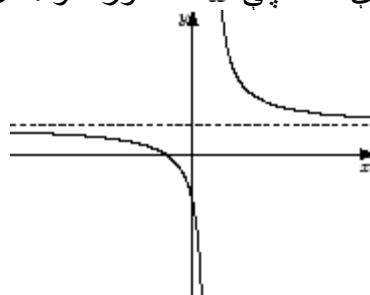
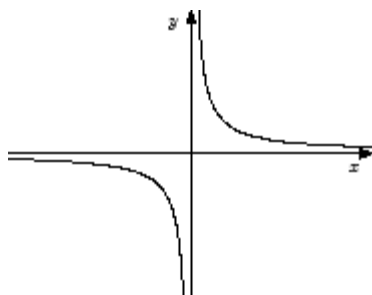
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

ټیک هلته یو کرښیز ګاونډ لري، که $\text{Grad } p \leq \text{Grad } q + 1$ وي.

د $\text{Grad } p < \text{Grad } q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} r(x) = 0,$$

دا په دې معنا چې x - محور ګاونډ دی.



د $\text{Grad } p \leq \text{Grad } q + 1$ لپاره سری کرښیز ګاونډ د پولینوم وېش سره لاس ته راوړي:

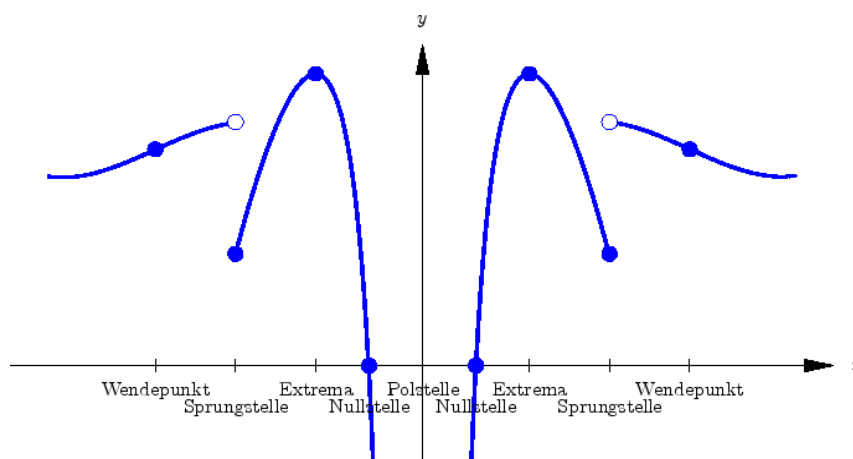
$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د $\text{Grad } q$ سره. $\text{Grad } \tilde{p} < \text{Grad } q$ د $\text{Grad } p = \text{Grad } q$ وي. $(a = 0)$ دی، که Grad د یو

که د صورت درجه د مخرج له درجې له یو زیات وي، نو $r(x)$ د لوی x لپاره د یوه ≥ 2 درجه وي اړوکسيمي کيږي. پولینوم سره، چې لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د کړو یا منحنيو خبرې یا بحث **Kurvendiskussion** د یوه تابع د څومره والي حالت باندې قضاوت ته لاندې نڅېنې کیدی شي رامنځ ته شي:

- Symmetrien سیومتری
- Periodizität تېل بیرته راگرځیدنه
- Unstetigkeitsstellen پرېکیدنوالی ځایونه
- Nullstellen (→ Vorzeichen) صفر ځایونه (مخنځینه →)
- Extrema (→ Monotoniebereiche) اکسترېما (همغږیزوالي ورشوگاني →)
- Wendepunkte (→ Konvexitätsbereiche) اوړونټکی
- Polstellen ننوتلوالی ورشوگاني (→ قطب ځایونه)
- Asymptoten اسپیټوتونه یا گاونډي



د تابع یو اړونده تحلیل د کړو خبرې اترې یا بحث بلل کیږي
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د کړو خبرو اترو د څځندونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin(3x)$$

تر څېړنې نیول کیږي.

$$\sin x = -\sin(-x)$$

سیمتري: داچې دی، نو تابع ناجوره دی

تل بیرته راگرځېدنه یا پریودیځیتي Periodizität: تابع لکه د ساین تابع پخپله 2π -
پریودیکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انټروال $[-\pi, \pi]$ کې راورل کیږي.

د پرېکېدنوالي ځایونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یږخای شوی، له دې امله
پرېکېدنځایونه نه لري.

صفر ځایونه: د زیاتو- یا جمعه نقضیې سره $[-\pi, \pi]$ دی

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3} \sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفر ځایونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.
افراطیت: مشتق

$$f'(x) = 2 \cos x - 4 \sin^2 x \cos x = -2 \cos x + 4 \cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ یا $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره، نو
 $x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او تلېبرته راگرځېدونې ده، ژی ترڅېړنې لاندې نه نیسو.

د دویم مشتق د محنځینې څخه

$$f''(x) = 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کونې له لارې کېدې شي د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی یا د انعطاف ټکی Wendepunkte :

دویم مشتق

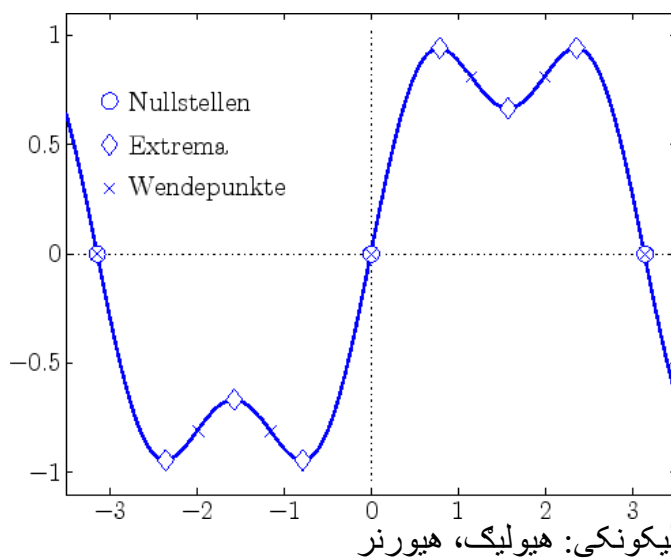
$$f''(x) = 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x = -10 \sin x + 12 \sin^3 x$$

$$\sin x = \pm \sqrt{5/6}$$

صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره یا ، دا په دې معنا چې
 $x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$

دا چې په دې ځای کې دریم مشتق نه ورکېږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99, -0.81)$ ، $(1.99, 0.81)$ او $(-1.15, -0.81)$ کې.

قطبځایونه **Polstellen** : ناپېرېدونکي توابع قطبځایونه نه لري.
 ګاونډي **Asymptoten** : تابع پریودیګی او نه ثابت دی، نو ګاونډي یا اسیپتوت یا مجاورتونه نه لري.



د یوې کرې خبرو یا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخیرني لاندې نیول کیري.

سیومتري : صورت ناجوره او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوره دی، دا په دې معنا چې سرچینې ته سیومتريک دی.

پریودیختي یا (تل) بیرته راگځیدنې: تابع پریودیک نه دی.

برېکښځایونه: د مخرج صورت صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي. له دې

سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ناپربېکښونکی دی.

صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیري.

افراطیت :

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2 - 1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفرځایونه لري، افراطیت فقط لوکال یا ځای اړوند دی. د f د څومره

والي حالت څخه کیدی شي تیوپ یا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \rightarrow -\infty$ د

$x \rightarrow -\infty$ او $x \rightarrow -1$ لپاره دی، باید انټروال $(-\infty, -1)$ یو ماکسیموم

ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لږ تر لږه یو مینیموم لري. نو د مشتق صفرځایونو ته

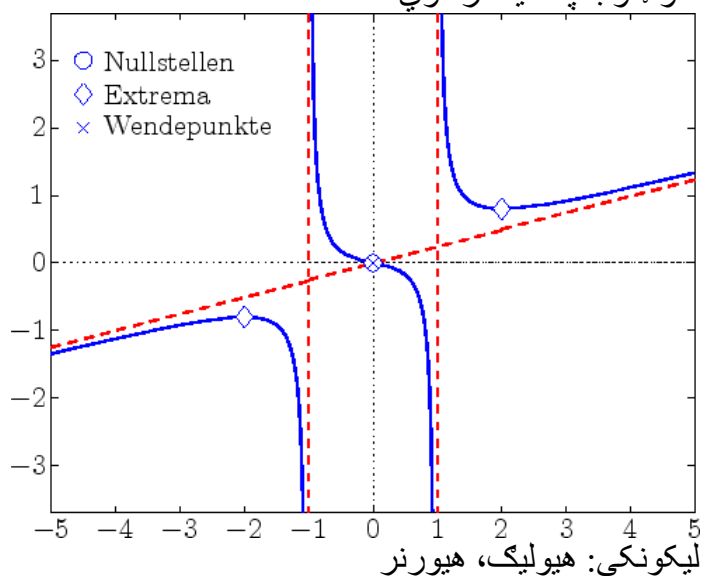
سړی یو لوکال ماکسیموم په $(-2, -4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2, 4/5)$ کې لاس ته راوړي. اوړونټکي یا نقاط انعطاف:

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2 - 1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0, 0)$ یو اوړونټکی دی.

قطبځایونه: تابع په $x = \pm 1$ کې ساده قطبځایونه لري.

اسیمپټوت یا گاونډیتوب: یو د پولینوم وېش $p(x) = 5x/20 + 0 = x/4$ د گاونډیتوب په حیث راکوي



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د کړې خبرو اترو د بنسټولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

څیرل کيږي.

سیمټري: دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمټر و y - محور ته. پریوډیختی یا تل بېرته راگرځېدنه: تابع پریوډیک نه دی.

سرلیک

پرېکېدونکي ځايونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره يوځای شوي ده او له دې امله پرېکېدونکي ځايونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هر حالت مشتق په صفر ټکي کې ناپرېکېدونکی نه دی.

صفر ځايونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت يا زياتيز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفر ځايونه نه شته.

افراطييت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4} \text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0, x \neq 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

برسیره پردې دې افراطي ټکي په $x = 0$ کې، څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلني حالت هم بايد په پام کې ونيول شي.

دا چې $f(x) \rightarrow \infty$ د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه يو گلوبال مينيموم لري، مگر گلوبال مکسيموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کرينتيکال ټکي

$$(-2, 9/e^4) \quad (0, 1) \quad (2, 9/e^4)$$

بنايي، چې گلوبال مينيموم په $x = \pm 2$ کې نيول کيږي. دا چې f په انټروال $[-2, 2]$ کې مينيموم او هم يو مکسيموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0, 1)$ يو لوکال مکسيموم دی.

اورونټکی يا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$$

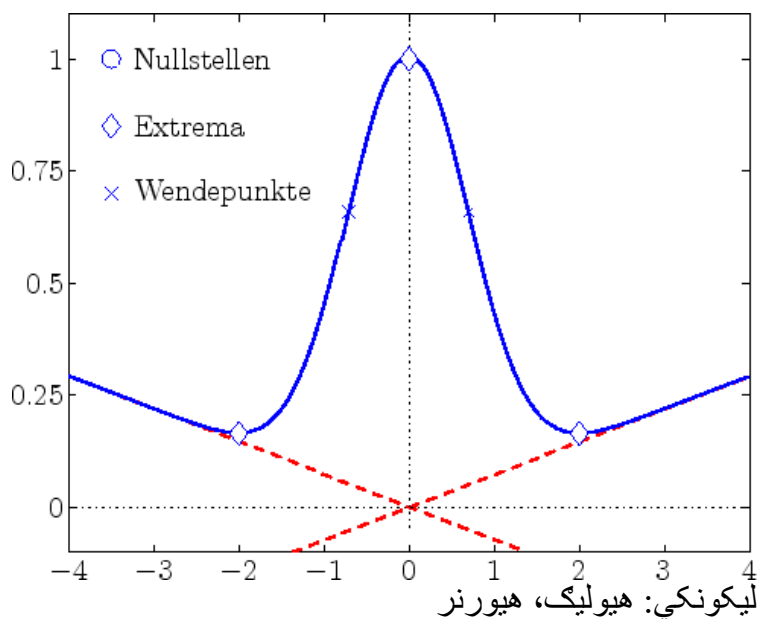
درېم مشتق په دې ځايونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f يو اورونټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2}, e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}e^4} \right).$$

لري.

قطب ځايونه: تابع قطب ځايونه نه لري.

گاوندې يا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور گرندی دی، تابع گاوندېان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.



ریمن-انتیگرال Riemann-Integral

د یوه ناپرېکېدونکي تابع f یو ټاکلی انتیگرال د

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \int_a^b f_{\Delta} = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

له لارې تعریف شوی دی. دلته د

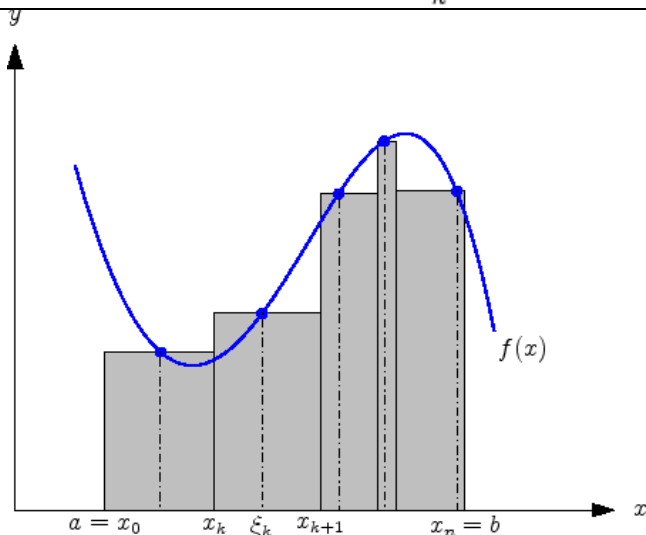
$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

یوه ټوټه کونه بنایي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

یو ماکسیمال انټروال دی او ξ_k په k - م انټروال یو په خوښه ټکی دی. د انتیگرال تعریف په ښی لور زیاتون یا جمعه د ریمن زیاتون یا - جمعه بلل کیږي.



سرلیک

د زیاتیز یا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x) dx$ د f د گراف کښته لورته سطحه په گوته کوي

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، ویپیر

که $f(x)$ ناپېرېدونکی مشتق وړ وي، نو د مشتق شمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_2 - x_1) \max_{x \in [x_1, x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو یوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \rightarrow 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه ټوټې Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو یا ورپسې یل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي، چېرته چې Δ_m د لاندې یا ورپسې ټوټه ونو ټکي $x_i, i = 0, \dots, k_m$ دي او Δ ټکي $z_i, i = 0, \dots, k$ لري، نو د $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ سره باور لري

$$\begin{aligned} \left| \int f_{\Delta} - \int f_{\Delta_m} \right| &= \left| \sum_{j=1}^k f(\zeta_j) \Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i)) \Delta z_j \right| \\ &\leq |\Delta_m| \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} \Delta z_j}_{b-a} . \end{aligned}$$

په ورته تګه باور لري

$$\left| \int f_{\Delta} - \int f_{\Delta_n} \right| = O(|\Delta_n|),$$

او له دې سره

$$\left| \int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n} \right| \rightarrow 0$$

$n, m \rightarrow \infty$

د لپاره . د ریمن - زیاتون نو یوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولي ته تلونکي دي.

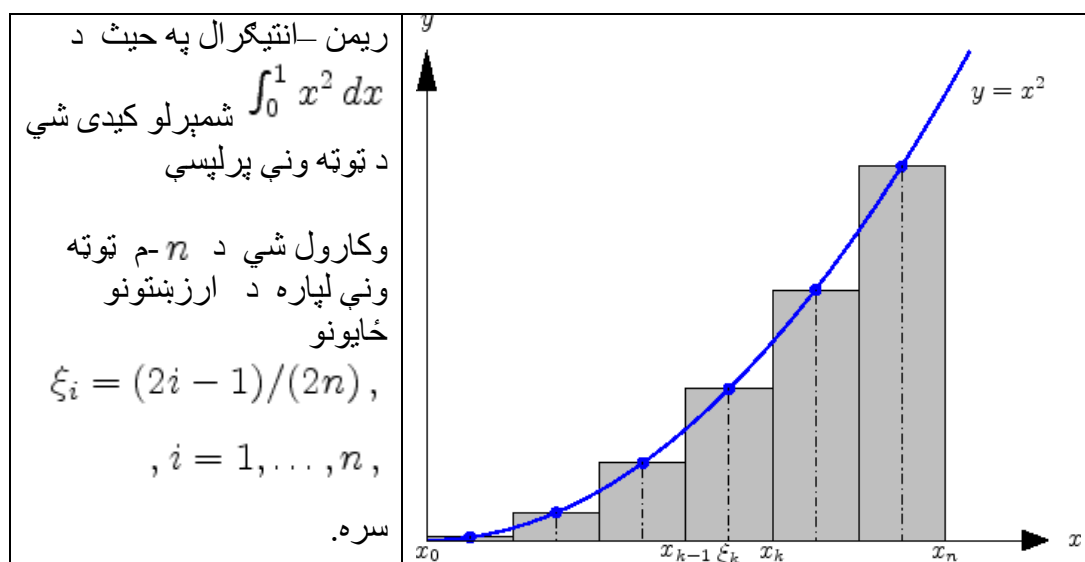
په ورته توګه د دوه پرلپسيو و همغې یا برابري پولي ته تلنه وینوول شي.

د ټوټه ناپرېکېدونکو f بنوونه تخنیکي داسې لږ پېچلي ده. سړی د f د ناپرېکېدنې انټروال بېل یا جدا ترڅېړني نیسي او هلته د برابرډوله ناپرېکېدنې څخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملې په ځای رامنځ ته کيږي او نور دلایل په ورته وګه مخ ته بیولکيږي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر



د تعریف سره سم لاس ته راځي

سرلیک

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right)$$

$$\frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دې سره .
لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د انتیګرال خویونه Eigenschaften des Integrals

دا لاندې ټاکلی انتیګرال دا لاندې خویونه لري :

$$\int f + g = \int f + \int g \quad \int r f = r \int f$$

کربنیزوالس،

$$f \leq g \implies \int f \leq \int g$$

همغریزوالی :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

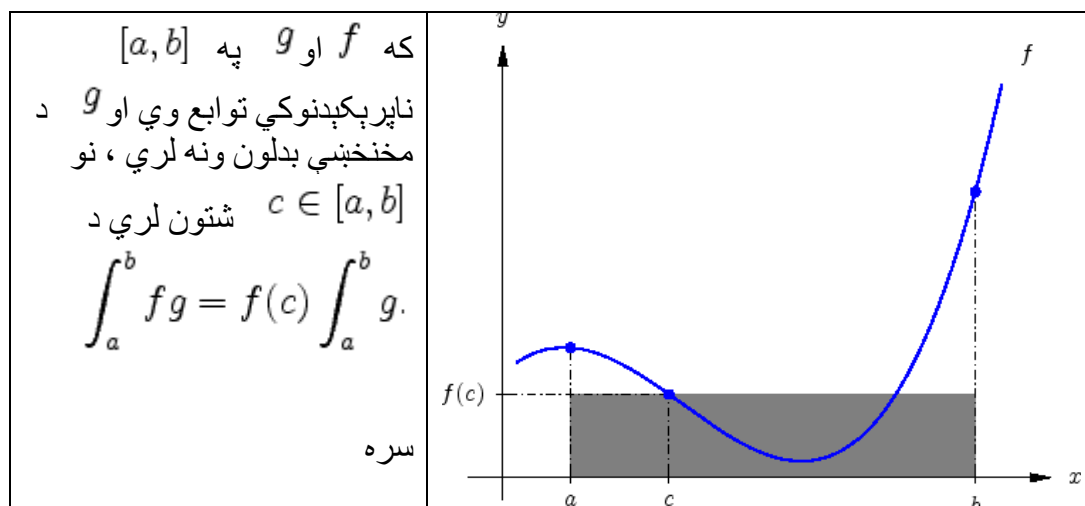
زیاتون یا جمعه

$$\int_b^a f = - \int_a^b f$$

د وروستیو خویونو د همغریزونې له امله سړی تعریفوي: .
لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د انتیګرال شمیرني منځ ارزښت جمله

Mittelwertsatz der Integralrechnung



په ځانګې توګه، لکه په څېره کې چې لیدوړ دي، دی

$$\int_a^b f = (b - a)f(c)$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بې له ټولیزو بندیزونو دي $g \geq 0$ وي. د انتیګرال د اټکل له لارې

$$(\min_{[a,b]} f) g(x) \leq f(x)g(x) \leq (\max_{[a,b]} f) g(x)$$

لاس ته راځي

$$(\min_{[a,b]} f) \int g \leq \int fg \leq (\max_{[a,b]} f) \int g.$$

دا چې f د منځارزېست جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نیسي، نو غوښتونۍ برابروالی راکوي.

په ټولېزه توګه وړاندینونه ده، چې د g مخخېني بدلون نه لري، اړین، لکه د بېلګې

$$\underbrace{\int_{-1}^1 x^2 dx}_{>0} = \int_{-1}^1 x \cdot x dx \neq c \int_{-1}^1 x dx = 0$$

څخه ليدل کيږي.
ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

بنسټيز – يا ساده توابع Stammfunktion

يو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټيز تابع دی، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټيزو تابعو ډېری لپاره، چې د f ناټاکلي انټيګرال بلل کيږي.
د انټيګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F_a(a) = 0$$

د سره يو ممکنه لومړی يا بنسټيزه تابع.
نه ټولو بنسټيزو تابعو ته داسې روښانه د بنسټيزو تابعو اکسپلېځيټ ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp(x^2)$$

يوه بېلګه ده.
ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د انټيګرالشميرنې اصلي جمله يا قضيه

Hauptsatz der Integralrechnung

که F د يوه ناپېرېکېدونکي تابع f بنسټيز يا لومړنی تابع وي، دا په دې معنا چې

$$f = F'$$

وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه ليکنډول

$$\int_a^b f = [F]_a^b .$$

یو بننټیز انټیګرال کېدی شي د انټروال په پای ټکو کې د بنسټیزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسیا کوي وینایو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکه چې د $b = a$ لپاره ارزښت سره سرخوري (دواړه خواوې صفر دي). د کین اړخ لپاره لرو

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f .$$

$$(b + h - b) f(c)$$

د منځ ارزښت جملې پسې یا په تعقیب انټیګرال مساوي دی په $c \in (b, b + h)$ د سره.

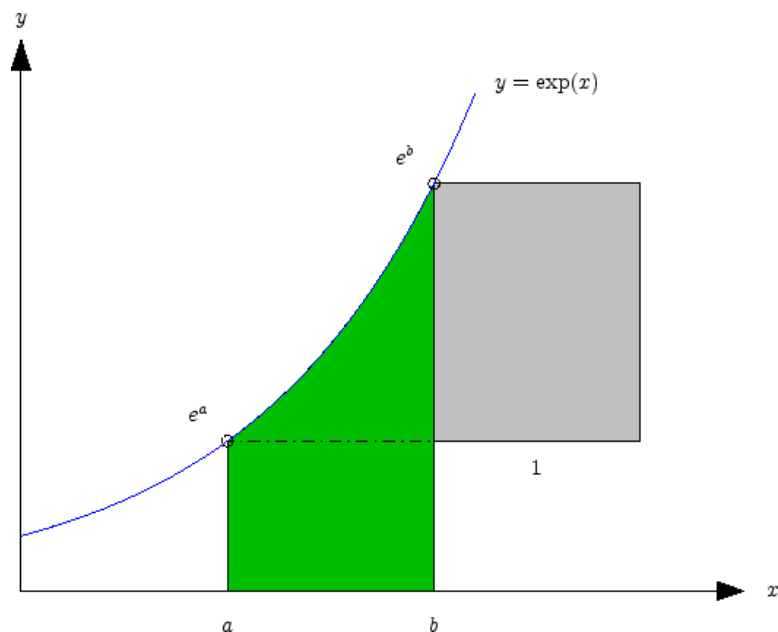
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د بني اړخ د مشتق سره سرخوري یا یو غبریز دی لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a .$$

د a او b ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډیزر (مستطیل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواړن د اوږدوالي په حیث.

سرلیک



د لوکایتم تابع مشتق $F'(x) = 1/x, x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x \, dx = \ln(b) - \ln(a), \quad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ یو بنسټیز تابع $F(x) = \arctan x$ دی. د دې په تعقیب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

د مشتقونې څخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x) = \tan x$ یو بنسټیز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقیب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -[\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د M کتلې یو ستوری یو د کښولو ورشو تولیدوي، چې د هغې له خوا په یوه کتله m یو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي. دلته γ د گراویتیټشن یا راکښنې قوه ده او x د دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره یو لومړنی یا بنسټیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو تن له واټن a و واټن b ته یوړولی شو، باید کار

$$\int_a^b F(x) \, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -[\gamma m M / x]_a^b = \gamma m M (1/a - 1/b)$$

سرته ورسیري.

د a لپاره د ستوري د وړانګې سره برابر او $b \rightarrow \infty$ کېدی شي د برابر ایښوونې له لارې د کینیتیکی انرژي سره چې داسې په نامه د تېښتې چټکتیا v ټاکي دا په دې معنا چې چټکتیا، چې اړین ده، چې د یوه ستوري راکښنفوه پرېښودی شي یا راکښنفوې څخه ووځي:

سرلیک

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \Rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2 \text{ km/s}$ دی .
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د بنسټیزو توابعو لومړني توابع **Stammfunktionen der Grundfunktionen**

لاندې جدول بنسټیزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s, s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln x $
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ټوټه- يا پارشل انټيگرا لونه **Partielle Integration**

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له لارې د ناټاکلي انتیګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتیګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. دلته دې په پام کې ونیول شي، چې د ژی ترم $[fg]_a^b$ ورکیري، که د دواړو توابعو څخه یو یې د انټروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پریودیګي تابع لپاره د پریود اوردوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي. لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} (1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \int 1 \cdot \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} dx \\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c. \end{aligned}$$

په ورته توګه شمیرل کیري

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx &= \left[-x \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} dx \\ &= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

سرلیک

یو لوگاریتمي ضریب د یو حل توته انتیگرالونې له لارې له منځه تلې شي.
د بېلگې په توګه دی

$$\begin{aligned}\int x^n (\ln |x|) dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln |x|) - \int \frac{1}{n+1} x^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln |x|) - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + c.\end{aligned}$$

په دې ډول کېدی شي په خوښه پولینومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k} x^j (\ln |x|)^k$$

په x او $\ln |x|$ کې انتیګرال شي یا انتیګرال ونیول شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د توته انتیګرالونې له لارې کېدی شي د پولینوم درجه کمه شي. د بېلگې په توګه دی

$$\begin{aligned}\int x^n e^x dx &= x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx \\ &= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \int n(n-1) x^{n-2} e^x dx \\ &= \dots \\ &= e^x \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k + c.\end{aligned}$$

په دې توګه نږدې شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n e^{\beta x}$ بڼې ترمونوکمبینېشن په خوښه انتیګرال شي یا یې انتیګرال ونیول شي.
لیکونکي: هیولیک، کوپف

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره توتېه انتیگرالونې له لارې انتیگرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int nx^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx \\ = \dots$$

د تکرار توتېه انتیگرالونې له لارې بالاخره ضریب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوبه پولینوم توابعو لومړنۍ تابع په $\sin x$, x , او $\cos x$ کې وشمېرل شي. لیکونکي: هیولیک، کوپف

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \quad \sinh'(x) = \cosh(x)$$

له څخه لاس ته راځي ،

$$\int e^x \sinh(x) dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x) dx \\ = e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x) dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي

$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

یو په څرګنده توګه مخامخوالی یا تضاد دی. ناتیګاوی په اخرنظ پایونه کې پروت دی – د انتیگرالونې ثابته باید په پام کې ونیول شي:

$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c.$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټیګي نتیجې ته لارښودوي. لیکونکي: هیولیک، کوپف

د توتېه انتیگرالونې سره لرو

سرلیک

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos(bx) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin(bx) dx, (a \neq 0).\end{aligned}$$

د ویم ځل انتیګرالونه مو بېرته برابر انتیګرال ته په بیایي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{ae^{ax} \sin(bx) - be^{ax} \cos(bx)}{a^2 + b^2} + c$$

بدیلي سړی

کړی شي د اویلر-موپورې فرمول هم د پورته ډول انتیګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$$

لاس ته راځي

بېلګې په توګه له

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^t \cos(t) dt \operatorname{Re} \left(\int_0^\pi \exp(t + it) dt \right) &= \operatorname{Re} \left(\left[\frac{\exp(t + it)}{1 + i} \right]_0^\pi \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{-e^\pi - 1}{1 + i} \right) = -(e^\pi + 1)/2.\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

له

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx &= - \int_{-\pi}^\pi n \cos(nx) \left(-\frac{1}{m} \cos(mx) \right) dx \\ &= \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx\end{aligned}$$

د $m \neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx = 0.$$

په پام کې دې ونیول شي، چې د تابع پریودیځیتي یا تل بېرته رتګرځېدنه په توتۀ انتیګرالونه کې د ژی شرایط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

څخه لاس ته راځي

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi.$$

په ورته توګه سری د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیتي ښايي. لیکونکي: هیولیک، کوپف

دلټا - تابع Delta-Funktion

د دیراک Diracsche دلټا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}} \delta f = f(0)$$

له لارې تعریف دی، د کوم سره چې یو په خوښه ناپرېکښونکی تابع دی، چې د یوه انټروال (a, b) د باندې وکیري. د ټوټه انټیګرالونې په مرسته یا په یوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق ټولیزوالي

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

په حیث تشریح کیدی شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

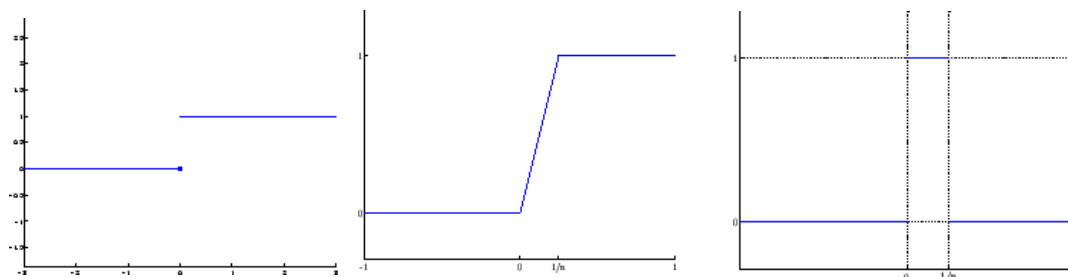
که $0 \in (a, b)$ وي، نو د ټوټه انټیګرال سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int_{-a}^b H' f &= [Hf]_a^b - \int_a^b H f' \\ &= - \int_0^b f' = -[f]_0^b \\ &= f(0) \end{aligned}$$

$$\int H' f = \int \delta f$$

او له دې سره .

سرلیک



Heaviside-Funktion

 H

نږدېوالی

 H_n

Näherung

der Heaviside-Funktion

نږدېوالی

 $\delta_n = H'_n$

Näherung

der Delta-Funktion

په د پوله پروسې سره د جوړ شوي د Heaviside-Funktion اپروکسیمیشن سره
سری بدیل لاس ته راوړي:

$$\int_a^b H'_n f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \rightarrow f(0).$$

له دې سره د اخري مساوات لپاره د منځ اړزېنت جمله کارول شوې.
لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د متحولو – یا اووېنتونو بدلون Variablensubstitution

د ځنځيري قانونو

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x)) g'(x), \quad f = F',$$

څخه د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنیو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(y) + c = \int f(y) dy.$$

په ورته توګه د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بڼه

$$\int_a^b f(g(x)) \frac{dy}{dx} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

ولیکل شي.

یو ساده ځانګړی حالت یو کرښیز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px + q) dx = \frac{1}{p} F(y) + c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px + q) dx = \frac{1}{p} [F]_{pa+q}^{pb+q}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د انتیګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx$$

$$dx = \frac{1}{\varepsilon} du$$

لپاره بدلون $u = \varepsilon x$, او د انتیګرالونې پولو ترانسفورمیشن

$$x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$$

راکوي

سرلیک

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټولیزه توګه د یو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \rightarrow \frac{du}{u}$$

او له دې سره

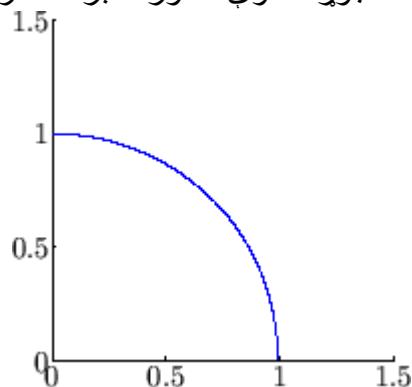
$$\int_a^b f(rx) \frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u) \frac{du}{u}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

دا جوړه شوې څلورمه برخه ګردۍ یا څلورمه برخه داېره ښايي



له دې سره د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = \sin u$, $dx = \cos u du$, $x = 0 \rightarrow u = 0$ او

$$x = 1 \rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

، نو لاس ته راځي

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2},$$

لکه څنګه چې انتظار کېده. د اړخني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

$$\begin{aligned} dx &= -\sin u du \\ x &= \cos u, \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{په عجیبه ډول بدلون,} \\ x = 0 &\rightarrow u = -\pi/2 \end{aligned}$$

او $x = 1 \rightarrow u = 2\pi$ په برېښنده توګه یوه ناتیګه

نتیجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناتیګ وو؟ په کلکه نیولې توګه باور لري

$$\sqrt{1 - \cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u| (-\sin u) du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انټیګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 - 4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2 - 1}}$$

$$y = (x-3)/2, \quad dx = 2dy$$

راکوي

بدلون

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

سرلیک

د ورپسې بدلون $y = \cosh t$, $dy = \sinh t dt$ سره د

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} &= \int \frac{\sinh t dt}{\sinh t} \\ &= \int dt = t + c \\ &= \operatorname{arcosh} y + c \\ &= \operatorname{arcosh}((x - 3)/2) + c \\ &= \ln \left(\frac{x - 3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 6x + 5} \right) + c\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1 \\ &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کېږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2 g'(x) dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3} y^3 + c.$$

د په څنټ یا معکوس بدلون سره لرو

$$\int \frac{\ln x^2}{x} dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c.$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

په تیوپیکی توگه سری هڅیري چې د بدلون له لارې انتیگرالېدونکی ساده کړي. د بېلگې په توگه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y} - 1} dy$$

لپاره نږدې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کیردي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتیگرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 1} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) dx$$

$$\int 1 dx + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c.$$

د $x = e^y$ دېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2} \left| \frac{e^y - 1}{e^y + 1} \right| + c.$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

لومړی (بنسټیزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

سرلیک

کیدۍ شي د بدلون سره

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, \quad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx,$$

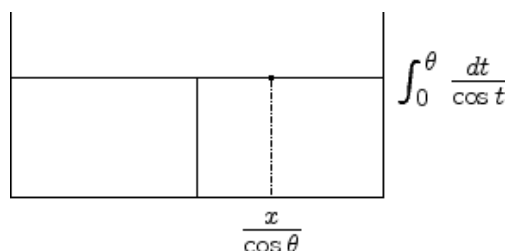
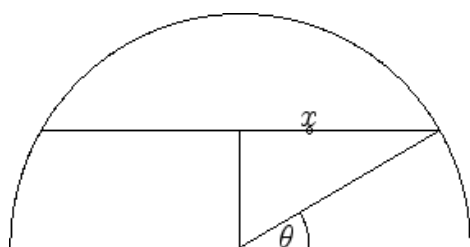
و شمېرل شي:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^{-1} du$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c.$$

يو کارونه يې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې پورته سطحه کونجرينټوني په سطحه برېځي.



د سور گردۍ (طول البلد) له دې سره د $1/\cos \theta$ په نسبت سره غزيري.

ليکونکي: هيوليگ، کوپف

ساده راشنل انټيگرياليدونکي د ساده قطب سره

Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنسټيتويو په راشنل توابعو لومړنۍ توابع دي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |x+b/a| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b} \arctan \left(\frac{x-a}{b} \right) + c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2} \ln((x-a)^2+b^2) + c$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لاري پسي وشمېرل شي. بدیل يې د انتیگرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

$$\int dy/y = \ln |y| + c$$

لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a} \ln |x+b/a| + c.$$

د بڼه بدلون پسي

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2} \int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

بدلون $y = (x-a)/b$, $dx = b dy$ راځي

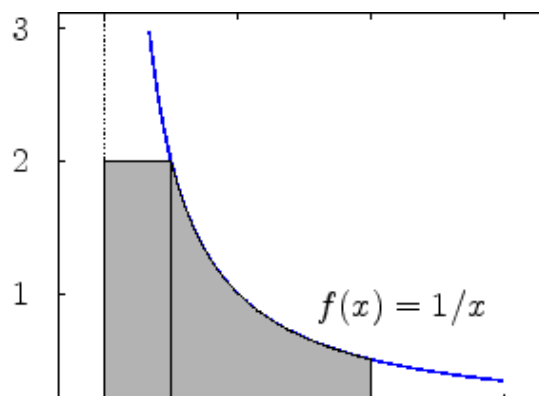
$$\frac{1}{b} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b} \arctan y + c = \frac{1}{b} \arctan \left(\frac{x-a}{b} \right) + c.$$

د بدلون $y = (x-a)^2+b^2$, سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \ln |y| + c$$

سرلیک

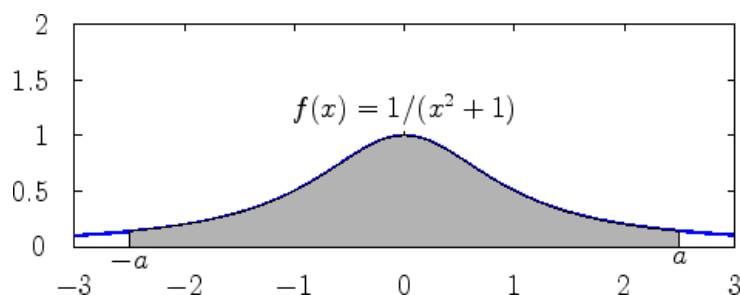
$$= \frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + b^2) + c.$$



د څرې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2} + \int_{1/2}^2 \frac{1}{x} dx = 1 + \ln 2 - \ln \frac{1}{2} = 1 + \ln 4$$

له لارې شمېرل کيږي.
ليکونکي: هيوليگ، کوپف



د $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ د گراف لاندې سطحه داسې شمېرل کيږي

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan a - \arctan(-a) \rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

ليکونکي: هيوليگ، کوپف

د

$$r(x) = \frac{3x + 6}{2x^2 - 4x + 10}$$

لومړۍ تابع ټاکلو لپاره، لومړۍ د مخرج مربع تکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2 - 2x + 5) = 2((x - 1)^2 + 2^2).$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x + 2) = 3((x - 1) + 3).$$

له دې سره کېدۍ شي د ستاندارد افادې په توګه ټوټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2} \frac{x - 1}{(x - 1)^2 + 2^2} + \frac{9}{2} \frac{1}{(x - 1)^2 + 2^2}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x) dx = \frac{3}{4} \ln((x - 1)^2 + 4) + \frac{3}{4} \arctan\left(\frac{x - 1}{2}\right) + c.$$

$$\int_1^3 r(x) dx$$

د ټاکلې انټیګرال لپاره سړۍ د پولو د پخۍ اړینوونې له لارې لومړنۍ تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4} (\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{3}{16} \pi.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انټیګرالونه د زیاتو اړه قطب سره

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

$$n \in \mathbb{N}$$

د لپاره دی

سرلیک

$$\int (x-a)^{-n-1} dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c.$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوگيري قطبځایونو کې د اړونده مربع

$$q(x) = (x-a)^2 + b^2$$

لپاره باور لري

ضریبونو

$$\int \frac{c(x-a) + d}{q(x)^{n+1}} dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n q(x)^n} - \frac{c}{2n q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n} \int \frac{dx}{q(x)^n}.$$

د گراد یا درجې ردکشن د لومړني تابع رکورزيو شمېرنه شوونې کوي.
لیکونکي: هیولیک، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x - a$ او $dx = dy$ د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x-a)^{-n-1} dx = \int y^{-n-1} dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c.$$

د دویم فرمول د بنیوني لپاره لومړی یو ساده د رکوزیون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انټیگرالوني سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(1+y^2)^k} &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k \int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}} dy \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k \left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} \right). \end{aligned}$$

له دې کټمټوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k} \int \frac{1}{(1+y^2)^k} dy.$$

$$y = \frac{x-a}{b}$$

سره لاس ته راځي

له دې سره اوس د بدلون

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{((x-a)^2 + b^2)^{n+1}} &= \frac{1}{b^{2n+2}} \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1\right)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{b^{2n+2}} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{b^{2n+2}} \left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} \right) \\
&= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2 + b^2)^n} + \frac{2n-1}{2b^2n} \int \frac{dx}{((x-a)^2 + b^2)^n} .
\end{aligned}$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2 + b^2)^{n+1}} dx$$

کیدی شي د بدلون $y = (x-a)^2 + b^2$ له لارې وشمیرل شي، ځکه چې په صورت کې د y مشتق ځای لري:

$$\begin{aligned}
\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2 + b^2)^{n+1}} dx &= \frac{c}{2} \int \frac{dy}{y^{n+1}} \\
&= \frac{c}{2(-n)y^n} \\
&= -\frac{c}{2n((x-a)^2 + b^2)^n} .
\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2} dx$$

لپاره په تولید فرمول کې د ایښوونې وروسته د ډېرواره قطبونو سره د

$$a=0, b=3, c=2, d=1$$

او $n=1$ سره راګوي

سرلیک

$$\frac{-2}{2(x^2+9)} + \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18} \int \frac{1}{x^2+9} dx$$

او د بڼه بدلون پسې

$$\begin{aligned} & \frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18} \left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c \right) \\ &= \frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c'. \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د راشنلتوابعو انیگرالونه Integration rationaler Funktionen

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدې شي یو حقیقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټیوې جمعې

$$ax^n, \quad \frac{c}{(ax+b)^n}, \quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $n \in \mathbb{N}_0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنیو توابعو په مرسته کېدې شي د دې بنسټوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنۍ توابع وټاکل شي. لیکونکي: هیولیک، کوپف

د

$$\int r(x) dx, \quad r(x) = \frac{x^5 + 10x^3 + 5^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9},$$

د شمېرلو لپاره لومړی یو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو. د پولینوم وېش پسې ،

$$r(x) = x + \frac{2x^3 + 5x^2 + 8x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9},$$

اود مخرج ضربونو جوړولو پسې

$$x^4 + 8x^2 - 9 = (x+1)(x-1)(x^2+9),$$

لاس ته راځي

$$r(x) - x = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx}{x^2+9} + \frac{d}{x^2+9}.$$

که د اصلي مجراج سره ضرب شي، نو لاس ته راځي

$$2x^3 + 5x^2 + 8x + 25$$

$$= a(x-1)(x^2+9) + b(x+1)(x^2+9) + (cx+d)(x^2-1)$$

$$x^3(a+b+c) + x^2(-a+b+d) + x(9a+9b-c) + 1(-9a+9b-d)$$

او د ضریبونو د پرتلي $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$ او $d = 2$ له لارې.
یوگوني ترمونه کېدی اوس ساده انتیگرال شي:

$$\int \frac{x^5 + 10x^3 + 5^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9}$$

$$= \int x dx + \int \frac{-dx}{x+1} + \int \frac{2dx}{x+1} + \int \frac{xdx}{x^2+9} + \int \frac{2dx}{x^2+9}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \ln|x+1| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ساین او کوساین د ضرب انتیگرالونه

د $a^2 \neq b^2$ لپاره د زیاتون-یا جمعي قضیې څخه لاس ته راځي

سرليک

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax) \cos(bx) dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax) \cos(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c.$$

په ځانګړې توګه د ټولګنيزو يا تامعدي a, b لپاره انټيګرال په پريوديکي انټروال $[-\pi, \pi]$ باندې ورکيږي. د ټوټه انټيګرالوني په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax) dx = \frac{1}{na} \sin^{n-1}(ax) \cos(ax) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(ax) dx$$

$$\int \cos^n(ax) dx = \frac{1}{na} \sin(ax) \cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(ax) dx.$$

داسې کيدی شي اکسپوننت سوکخسيو يا تل کم شي. د $n = 2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c.$$

په ځانګړې توګه باور لري

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \pi$$

$$n \in \mathbb{N}$$

د لپاره .
لیکونکي: هیولیک، کوپف

که د لومړۍ کټمټوالي د بني اړخ مشتق ونيول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2} \cos((a-b)x) - \frac{1}{2} \cos((a+b)x).$$

د زیاتون - یا جمعي قضیه راکوي

$$\frac{1}{2} (\cos(ax) \cos(bx) + \sin(ax) \sin(bx) - \cos(ax) \cos(bx) + \sin(ax) \sin(bx)) =$$

$$= \sin(ax) \sin(bx),$$

کوم چي د کین لور د انتیگرال سره سرخ وړي.

د لومړنی تابع کېدی شي د توتې انتیگرال سره وشمېرل شي. د بېلگې په توګه دی

$$\int \sin(ax) \sin(ax) dx$$

=

$$-\frac{1}{a} \cos(ax) \sin(ax) - \int \left(-\frac{1}{a} \cos(ax) \right) (a \cos(ax)) dx$$

$$-\frac{1}{a} \cos(ax) \sin(ax) + \int (1 - \sin^2(ax)) dx.$$

=

د $\int \sin^2(ax) dx$ پسې حل کونه غوښتونۍ لومړنۍ تابع راکوي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انتیګرالونه

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

سرلیک

$$\int e^{ikx} dx = \frac{1}{ik} e^{ikx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

څخه د کمپلکس تریگونومتريکي پولینومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx},$$

داسې چې

dass

$$\int p(x) dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{ik} e^{ikx}$$

همداسې

sowie

$$\int_{-\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اوپلر-مويورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولینومونه

په $\sin(kx)$ او $\cos(kx)$ کې انټیګرال شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x dx$$

شمدرلو ته د اوپلر-مويورې فرمول په مرسته انټیګرال په لاندې توګه لیکل کيږي

$$\frac{1}{16} (e^{ix} - e^{-ix})^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k \neq 0} c_k e^{ikx}$$

او $2\pi \frac{6}{16} = \frac{3}{4}\pi$ د انتیگرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بدیلي کیدی شي توتېه انتیگرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3 \int \cos^2 x \sin^2 x dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3 \int \sin^2 x dx - 3 \int \sin^4 x dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتیگرال ښی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راګوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x dx = -\frac{1}{4} [\cos x \sin^3 x]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \pi$$

په مرسته سړی $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتیگرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي
لیکونکي: هیولیک، پفایل

تریګونومتريکي بدلونونه Trigonometrische Substitutionen

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتیګرالیدونکو یوه لړۍ اکسپلېځیت یا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

سرلیک

$$\begin{array}{lll}
 x = a \sin t : & dx = a \cos t \, dt & \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \\
 x = a \tan t : & dx = a / \cos^2 t \, dt & \sqrt{a^2 + x^2} = a / \cos t \\
 x = a / \cos t : & dx = a \sin t / \cos^2 t \, dt & \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t
 \end{array}$$

په بل حالت کې باید د ریښې د پروت محور متحولي لومړۍ په مربعیز تکمیلېدونکې بڼه راپل شي.

لیکونکي: هیولیک، پفایل

د انتیګرال

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} \, dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t$, $dx = \cos t \, dt$ او د پولو اعیارول $x = 0 \rightarrow t = 0$ او $x = 1/2 \rightarrow t = \pi/6$ راکوي

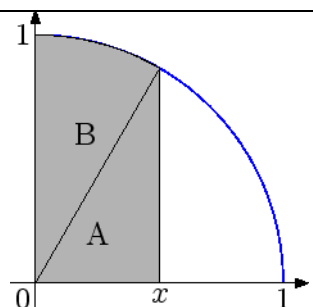
$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t \, dt = \left[\frac{1}{2} (\sin t \cos t + t) \right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

ناتاکلی انتیګرال دی

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + c.$$

انتیګرال کیدی شي د یوه ساده هندسي یا
حکمکچیز اند(فکر) سره هم وټاکل شي

لکه د څیرې څخه چې لیدل کیږي، د
 $\sqrt{1-x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په
دوه برخو سطحو ودانه یا جوړه ده.



د درېګودي سطحي مساحت $A = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2}$ دی او د ګردۍ برخې یا قطاع

مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} \arcsin x$ ده. د دې سطحو د

مساحت جمعه کیدل غوښتونې سطحه راځوي.
لیکونکي: هیولیک، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

لیاره د بدلون $dx = 1/\cos^2 t \, dt$
څخه لاس ته راځي $x = \tan t$,

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + c,$$

د کوم سره چې اړخنی مساوات د بنی اړخ د مشتق نیولو له لارې ازمايل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \arctan x \right) \right| + c.$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln \left| \tan \frac{\pi}{4} \right| - \ln \left| \tan \frac{\pi}{8} \right| \\ &= \ln 1 - \ln \left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} \right) \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د انتیګرال

سرلیک

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 - 4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2 - 1}}$$

لیپاره بدلون $y = (x-3)/2$ ، $dx = 2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

د پسي بدلون $y = \frac{1}{\cos t}$ ، $dy = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$ ، $\sqrt{y^2 - 1} = \tan t$ n سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left| \frac{1}{\cos t} + \tan t \right| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د بنی خوا د مشتق نیونې له لارې ازمایل کیدی شي. د په څنې یا معکوس بدلون پسی د

$$\sin t = \sqrt{1 - (1/y)^2}, t = \arccos y = \arcsin \sqrt{1 - (1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع د لاس ته راځي

$$\ln \left| y + y \sin \left(\arccos \frac{1}{y} \right) \right| + c = \ln \left| y + y \sqrt{1 - \left(\frac{1}{y} \right)^2} \right| + c$$

$$= \ln \left| \frac{x-3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 6x + 5} \right| + c.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ساین او کوساین راشنل توابع

Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

$$x = \tan(t/2)$$

سره د یوه په خوبنه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

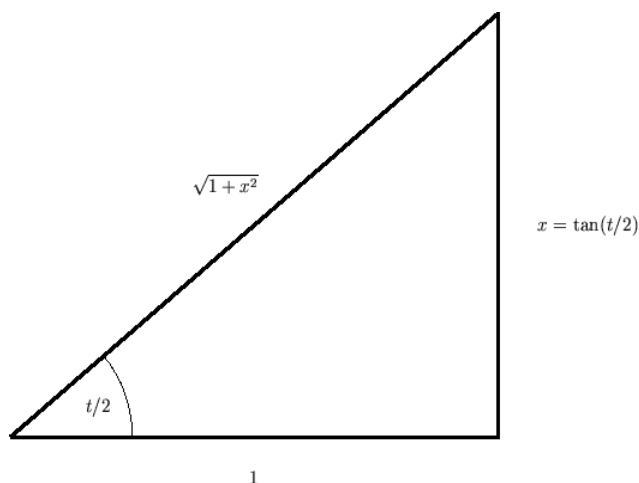
$$\int r(\cos t, \sin t) dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2} dx.$$

له دې سره تریگونومتريکي تابع کېدی شي په یوه راشنل انتیګرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

لیکونکي: هیولیک، اپرینس

لکه د څیرې څخه چې لیدل کیږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(t/2)} dt = \frac{1}{2} (1+x^2) dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

سرلیک

$$\sin t = 2 \cos(t/2) \sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

لیکونکي: هیولیک، اږیش

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sin t} &= \int \frac{1+x^2}{2x} \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{x} = \ln |\tan(t/2)| + c. \end{aligned}$$

د بدلون سره لاس ته راځي

په اړونده تګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\cos t} &= \int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c. \end{aligned}$$

د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left| \frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)} \right| + c.$$

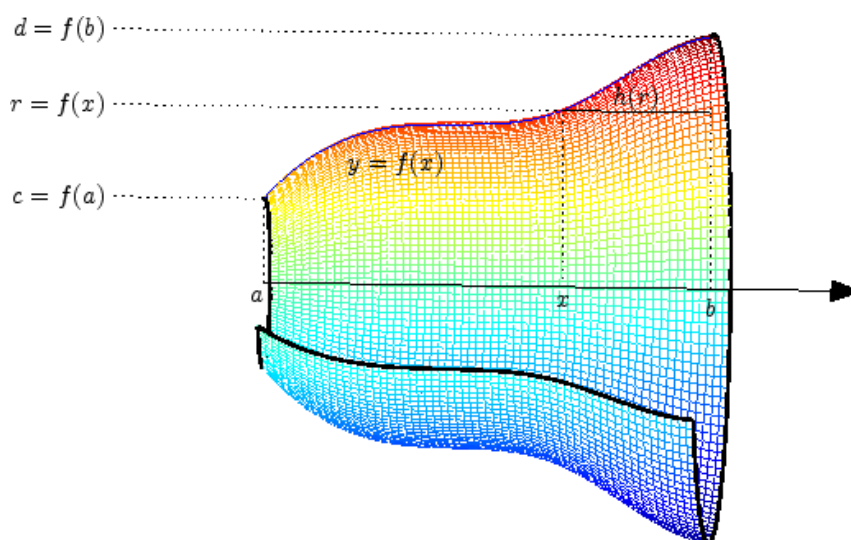
لیکونکي: هیولیک، اږیش

د څرخیدونو بدنونو ډکۍ یا حجم **Volumen von Rotationskörpern**

$$r = f(x) \geq 0$$

د V ډکۍ حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع گراف ،
 $a \leq x \leq b$
 د څرخون له لارې کېدۍ شي انټیگرېشن له لارې په گردۍ ډوله غوڅي
 یا تقاطع باندې شمېرل کېدۍ شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx .$$

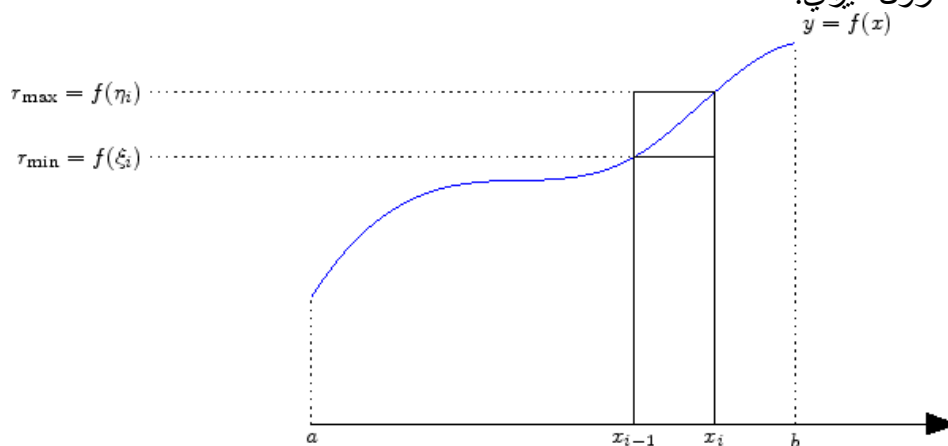


بدیلي کېدۍ شي د توتي پوښ باندې انټیگرال شي.

$$V = \pi c^2(b-a) + 2\pi \int_c^d r h(r) dr ,$$

چیرته چې c همداسې d مینیمال همداسې ماکسیمال وړانګه r او په بدن کې
 خوندي توتي پوښ ټول جگوالی دی د وړانګې r سره. دا واریانت له ټولو د همغږیز
 وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.
 لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د لومړي فرمول د ښوونې لپاره په څېره کې کښل شوی اپروکسیمیشن یا نږدېوالی کارول کېږي.



یوه ټوټه کونې Δ یوه انټروال $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \dots n$, لپاره کېدی شي ډکۍ (حجم) د یوې ټوټې

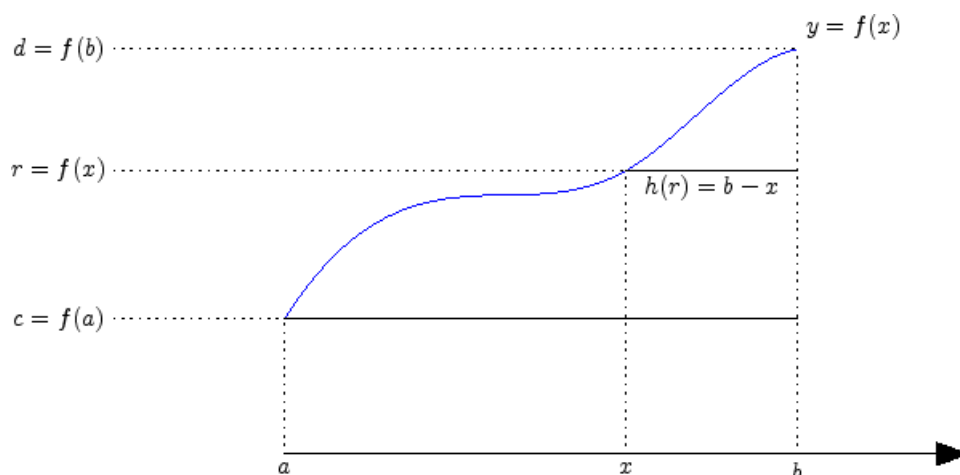
له لارې د مینیمال وړانګې $f(\xi_i)$ سره او یوې ټوټې د ماکسیمال وړانګې $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بیا باور لري

$$\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^n f(\eta_i)^2 \Delta x_i,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره دواړه دباندي ترمونه د ریمن-جمعه ده، چې د انټیګرال ارزښت لور ته ځي، یعنې باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

ددویم فرمول د ښوونې لپاره لومړی نیول کېږي، چې همغږیز جګېدونکی دی.



د همداسې د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي ، $r = f(x) \quad dr = f'(x) dx$

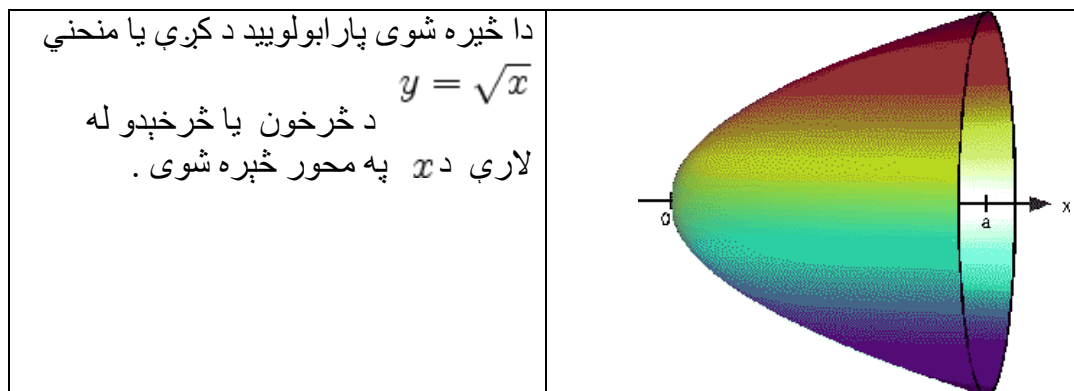
$$\begin{aligned}
 2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r)r \, dr &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_u \underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'} \, dx \\
 &= \pi (b-x)f(x)^2 \Big|_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \\
 &= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx ,
 \end{aligned}$$

څه چې دویم فرمول په گوته کوي.

د همغږیز ټیټېدونکې توابعو لپاره کېدې شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په ټولیز حالت کې دا د همغږیزوالي ورشو د ټوټه کونې له لارې لاس ته راځي

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

سرلیک



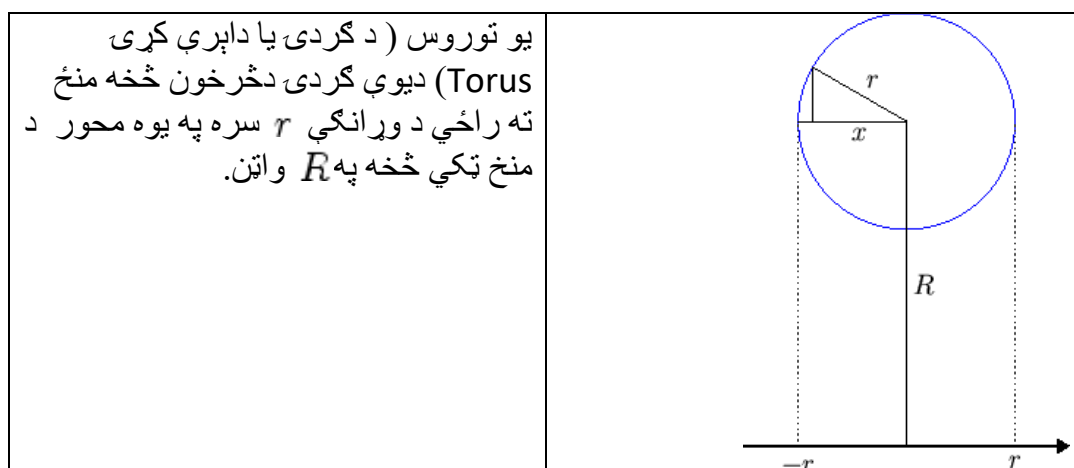
د څرخیدونکي بدن د څرخیدني قانون سره سم پکې یا حجم دی

$$\pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \pi a^2 .$$

بدیلی د توتې پوښ بادی انتیگرلوني له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a - r^2)^2 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \pi a^2 .$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر



ډکۍ یا حجم د دوه څرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کیږي

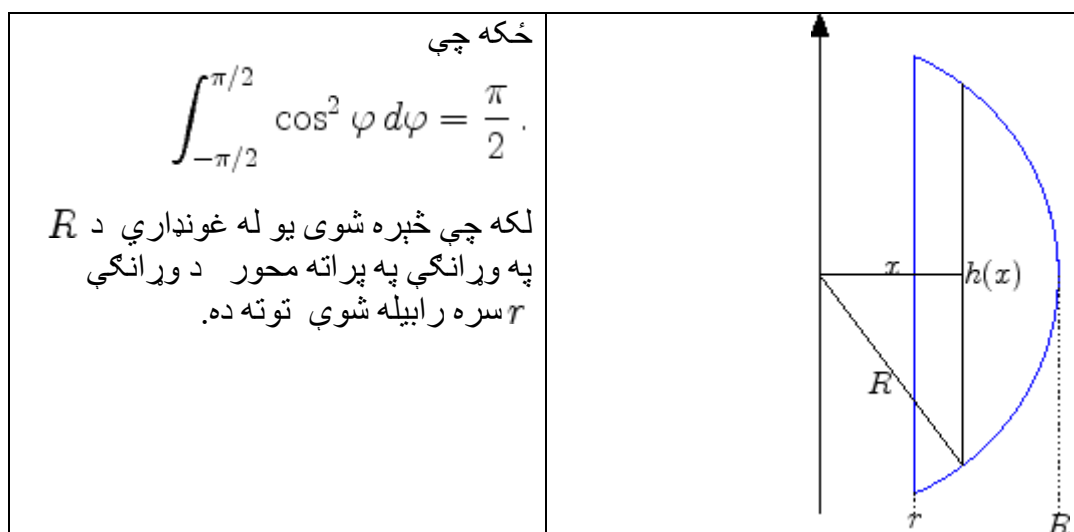
$$V = \pi \int_{-r}^r \left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx - \pi \int_{-r}^r \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^r R\sqrt{r^2 - x^2} dx .$$

د بدلون $x = r \sin \varphi$, $dx = r \cos \varphi d\varphi$ سره لاس ته راځي

$$V = 4\pi Rr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi r \cos \varphi d\varphi$$

$$= 4\pi Rr^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 Rr^2 ,$$



د دې لپاره چې ډکۍ یا حجم شمېرو، د وړانګي $x, r \leq x \leq R$ سره په توتې پوښ انتیګرال نیولکیري. د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

سرلیک

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2} dx = 2\pi \left[-\frac{2}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right]_r^R$$

$$= \frac{4}{3}\pi(25 - 9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi.$$

د یوې کُرې یا منحنې اوږدوالی **Länge einer Kurve**

د یوې کُرې L اوږدوالی د ناپېرېکېدونکي مشتقو پارامتریک کولو $t \mapsto p(t)$ سره،
 $a \leq t \leq b$ دی،

$$\int_a^b |p'(t)| dt.$$

په ځانګړې توګه د یوې کُرې لپاره په xy -سطحه د پارامتریک انځورونې

$p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

په ځانګړې توګه دیوه تابع $y = f(x)$, $x \in [c, d]$ ګراف لاندې اوږدوالی لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کړو تړنو اوږدوالی،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)| d\tau,$$

کیدې شي د کانونیکي کُرې پارمتر په توګه وکارول شي. سړی داسې په نامه د کُرې
 اوږدوالي پسې پارمتر په کونه لاس ته راوړي:

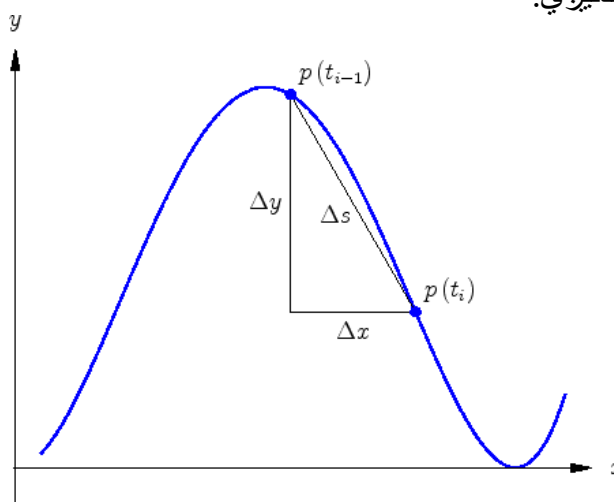
$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1.$$

د نورمي تانجنت کړې په بنسټ د کانونیکي پارمټري کوني لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s)) ds$$

د C د L اوږدوالي سره.
لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د یوې مسطحې کړې د اوږدوالي شمیرني لپاره د پارامتر انټروال بیه ټوټو وېشل کيږي او یو برخه انټروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کړه د پای ټکو د تړونکړینې له لارې ځای بدلېږي یا بدلېږي.



د انتگرال د منځ ارزښت جملې سره بیا باور لري:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta s_i &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(p'_1(\xi_i))^2 + (p'_2(\eta_i))^2} \Delta t_i, \end{aligned}$$

سرلیک

$$\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

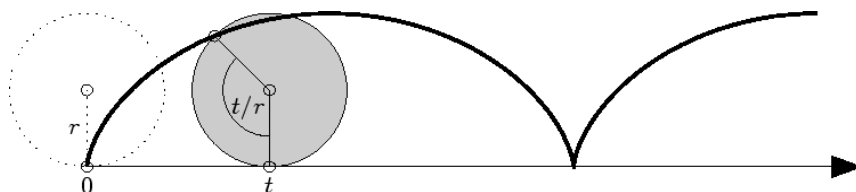
د سره . دا اخرنی وېبڼه یا افرده د ورکړ شوي انتیگرال د یمن-

زیاتون یا -جمعی دی.

په ورته تگه د ډېر پراخېدونکي یا ډېر بېدیز ې کړې لپاره د مشتق نورم د انتیگرال په بڼه راکوي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

که د r وړانګې سره یوه گردۍ یا داېره د په محور ګرځوو یا وڅرخوو، نو ژي ټکی یو څیکلوید تشریح کوي.



د سرچینې لپاره د پیل ټکي په حیث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r \cos(3\pi/2 - t/r) = t - r \sin(t/r) \\ y(t) &= r + r \sin(3\pi/2 - t/r) = r - r \cos(t/r) \end{aligned}$$

$$t \in [0, 2\pi r]$$

د سره ، د یوې ګرې لیندې یو پارمتری کونه ده.

د لیندې اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1 - \cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2} dt.$$

$$s = t/r$$

د بدلون $dt = r ds$ ، او کټمټوالي

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2 \sin^2 \varphi$$

$$L = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(s))} ds = r \int_0^{2\pi} 2 \sin(s/2) ds = 8r.$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

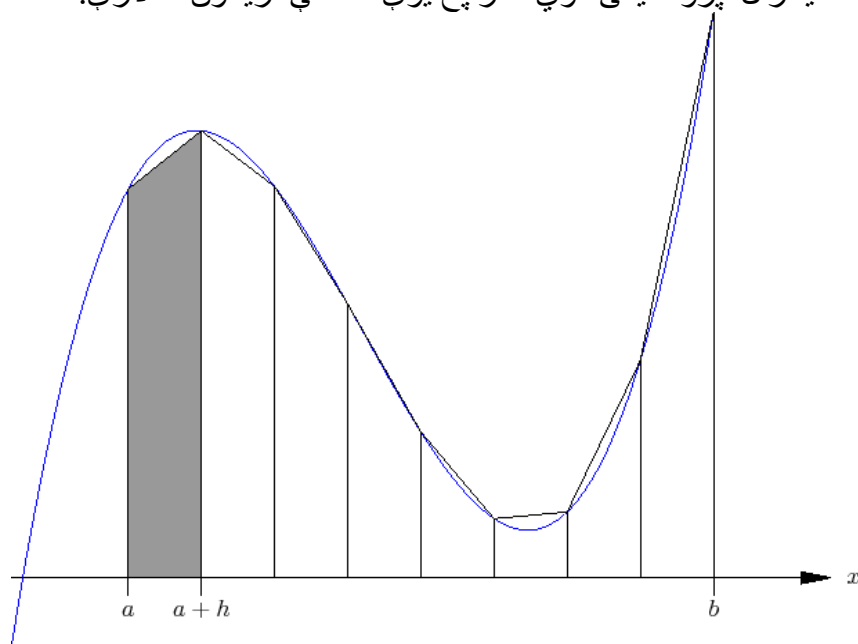
د دوزنقي قانون Trapez-Regel

نږدیوالی

$$\int_a^b f(x) dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \dots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتیگرال اپروکسیمی کوي د تراپخ یوې سطحې زیاتون له لاري.



د یوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقور تابع د ناتیکلوي پاره باور لري:

سرلیک

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a, b]$ لپاره.

په ټيکه توګه ناتيکاوۍ د خويو يا هوارو توابعو لپاره ګاونډيز يا اسيمپټوتيکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \dots$$

له f او h څخه خپلواکي ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د تراپح قانون د $(b-a)$ پرېوديکي توابعو لپاره خورا دقيق دی. ناتيکاوۍ ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h -توان ته. لیکونکي: هيوليګ، هيورنر

په يوه انټروال ناتيکاوۍ دی

$$\frac{h}{2} (f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t) dt.$$

بيا ټوټه انټيګرالونه او منځ ارزښت جملې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t) dt = - \underbrace{\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) dt}_{h^3/12} f''(r).$$

په ټوټه انټروال باندې د جمعې پسې سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^n f''(r_i).$$

جمعه کیدی شي د

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

له لاري اټکل شي. د ترمنځ ارزښت جملې پسي بالاخره لاس ته راځي

$$\sum f''(r_i) = n f''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r),$$

$$r \in [a, b]$$

د یوه سره.

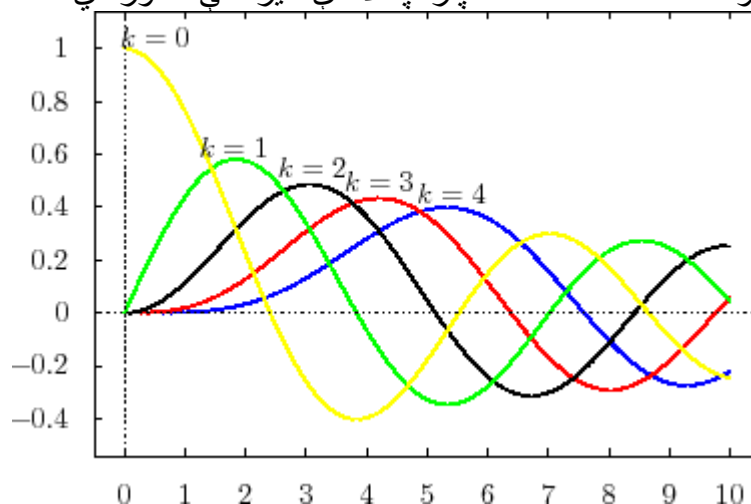
د ګاونډ یا مجانب ناتیګاوي ودې ښوونه اوږده ده. دا د باقي غړي په تڼۍ انټیګرالونه ولاړه ده او د ژۍ ترمونو په یوه مناسبه کارونه یا استعمال. لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د بسل-تابع Bessel-Funktionen J_k د ټولګنیز k لپاره دا لاندې انټیګرال انځورونه لري

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x \sin(z))}_{f(z)} dz$$

$$k = 0, \dots, 4$$

او د لپاره په لاندې څیره کې انځور دي



د تراپڅ قانون شمیرلو سره شری کاروي، چې

$$\frac{1}{2} (f(a) + f(a + 2\pi)) = f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i = -\pi + \frac{1 + 2i}{2} \frac{2\pi}{n},$$

وټاکو، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i) = 2 \sum_{i=n/2}^{n-1} f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه یا اپرکسیمیشن د $n = 4, 8, \dots, 64$ ټکو سره بنایي، پولي ته تلنه فوقالعاده گړندی ده.

n	
4	<u>0.45464871341284084769800993295587</u>
8	<u>0.57655235602472460377030331810649</u>
16	<u>0.57672480775615774487465153090293</u>
32	<u>0.57672480775687338720244824226913</u>
64	<u>0.57672480775687338720244824226913</u>

دا د دوزنقي قانون جگ ټیکاوی د خوی پریودیکی انټیگرال لپاره یوپیچ دی او کېدی شي د ناتیکاوي د یوه ټیکي انخوړوني، د اویلر-ماکلورن-Euler Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د ګاوس فرمول **Gauß-Formel**

د n -مې درجې یا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بڼه یا ډول د یوه تابع انتیګرال ټاکي د انتیګرال د انټرپولیشن پولینوم له لارې د n -مې درجې د لاګرانژ پولینومونو په صفر ځایونو $x_1 < \dots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

د w_i سره د لاګرانژ پولینوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1, 1]$ باندې.

فرمول د $\text{Grad} < 2n$ درجې پولینوم لپاره ټیک دی او د ټولو له مخه د تحلیلې توابعو لپاره خورا ټیک دی. ټول وزنونه w_i زیاتیز یا مثبت دي، او تکیه ځایونه x_i په انتګریشن انټروال $(-1, 1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10-م نظم پورې جدولی شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm \frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm \frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}$ $\pm \frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm \frac{1}{21}\sqrt{245 - 14\sqrt{70}}$ $\pm \frac{1}{21}\sqrt{245 + 14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450} + \frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450} - \frac{13}{900}\sqrt{70}$

سرليک

د گاوس پارامتر x' او w' د خوښې انتگریشن انټروال $[a, b]$ لپاره د کرښیز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x'_k = a + \frac{b-a}{2} (x_k + 1), \quad w'_k = \frac{b-a}{2} w_k.$$

لومړۍ بڼایو، چې نږدې ټاکنه د $\text{Grad} < n$ درجې د پولینوم f لپاره ټیک دی. دا د لاندې څخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^n w_k f = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b p_k(x) dx \right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^n p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)} dx.$$

دا چې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاگرانژ پولینومونه دي، په دې ټکو کې و f ته انټرپولیشن پولینوم دی او داسې له f سره همغږیز کېږي.

د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدای شي حتی د $\text{Grad} < 2n$ درجې پولینوم f ټیک انټیګرال شي.

دې ته f د پولینوموېشن په مرسته داسې لیکو

$$f(x) = p(x)s(x) + r(x)$$

د $\text{Grad } n$ درجې لژندر-پولینوم p او د $\text{Grad} < n$ درجې پولینومونه r او s .

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونیول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) &= \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b p_k(x) dx \right) (p(x_k)s(x_k) + r(x_k)) \\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^n p_k(x) r(x_k) dx = \int_a^b r(x) dx. \end{aligned}$$

له بلي خوا باور لري

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (p(x)s(x) + r(x)) dx \\ &= \int_a^b p(x)s(x) dx + \int_a^b r(x) dx \\ &= \int_a^b r(x) dx,\end{aligned}$$

ځکه چې p د $\text{Grad} < n$ درجې پولینوم ته اور توگونال دی. د وزن زاتيزوالی یا مثبتوالی د کټمتوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i p_k(x_i) = \sum_i w_i p_k(x_i)^2 = \int p_k^2.$$

د اخرنی تر مخ یا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $\text{Grad} < 2n$ درجه لري، نو د گاوس-فرمول له لارې ټيک انټيگرا ل کيدی شي.

د گاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انټيگراندونو یا انټيگرا ل کېدونکو نږدې ټاکل یا اپروکسيميشن ښايي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2} dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

سرلیک

په اخري انتیگرال کې ورو پولي ته تلنې دلیل په $x = 1$ کې زینګولاریتي ده.

د ګاوس-فرمول فقط خویو یا هوارو glatt (یو تابع خوی یا هوار تابع یو ماتماتيکي تابع دی، چې ناپېرېدونکی او ناپای زیات مشتق وې توابعو ته پېر دقیق دی.

لیکونکي: اپې، هیولیگ

ناڅرګند یا نا معلوم انتیگرال Uneigentliches Integral

د یو په یوه انتروال $[a, b)$ توتې ډوله ناپېرېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتیگرال کلیمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو

$$f(b) = \pm\infty$$

انتیګرالیدونکو () وغزول شي.

په ورته توګه زینګولاریتي په لاندې یا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخري حالت کې

باید پوله ارزښت د پرلپسې ، د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د یوه ناټاکلي انتیگرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتیګرال وړوالی دی، دا په دې معنا چې

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{ثابت}$$

د ټول برخه انتروالونو $[c, d] \subset (a, b)$ لپاره.

لیکونکي: اپې، هیولیگ

د ناټاکلي انتیګرال د شمیرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x} dx .$$

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^b = -e^{-b} + 1.$$

له دې سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکي وي، نو سرې پسي ترلي ناکلې پولي کاروي، داپه دې معنا چې سرې لیکي

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

او دا په راوړل شوي بیلګه کې.
لیکونکي: اپې، هیولیک

د ناکلو انټیګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r} dx.$$

$$y = \ln(x) \quad dy = dx/x,$$

لپاره د بدلون سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r} dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r} dy = \begin{cases} \frac{(\ln(b))^{1-r} - (\ln(2))^{1-r}}{1-r}, & r \neq 1 \\ \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2)), & r = 1 \end{cases}.$$

په دې پسي د $b \rightarrow \infty$ لپاره پوله ارزښت ټیک هلته شتون لي، که $r > 1$ باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln(x)^r} dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}.$$

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د ناکلې انتیگرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx.$$

لپاره انتیگرالېدونکې په پورته انتیگرال پولې $x = \frac{\pi}{2}$ سیګولار دی. سری د $0 < b < \frac{\pi}{2}$

لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)} \right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2 \right) = 2.$$

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د ناکلې انتیگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2} dx.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتیگرالېدونکو بنسټ-یا ساده تابع دی. ناتیکه ایښوونه

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \frac{1+2x}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan(x) + \ln(1+x^2)]_{-b}^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (2 \arctan(b)) = \pi \end{aligned}$$

د ناکلې انتیگرال لپاره راکوي. د تعریف سره سم د ناکلې انتیگرال پورته او کښته پولې باید یو له بل خپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} (-\arctan(c) - \ln(1+c^2))$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} (\arctan(d) + \ln(1+d^2))$$

شتون لري، دا ناتاکلی انتیګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2} dx$$

هم شتون نه لري.

لیکونکي: اپې، هیولیګ

د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلي قضیه

Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که د f لپاره یو مایورانټ وي، داپه دې معنا چې

$$|f(x)| \leq |g(x)| \quad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انتیګرالوالي څخه د انتیګرال

$$\int_a^b f(x) dx .$$

شتون لاس ته راځي

لیکونکي: اپې، هیولیګ

فقط د پوله ارزښت

سرلیک

$$\int_a^b f = \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f$$

شتون ترڅیرني لاندې نیول کیږي. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو. تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابر غریزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود ده. په

دې پسې r د $c \rightarrow b-$ لپاره پولي ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري. تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

هم برابر غریزه جګېدونکې ده او د $2 \int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود. پسې s هم د

$\int_a^b (f + |f|)$ شتون لري. له دې څخه د $c \rightarrow b-$ لپاره پولي ته تلونکی دیاو له دې امله

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f|.$$

شتون لاس ته راځي. لیکونکي: اپې، هیولیک

د پرتلغ تلغ لپاره زیات وخت $f(x) = x^r$ کارول کیږي. د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

$$\int_a^b x^r dx = \begin{cases} \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b) - \ln(a), & r = -1. \end{cases}$$

دا ترم $b \rightarrow \infty$ لپاره ټيک هلته پوله ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتیگرال

$$\int_1^\infty x^r dx$$

شتون ولري ټيک د $r < -1$ لپاره.

د $a \rightarrow 0+$ لپاره ټيک هلته پوله ارزښا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتیگرال

$$\int_0^1 x^r dx$$

ټيک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

لیکونکي: اپې، هیولیک

د دې لپاره چې د نامعلوم انتیگرال شتون د

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

په حیث وښایو، سری دا انتیگرال په دوه برخو توپه کوي.

دا چې $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انتیگرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

سرلیک

په انټروال $[1, \infty]$ د نامعلوم انټیګرال لپاره د ټوټه انټیګرالونې له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x} \right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

د $b \rightarrow \infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دویم د پرتلې قضیې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

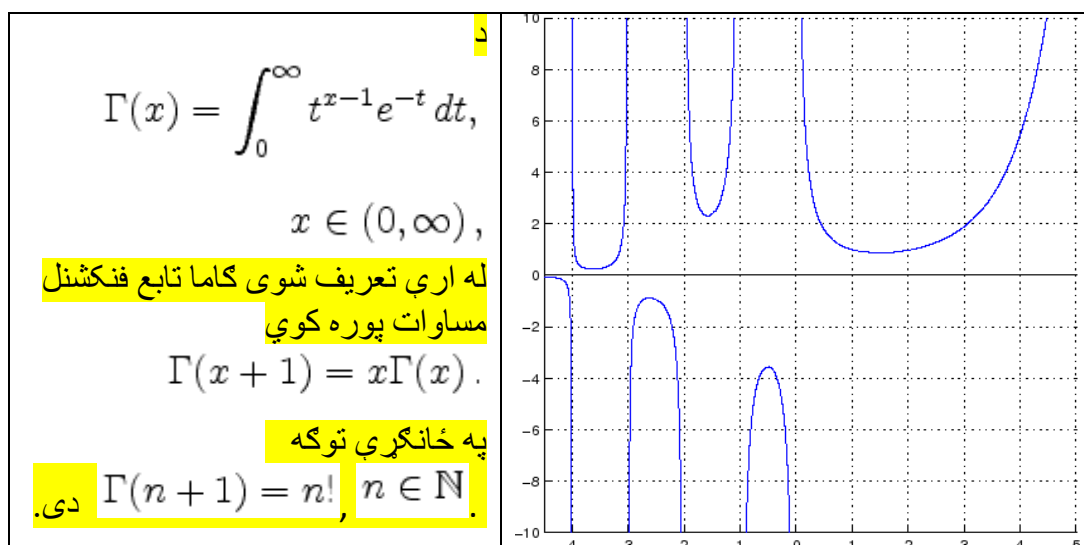
$$\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right|.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی - یا بنسټیز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انټیګرال ارزښت وټاکي.

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

لیکونکي: اپې، هیولیګ

ګاما تابع یا - فنکشن Gamma-Funktion



د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي گاما-تابع د کمیز پروت یا x محور لپاره هم تعریف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع گراف څخه چې لیدل کیږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \dots$ لپاره لري.

لیکونکي: اېپ، هیولیگ

انتیگرال

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتیگرال د $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$

له امله د پرتلي قضیې له مخې پولي ته تلونکی دی.

انتیگرال

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

هم د پرتلي قضیې په بنسټ شتون لري او اټکلونه $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{-2}$

د پوره لوي t لپاره بسيا کوي. د ټوټه انتیگرال سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= 0 + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x), \end{aligned}$$

او له دې سره د پوره اېنډکشن په مرسته او $n \in \mathbb{N}$ د $\Gamma(1) = 1$ لپاره لاس ته راځي

سرلیک

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

د گاما تابع د گاوس تعريف

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

د تابع يوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ اجازه زاكوي.

ليكونكي: اپ، هيوليگ

د كوشي اصلي ارزښت **Cauchyscher Hauptwert**د يوه په $x = c \in (a, b)$ كې زيگولار تابع f لپاره سړی

$$\text{CHW} \int_a^b f = \lim_{h \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f \right)$$

د كوشي اصلي ارزښت په څېر تعريفوي

ليكونكي: اپ، هيوليگ

د تېپيكي بېلگې په څېر د كوشي اصلي ارزښت

$$\text{CHW} \int_{-a}^a x^k dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

شمېرل كيږي.

$$k = -1$$

د لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h} \frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0.$$

د انټيگريډونكي د انتی سيمټري په دليل د CHW ورکيږي په يو سيمټري انټروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h} x^k dx + \int_h^a x^k dx = \frac{1}{k+1} ((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1})$$

د ناجوړه یا طاق k لپاره دا افاده یا وینه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زیاتیز یا مثبت جوړه (حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هڅیږي. په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انټیګرال سره سره خوري یا یو عریز کیږي. د $k = -2, -4, \dots$ لپاره برعکس یا د دې په خلاف هم انټیګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري. لیکونکي: اپې، هیولیګ

د انټیګرال لاندې مشتقول **Differenzieren unter dem Integral**

انټیګرال $\int_a^b f(x, t) dx$ د ناپېرېکېدونکي تابع f لپاره د t ناپېرېکېدونکي تابع دی. که f_t ناپېرېکېدونکي وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b f_t(x, t) dx.$$

لیکونکي: هیولیګ، کنیش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

ناپېرېکېدنه په ټکي $t_0 \in (c, d)$ کې وښایو، له دې څخه کار اخلو، چې په f ولاړ ګوډیز $[a, b] \times [c, d]$ کې برابر ډوله ناپېرېکېدونکي دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله یو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

سرلیک

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| < \varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t - t_0| < \delta$ لپاره د دې t لپاره نو دی

$$|g(t) - g(t_0)| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)| dx < \varepsilon(b - a).$$

له دې سره g ناپېرېدونکی دی.

که f_t ناپېرېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} &= \int_a^b \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx = \\ &= \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x, t+s) ds dx, \end{aligned}$$

د کوم سره چې

$$|f_t(x, t+s) - f_t(x, t)| < \varepsilon \quad \text{دې د ټولو } h < \delta. \quad \text{لپاره.}$$

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمېنت و

$$\int_a^b f_t(x, t) dx = \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x, t) ds dx$$

ته د

$$(b-a) \frac{1}{h} h \varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅیږي.

لیکونکي: بوسسلر، هیولیگ، کنیش

بسل-توابع Bessel-Funktionen دا لاندې د انټیګرال انځورونه لري

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt) dt, \quad n = 0, 1, \dots$$

دا دا لاندې د دفرنخیال مساوات پوره کوي

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

دا کېدی شي د انتیګرا لاندې د دفرنخیال سره وازمایل شي. لومړی دی

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\sin(x \sin t - nt)}_v \underbrace{\sin t}_{u'} dt \\ &= \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t \cos(x \sin t - nt) dt - \frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 t \cos(x \sin t - nt) dt \\ J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt) \sin^2 t dt \end{aligned}$$

که $J_n''(x)$ او $J_n(x)$ ، $J_n'(x)$ د دفرنخیال مساوات په کین لور کښینول شي او له

$$\xi = x \sin t - nt$$

کښینول شي، نو لاس ته

π سره ضرب شي، له کوم سره چې راځي

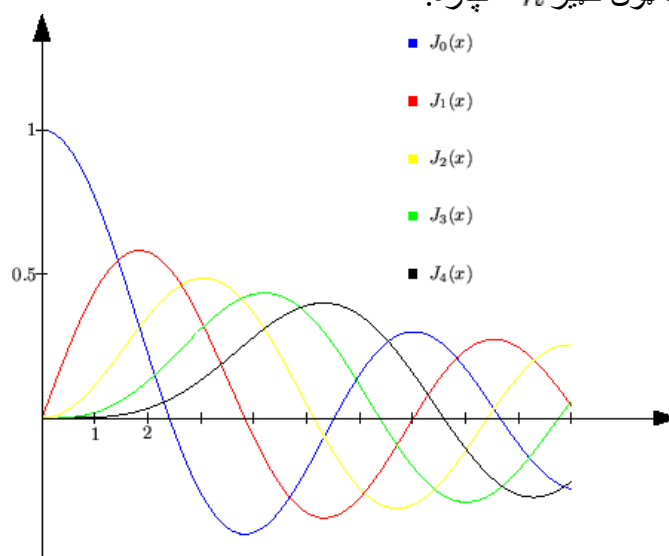
Se

$$\begin{aligned} & -x^2 \int_0^{\pi} \cos \xi \sin^2 t dt - x^2 \int_0^{\pi} \cos^2 t \cos \xi dt + nx \int_0^{\pi} \cos t \cos \xi dt + x^2 \int_0^{\pi} \cos \xi dt - n^2 \int_0^{\pi} \cos \xi dt \\ &= \cdot nx \int_0^{\pi} \cos t \cos \xi dt + x^2 \int_0^{\pi} \cos \xi dt - n^2 \int_0^{\pi} \cos \xi dt \\ &= n \int_0^{\pi} (x \cos t - n) \cos(x \sin t - nt) dt \end{aligned}$$

سرلیک

=

$$n \sin(x \sin t - nt) \Big|_0^\pi = 0$$

د ټول گڼيز n لپاره.

څېره 5 لومړني د بېسل توابع بڼايي .
ليکونکي: بوسسلر، هيوليگ، کنيش

لايبنېڅ-قانون Leibniz-Regel

د ناپېرېکېدونکو مشتقو توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx + f(b(t), t) b'(t) - f(a(t), t) a'(t)$$

ليکونکي: بوسسلر، هيوليگ، کنيش

که انتيگرا ل له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t), \quad U(c, d, e) = \int_c^d f(x, e) dx,$$

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځیري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t)) V'(t), \quad V' = (a', b', 1).$$

له دې سره د U توتیه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c, d, e) = -f(c, e),$$

$$U_d(c, d, e) = f(d, e), \quad U_e(c, d, e) = \int_c^d f_e(x, e) dx,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده یا ویبڼه کې ایښوولو سره غوښتنه راکوي. لیکونکي: بوسسلر، هیولیگ، کنیش

د لایبنيڅ فرمول سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t} dx &= \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t} dx + e \frac{d}{dt} \sqrt{t} \\ &= - \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t} dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

بیا مشتقول یې راکوي

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(- \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t} dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} \right) \\ &= \int_0^{\sqrt{t}} 2 \frac{x^2}{t^3} e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4} e^{x^2/t} dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}} \end{aligned}$$

سرليک

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4} e^{x^2/t} dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بدیلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}dy$ ولیکي او دا انتیگرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره یا خای په خای پولو سره . نو کېدی شي

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2} dy \\ &= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t} dx \end{aligned}$$

او

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2} dy = - \int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2} dy \\ &= - \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t} dx \end{aligned}$$

په ساده توګه وشمیرل شي.

د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د ټوټه انتیګرالونې سره و ازمایل شي:

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t} dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} &= -\frac{1}{2t} \int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_v \underbrace{\frac{2x}{t} e^{x^2/t}}_{u'} dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} \\
&= -\frac{1}{2t} \left[x e^{x^2/t} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t} dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} \\
&= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t} dx
\end{aligned}$$

د دویم برابرېون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
لیکونکي: هیولیګ، کنیش

په t پسې د انتیګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x} dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
&\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx) dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t} \frac{d}{dt} e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2} \frac{d}{dt} t^2 \\
&= \frac{1}{t} \cos(te^t) - \frac{1}{t} \cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t} \cos(t^3) \\
&= \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \cos(te^t) - \frac{3}{t} \cos(t^3)
\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کنیش

د دفرنشل مساوات

سرلیک

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

يو زره يا کوچنی حل u_p کېدی شي د هوموجین مساوات حل د سوپر $\exp(\lambda t)$ پوزېشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds.$$

د لایبنيخ فرمول په بنسټ دی

$$\begin{aligned} u_p'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s) ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s) ds + f(t) \frac{d}{dt} t \\ &= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s) ds + f(t) \end{aligned}$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د ایښوولو له لارې کېدی شي حل تصدیق شي. لیکونکي: هیولیگ، کنیش

د نامعلومو انټیګرالونو مشتقول

Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپېرېدونکي وي او د $t \in (c, d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x, t)| \leq \psi(x), \quad \int_0^\infty \psi < \infty$$

$$|f_t(x, t)| \leq \varphi(x), \quad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کیدی شي د انتیگرال د نخښې لاندې مشتق ونيول شي:

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty f(x, t) dx = \int_0^\infty f_t(x, t) dx, \quad c < t < d.$$

په ورته توگه ویناوې د محدودو انتیگرالېدونکو سره د نامعلومو انتیگرالونو لپاره باور لري. لیکونکي: هیولیگ، کنیش

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} - f_t(x, t) dx$$

د $h \rightarrow 0$ لپاره د 0 په لور هڅیږي، انتیگرال تویه کيږي:

$$\int_0^\infty \dots = \int_0^b \dots + \int_b^\infty \dots$$

دویمه زیاتېدونکې یا د جمعې غړی د نیونې له مخې د

$$\left| \int_b^\infty \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x, t+s) ds - f_t(x, t) dx \right| \leq \int_b^\infty \frac{1}{h} h\varphi(x) + \varphi(x) dx = 2 \int_b^\infty \varphi(x) dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتیگرال له $< \varepsilon$ کيږي. د پوره لویې b لپاره. د دې b

لپاره لومړی زیاتېدونکې د پوره کوچني h لپاره، ځکه چې د پای انتیگریشن انټروال لپاره د انتیگرال لاندې مشتق کېدی شي.

لیکونکي: هیولیگ، کنیش

د گاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t > 0,$$

دې

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k dx.$$

مشتقیدنه په حق ده، ځکه چې انټیګرالېدونکي
برابردوله مایورانت لري:

$$|f(x, t)| \leq e^{-x} x^{r-1} x^k \leq ce^{-x/2}, \quad x \geq 1$$

او

$$|f(x, t)| \leq x^{1/r-1} |\ln x|^k \leq cx^{1/(2r)-1}, \quad x \leq 1$$

د $t \in [1/r, r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

د ټولو $\alpha, \beta > 0$ لپاره

لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ، کنیش

دا د پارامتر په واک کې انټیګرال

$$g(t) = \int_0^{\infty} \sin(xt) \frac{dx}{x}$$

مطلق پولي ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مایورانت هم نه لري.
دلته مو د t پسې د انټیګرال لاندې یو فورمال دفرنخیشن یوه تضاد ته لارښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t) = \int_0^{\infty} \cos(xt) dx$$

یو پولي ته نه تلونکی انټیګرال دی. له بلې خوا یو واریابل بدلون، $y = xt$
 $dy = t dx$

سرلیک

راکوي

$$g(t) = \int_0^{\infty} \sin(y) \frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}.$$

مشتق په دې لاس ته راوړنه کټمټ صفر دی.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیگ، کنیش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
بری د لوی څښتن سره دی.

د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوي ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې
شميرنه ، د احتمالي شميرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شمير: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا

ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - اناليزی ۱

۷ - اناليزي ۲

۸ - کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل اناليز

۱۲ - وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

onn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمک‌چپونه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا ست تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې گډې ودې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیري.

سرليک

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

— د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د گروپونو تيوري

- د بسونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکني ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره بڼه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library