



کتاب پېژندنه

د کتاب نوم:	اقتصادي رياضي
څانګه:	بانکداري او د تجارت اقتصاد
مولف:	محمد دهقامل
ژباړن:	عزت الله ځواب
د څار کمېټه:	
	- محمد آصف ننگ د تخنیکي او مسلکي زده کړو معین - دیپلوم انجنیر عبدالله کوزاي د تعلیمي نصاب رییس - محمد اشرف وحدت په تعلیمي نصاب کې د معینیت د مقام سلاکار
د علمي تصحیح کمېټه:	
	- عبدالجمیل ممتاز - محب الرحمن محب - احمد فهیم سپین غر
د ګرافیک او ډیزاین څانګې مسئول :	محمد جان علیرضایي
ګرافیک او ډیزاین:	محمد سلیم خان
چاپ کال:	۱۳۹۲ لمريز کال
تیراژ:	۱۵۰۰
چاپ ځل:	لومړی
وېب پاڼه:	www.dmtvet.gov.af
برېښنالیک:	info@dmvtvet.gov.af
کې ISBN:	۹۷۸۹۹۳۶۳۰۰۵۹۰

Ketabton.com

د چاپ حق د تخنیکي او مسلکي زده کړو له معینیت سره خوندي دی



ملي سرود

دا وطن افغانستان دی	دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې	هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی	د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو	د ترکمنو د تاجکو
ور سره عرب، گوجر دي	پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي	هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل څلیږي	لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به	لکه زړه وي جاوېدان
نوم د حق مو دی رهبر	وایو الله اکبر وایو الله اکبر



د پوهنې وزیر پیغام

گرانو زده کوونکو، محصلانو او درنو ښوونکو!

د یوې ټولنې وده او پرمختګ کاملاً د همغې ټولنې د پیاوړو کاري کادرونو، بشري قوې او ماهر و فکرونو په کار او زیار پورې تړلي دي. همدا بشري قوه او کاري مټي دي چې د هیواد انکشافی اهدافو ته د رسیدو لارې چارې طي کوي او د یوه نیکمرغه، مرفه او ودان افغانستان راتلونکی تضمینوي. انسان په خپل وار سره د الله تعالی له جانبته او هم د خپل انساني فطرت له اړخه موظف او مکلف دی چې د ځمکې په عمران او د یوه سوکاله ژوند د اسبابو او ایجاباتو د تکمیل لپاره خپل اغیزمن نقش، همدارنګه ملي او اسلامي رسالت ادا کړي.

له همدې ځایه ده چې د یوه ژوندي او فعال انسان نقش، د خپل ژوند د چاپیریال او خپلې اړوندې ټولنې په اړه، تل مطلوب او په هیڅ حالت کې نه نفی کېږي او نه هم منقطع کېږي. په ټول کې د پوهنې نظام او په خاصه توګه د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت مسوولیت او مکلفیت لري چې د اسلامي ارزښتونو، احکامو او همداراز معقولو او مشروع قوانینو ته په ژمنتیا سره، د افغانستان په انکشاف کې فعاله، چاپکه او موثره ونډه واخلي، ځکه دغه ستر او سپیڅلي هدف ته د رسیدو په خاطر د انساني ظرفیت وده، د حرفوي، مسلکي او تخنیکي کادرونو روزنه او پراختیا یو اړین مقصد دی. همدا په تخنیکي او مسلکي زده کړو مزین تنګي ځوانان کولی شي چې په خپلې حرفې او هنر سره په سیستماتیک ډول د هیواد انکشاف محقق او میسر کړي.

جوته ده چې په افغانستان کې د ژوند ټک لاره، دولتداري او ټولنیز نظام د اسلام له سپیڅلو احکامو څخه الهام اخیستی، نو لازمه ده چې زموږ د ټولنې لپاره هر ډول پرمختګ او ترقي باید په علمي معیارونو داسې اساس او بنا شي؛ چې زموږ د کارګر نسل مادي او معنوي ودې ته پکې لومړیتوب ورکړ شي. د حرفوي ظرفیت جوړونې تر څنګ د ځوانانو سالم تربیت او په سوچه اسلامي روحیه د هغوی پالنه نه یوازې پخپل ذات کې یوه اساسي وجیه ده، بلکې دا پالنه کولی شي چې زموږ وطن پخپلو پښو ودروي، له ضعف څخه یې وژغوري او د نورو له سیاسي او اقتصادي احتیاج څخه یې آزاد کړي.

زموږ گران زده کوونکي، محصلان، درانه استادان او مربیان باید په بشپړه توګه پوه شي، چې د ودان او نیکمرغه افغانستان ارمان، یوازې او یوازې د دوی په پیاوړو مټو، وینې احساس او نه ستړي کیدونکي جد او جهد کې نغښتی او د همدغو مسلکي او تخنیکي زده کړو له امله کیدای شي په ډیرو برخو کې د افغانستان انکشافی اهداف تر لاسه شي.

د دې نصاب له ټولو لیکوالانو، مولفینو، ژباړونکو، سمونکو او تدقیق کوونکو څخه د امتنان تر څنګ، په دې بهیر کې د ټولو کورنیو او بهرنیو همکارانو له مؤثرې ونډې او مرستو څخه د زړه له کومي مننه کوم. له درنو او پیاوړو استادانو څخه رجا مندانه هیله کوم چې د دې نصاب په ګټور تدریس او فعاله تدریب سره دې د زړه په ټول خلوص، صمیمي هڅو او وجداني پیکار خپل ملي او اسلامي نقش ادا کړي. د نیکمرغه، مرفه، پرمختللي او ویاړمن افغانستان په هیله

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

لړلیک

خپرکي	سرليکونه	پاڼې
لومړی	د توابغو ملت او د هغو اهميت	۲۸-۱
دویم	مشتق	۵۴-۲۹
درېیم	قسمي، ترکیبي او کلي مشتق نیونه	۷۲-۵۵
	سرچینې او اخیستنې	۷۳
	د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام	۷۴

مقدمه

اقتصادي رياضي د بانکدارۍ، اقتصاد او تجارت د څانگې د مهمو او اساسي مضامينو له ډلې څخه ده، چې محصلين يې په زده کولو سره د بانکي محاسبو او د تجارت د اقتصاد لپاره اړين مهارتونه ترلاسه کولای شي.

په لومړي څپرکي کې د توابعو لمټ، لمټ او په مسلکي برخو کې د هغو د کارولو په اړه توضيحات وړاندې شوي دي. په دويم څپرکي کې بيا مشتق، د مشتق ډولونه، د هغو اړوندې قاعدې او اړوند تهرينات له پوره شننې سره ځای پرځای شوي دي.

په درېيم څپرکي کې د قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نيونې په اړه توضيحات او تشرېحات وړاندې شوي دي. د څپرکي د موضوعاتو د نچور تهرينونه راوړل شوي، چې د يادو تهرينونو حل د محصلينو لپاره د درس په ښه درک کې مهمه مرسته کولای شي.

هيلمن يم د دې ټولگې په چاپ سره د دې برخې د استادانو د ستونزو يوه برخه حل شي او د درنو استادانو او گرانو محصلينو لپاره اړينې اسانتياوې منځ ته راوړي.

په درناوي

محمد دهقان مل

د کتاب ټوليزه موخه

په محاسبوي چارو کې اړين مهارتونه ترلاسه کول او د اقتصادي رياضي د اړوندو مسایلو حل؛ خو له قاعدو سره سم د تولید، صنعت او احصايې په برخو کې ترې گټه واخستل شي او د انسان ورځنی ژوند ورباندې هوسا شي.

د توابعو لمټ او د هغو اهميت

ټوليزه موخه

لوستونکي کولای شي د توابعو د لمټ اساسي مفهوم، د هغې اصول او قواعد درک کړي، لازم مهارتونه په کار يوسي، کولای شي مسایل حل کړي او د ټولنيز ژوند په ټولو ساحوکې يې د گټې اخېستو وړ وگرځي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي له پای ته رسولو سره لوستونکي کولای شي:

- ۱- د لمټ مفهوم په اساسي بڼه درک کړي.
- ۲- لمټ تعريف کړي او د هغو په قوانينو پوه شي.
- ۳- 0 ، $\frac{0}{\infty}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0 - \infty$ ، $\infty - \infty$ لمټونه محاسبه کړای شي.
- ۴- د مثلثاتي توابعو لمټ تعريف او د هغو سوالونه په سمه توگه حل کړي.

د لمټ اساسي مفهوم

انتروال! په لغت کې فاصلې ته وايي، د رياضي په اصطلاح کې د دوو مختلفو عددونو ترمنځ فاصلې ته انتروال وايي. انتر وال په درې ډوله دی:

۱. تړلی انتروال
۲. نیم پرانیستی انتروال
۳. پرانیستی انتروال

۱. تړلی انتروال: هغه انتر وال دی، چې د دوه نقطو د انجام درلودونکی وي.

لکه $[2, 8]$ لوی قوس د تړلي قوس علامه راښيي.

د فورمول په شکل يې دارنگه نوشته کولای شو. $[x \in I R : 2 \leq x \leq 8x]$

په لاندې شکل ښودل کېږي، لکه (۱) شکل
(۱) شکل



۲- نیم خلاص انتروال یا نیم تړلی انتروال: هغه انتروال دی، چې یو انجام په کې داخل او بل پکې نه وي لکه. $(2, 8]$ او $[2, 8)$ کوچنی قوس د خلاص والي علامه رابښي او لوی قوس د تړل کېدو علامه رابښي.

$$A = [x \in \mathbb{R} / 2 > x < 8]$$

یعنې

$$B = [x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 8]$$

(۲) شکل



(۳) شکل



۳- خلاص انتروال: هغه انتروال دی، چې د نقطو انجام په کې شامل نه وي.

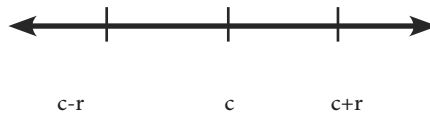
$$P = [x \in \mathbb{R} : 3 < x < 11] \text{ یعنې } (3, 11)$$

د یوې تابع حد یا د یوې تابع لمټ

مجاورت: هر خلاص انتروال د خپلو شاملو عناصرو مجاورت وي، لکه $(2, 8)$ یو خلاص انتروال دی، چې له ۳ تر ۷ عناصر په هغه کې شامل دي او $(2, 8)$ انتروال د دې ټولو عناصرو مجاورت دی.

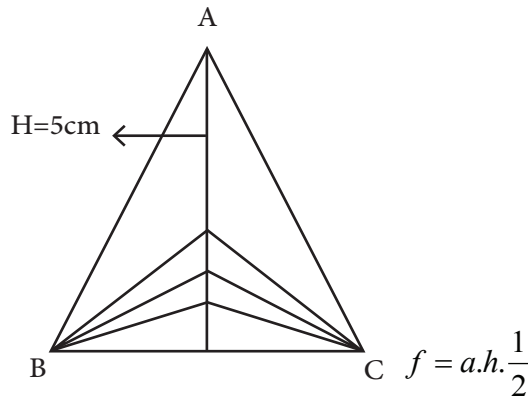
متناظر مجاورت: هر خلاص انتروال د خپل ځان وسطي متناظر مجاور وي، لکه $(2, 8)$ انتروال چې د متناظر مجاورت نقطه یې (۵) ده، باید وویل شي، چې د مجاورتونو هره نقطه

ډېر متناظره لري. که (b, a) د x عدد یو مجاورت وي، داسې چې x د (b, a) وسطي نقطه رابښي. دا چې (b, a) د x د متناظر مجاورت په نوم یادېږي. مثلاً $(0, 2)$ چې متناظر مجاورت د هغه دی، د r د هر مثبت عدد لپاره $c-r, +r, (r)0$ د C یو مجاورت وي (۴ شکل)



(۴) شکل

مخکې له دې چې لمټ (حد) تعریف کړو، هغه د مثالونو په واسطه واضح کوو او په (۶) شکل کې د ABC مثلث په نظر کې نیسو. چې قاعده یې $a=6\text{cm}$ او ارتفاع یې $h=5\text{cm}$ او مساحت یې په F ښایو، لرو چې



(۵) شکل

که قاعده ثابته وساتو او ارتفاع ته یې تغیر ورکړو؛ نو مساحت یې هم تغیر کوي او د h تابع دی، یعنې $F(h) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h$ چې په لاندې جدول کې د h او $F(h)$ ځینې قیمتونه ښودل شوي.

h	5	3	1	0,5	0,2	0,1	0,02	0,001
F(h)	15	9	3	1,5	0,6	0,3	0,06	0,003

له پورته جدول څخه معلومېږي، چې h په کمېدو $F(h)$ هم کمېږي. هغه وخت چې h او $F(h)$ مساحت صفر ته نېږدې کېږي $F(h)$ هم صفر ته تقرب کوي. په دې حالت کې ویلای شو چې د $F(h)$ صفر دی او په ریاضي کې یې په لاندې شکل لیکو:

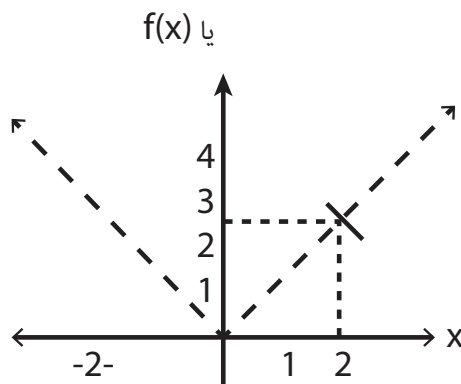
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

مثال: د $f(x) = x^2$ تابع په نظر کې نیسو، کله چې $x \rightarrow 2$ ته نېږدې کېږي $f(h)$ کوم قیمت ته تقرب کوي.

3	2.5	2.1	2.02	2.01	2.001	-2	1.999	1.99	1.99	1.5	1	x
9	6.25	4.41	4.0804	4.0401	4.004001	-4	3.996001	3.980025	3.9601	2.25	1	F(x)

په پورته جدول کې لیدل کېږي، کله چې x د 2 خواته نېږدې کېږي $F(x)$ د 4 خواته تقرب کوي.
یعنې

$$\lim_{n \rightarrow 2} f(x) = \lim_{n \rightarrow 2} x^2 = 4$$



شکل (6)

په پورته مثال کې لیدل کېږي، چې د توابعو د لمټ د پیدا کولو لپاره په یو a کې د ذکر شوې نقطې په یوه مناسب مجاورت کې د تابع وضعیت مطالعه شو او مطلوب لمټ پیدا شو.

که دې لمټ ته د عمومي لمټ نوم ورکړو، لیکلی شو چې: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ د b عدد د f د یوې تابع لمټ د a په نقطه کې یادېږي. که د N د هر مجاورت لپاره د b نقطه د D یو مجاورت د a نقطه د f د تعریف په ناحیه کې موجود وي او د هر x لپاره عنصر له D د $f(x)$ عنصر له N وي. یعنې $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ باید ووايو حتمي نه ده، چې a په $a \longrightarrow n$ د تعریف په ناحیه کې شامل وي.

د توابعو لمټ

لمټ د تحول د اندازې د ټاکلو د نهایي قیمتونو او یا د توابعو له مخې مهم وي. د معاصرې ریاضي عمومي مسایل له پخوا نه مشتق، سلسلې او نور له لمټ نه په ګټه اخیستو تعریف او توضیح کېږي.

د تحول تقرب (په یوه نقطه کې د یوې تابع ښي او کین حد ته) ویل کېږي، چې x متحول د a ټاکلي عدد ته تقرب کوي، که چېرې په خپل زړه a ته نږدې کېدای شي. یعنې د x او a تر منځ تفاوت له دواړو عددونو څخه کوچنی $0 < 8$ تر ټولو کوچنی شي. پورته مفهوم په سمبولیک شکل دارنگه لیکل کېږي. $8 > 0 : |x - a| < 8$

$$\text{Lim } x = a \quad \text{یا} \quad x \longrightarrow a \quad | \quad x - a \quad | \quad \longrightarrow 0$$

له ښي خوا د متحول تقرب ($x \rightarrow a^+$) که په یو متناقص تصاعد کې x قیمتونه شتون ولري، داسې چې تدریجاً څومره یې چې زړه وغواړي a ته نږدې شي، لکه:

$$x \rightarrow a^+ X: a+0, 1, a+0,01, a+0,001, a+0, 0001, \dots$$

له کینې خوا د متحول تقرب ($x \rightarrow a^-$) که چېرې متزايد تصاعد کې د x قیمتونه ټاکل کېدای شي، داسې چې تدریجاً په خپل زړه a ته نږدې شي. دا رنگه

$$x \rightarrow a^- X: a-0,1, a-0,01, a-0,001, a-0,0001, \dots$$

باید وویل شي، چې د x متحول تقرب a عدد ته معادل دی، دواړو خواوو (ښي او کین) ته له تقرب سره $x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x + 8) = 20 \quad \text{وښیئ چې}$$

حل: د اختیاري عدد لپاره $0 < \epsilon$ (ابتسیلون) قبلوو، چې $\epsilon > 0$ وي $(4X+8)-20 < \epsilon$ د عدد تعیینوو.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |4X-12| < \epsilon &\Rightarrow |4X+8-20| < \epsilon \quad \text{دواړه خواوې په 4 تقسیموو چې} \\ \Rightarrow 4|X-3| < \epsilon &\Rightarrow |X-3| < \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

نو د $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ لپاره لرو، چې

$$\Rightarrow 4|1-3| < \epsilon \Rightarrow 4x-12 < \epsilon \quad |x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \frac{\epsilon}{4}$$

د 8 عدد جمع او منفي کوو $4x+8-8-12 < \epsilon$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x+8) = 20 \quad \Rightarrow |4x+8-20| < \epsilon$$

دویم مثال: د x متحول د 4 عدد ته تقرب کړی، دا $x \rightarrow 4$ مفهوم توضیح کړئ!

$$x: 4, 1, 4, 01, 4, 001, 4, 0001, \dots, 4^+$$

حل

$$x: 3, 9, 3, 99, 3, 999, 3, 9999, \dots, 4^-$$

په پای کې باید ووايو، چې $x \rightarrow 4$

د تابع لمټ

هر کله چې د $f(x)$ تابع په یوه خلاص انټروال کې، چې د a عدد په هغې کې شامل دی. تعریف شوی وي د x متحول a ته په تقرب $f(x)$ په خپله خوښه L عدد ته نږدې شي، ویلای شو چې د $f(x)$ تابع لمټ عبارت له L څخه دی. کله چې x ، a تقرب وکړي، په لاندې شکل لیکو چې

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

د لمټ تعریف:

د $f(x)$ تابع د L عدد سره مساوي دی، کله چې $x \rightarrow a$ ته تقرب کړي.

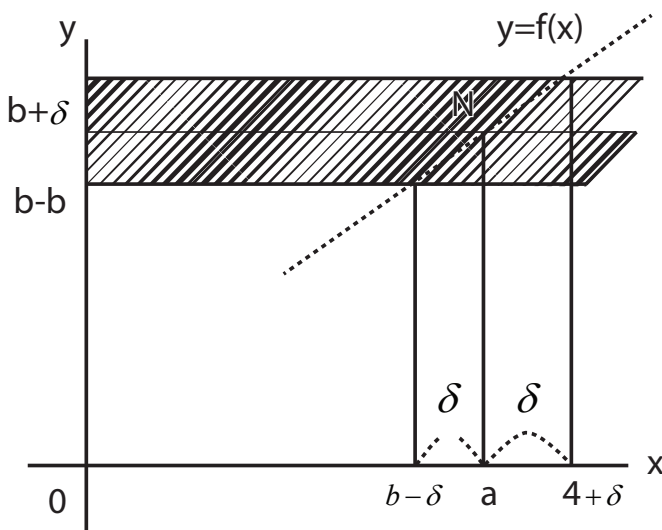
$$\epsilon > 0, \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon \quad \text{که}$$

دا چې: $\epsilon > 0, \delta > 0: a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$

$$\epsilon > 0, \delta > 0: x \in (x - \delta, x + \delta) = f(x) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$$

يا پورته تعريف په لاندې شکل ليکل کېدای شي.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow (|x - a| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x) - l| \rightarrow 0)$$



شکل (۷)

بڼي او کين ملتونه

۱: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د بڼي ملت لرونکې L_1 ده، که د هر $\epsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$

کوچنی عدد شتون ولري، داسې چې

$$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L_1 - \epsilon, L_1 + \epsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1 \quad \text{يا} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

۲ $f(x)$ د تابع په a کې د کين L_2 لرونکې ده، چې د هر $\epsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ یو عدد

شتون لري، داسې چې.

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$$

او يايې په سمبولیک شکل لیکو چې

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

۳- د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \rightarrow a$ د L لټ لرونکی وي.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{چې دې شرط چې} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

باید وویل شي هغه وخت، چې د یوې تابع ښي او کین لیمتونه له یو بل سره مساوي نه وي د لټ لرونکي نه ده.

$$\text{مثال:- وښایه چې} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x-3} - 9 = 6$$

حل: فرضوو چې $\epsilon > 0$ یو عدد δ موجود وي، داسې چې.

$$\left| \frac{x^2}{x-3} - 9 \right| < \epsilon$$

دا چې $|x-3| < \delta$ وي، د δ اندازه د ϵ له جنس څخه پیدا کوو.

$$|x+3-6| < \epsilon \Rightarrow |x-6| < \epsilon \quad \left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| < \epsilon$$

که $\delta = \epsilon$ وي په نتیجه کې $|x-3| < \delta$.

مثال: ثابت کړئ، چې $\lim_{x \rightarrow 5} (4x - 3) = 17$ دی.

حل: د هر متناظر مجاورت $(1, \infty)$ لري که چېرې $\in$ یو مثبت عدد $0 < \in$ دی: د

$$(17 - \in, 17 + \in)$$

باید $D = (a_1, a_2)$ مجاورت د 5 د عدد $(5 \in D)$ پیدا کړو، داسې چې د هر x لپاره له D

یا L $f(x) = 4x - 3$ په N کې شامل وي، یعنې

$$17 \in \langle 4x - 3 \rangle \quad 17 + \in$$

$$20 \in \langle 4x \rangle \quad 20 + \in$$

دواړه خواوې په 4 تقسیموو $\frac{5. \in}{4} < x < 5 \frac{5 + \in}{4}$

نو د $\frac{5. \in}{4} < x < 5 \frac{5 + \in}{4}$ لپاره او همدارنګه $17 - \in < 4x - 3 < 17 + 3$ صدق کوي.

نو $D = \frac{5. \in}{4} < x < 5 \frac{5 + \in}{4}$ په نتیجه کې د هر x لپاره له D څخه $f(x)$ په N کې شامل

دی او که $\in = \frac{1}{2}$ فرض شي.

$$N = \left(17 - \frac{1}{8}, 17 + \frac{1}{8} \right) = (16.5, 19.5) \quad D = \left(5 - \frac{1}{8}, 5 + \frac{1}{8} \right) = (4.875, 5.125)$$

د یوې تابع لمټ ته راجع قضیې

لومړۍ قضیه: په عمومي ډول د هرې خطي تابع لرو چې $f(x) = mx + b$

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$$

دویمه قضیه: که $m = 0$ وي د $f(x) = mx + b$ خطي تابع لاندې شکل اختیاروي. دې

$f(x) = b$ تابع ته ثابت تابع وايي، چې لمټ یې په a کې له b سره مساوي دی. \

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} b = b$$

درېیمه قضیه: که په خطي تابع کې $b = 0$ وي او $m = 1$ وي $f(x) = x$ تابع کېږي، دې

ته د لمټ تابع ویل کېږي. د تابع لمټ د a په نقطه کې عبارت له a څخه دی

$$\lim_{x \rightarrow a} mx = ma \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

خلورمه قضیه: که د g, f توابع د a په نقطه کې لټ ولري، لاندې قضیې صدق کوي.

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

د توابعو د جمعې د حاصل لټ له مجموعي لټونوسره مساوي دی.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b + c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b - c$$

پنځمه قضیه: په یوه نقطه کې د ضرب د حاصل لټ مساوي دی په یوه نقطه کې د لیمیتونو

له ضرب سره

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c$$

شپږمه قضیه: په یوه نقطه د خارج قسمت لټ مساوي دی، د خارج قسمت لټ د لټونو

په هغه نقطه کې په دې شرط چې $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ وي

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{a \rightarrow x} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{a}$$

اوومه قضیه: که لټ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ او μ یو ثابت عدد وي، د تابع لټ په هغه نقطه کې

ضرب ثابت عدد دی.

$$\lim_{x \rightarrow a} (\mu f)(x) = \mu \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \mu \cdot b$$

اټمه قضیه: د یوې جذري تابع لټ په یوه نقطه کې مساوي د لټ د جذر د هغه تابع په

هغه نقطه کې که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ وي یعنې

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$$

که چېرې $\sqrt[n]{b}$ موجود وي.

مثال: د $\lim_{x \leftarrow 4} \sqrt{x+5}$ لټ پیدا کړئ!

$$\lim_{x \leftarrow 4} \sqrt{x+5} = \sqrt{\lim_{x \leftarrow 4} (x+5)} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

نهمه قضیه: که $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$ وي نظر د مطابقتونو قانون ته لرو:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n - a^n = \lim_{x \rightarrow a} (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot a + x^{n-3} \cdot a^2 + \dots + a^{n-1})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (a^{n-1} + a^{n-2} \cdot a + a^{n-3} \cdot a^2 + \dots + a^{n-1})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} \cdot a + a^{n-3} + a^2 \dots + a^{n-1}) = a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} \cdot a + a^{n-1} + \dots + a^{n-1}) = n a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$$

مثال: د $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^5 - 2^5}{x - 2}$ پیدا کړئ

حل: فورمول ته په کتو لرو، چې: $\lim_{n \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^5 - 2^5}{x - a} = 5 \cdot 2^4 = 80$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow a} (x^3 + 5x^2 - 3x + 7)$ پیدا کړئ، که چېرې $x \rightarrow a$ ته تقرب وکړي

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^3 + 5x^2 - 3x + 7) = 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 7$$

$$= 8 + 20 - 6 + 7 = 29$$

مثال: لاندې لمټ پيدا کړئ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{5x^3 - 6x^2 - 6x + 2}{2x^2 + 3x - 12}$

حل:

$$f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 6x + 2$$

$$g(x) = 2x^2 - 3x - 12$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{f(2)}{g(2)} =$$

$$\Rightarrow \frac{5 \cdot (2^3) - 6(2^2) - 6 \cdot 2 + 2}{2 \cdot (2^2) + 3 \cdot 2 - 12} = \frac{40 - 24 - 12 + 2}{8 + 6 - 12} = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 6x^2 - 6x + 2}{2x^2 + 3x - 12} = 3$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ وي، ثبوت کړئ.

حل: فرض کوو چې $\epsilon > 0$ د δ عدد موجود دی داسې چې

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \epsilon$$

کله چې $|x - 3| < \delta$ وي، د δ اندازه د ϵ له جنسه لاسته راوړو

$$\left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow x + 3 - 6 < \epsilon \Rightarrow |x - 3| < \epsilon$$

داسې چې δ مساوي دی له ϵ سره، اوس د $|x - 3| < \delta = x^2 - 9| - 6|$ لپاره

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6$$

$$\Rightarrow x + 3 = 6 \Rightarrow 3 + 3 = 6 \Rightarrow 6 = 6$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 3x + \frac{2}{x})$ پیدا کریں۔
حل:

$$F(x) = (x^3 - 3x + \frac{2}{x}) \Rightarrow F(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\lim_{x \rightarrow 3} h(x)}$$

$$= \frac{g(3)}{h(3)} = \frac{(3^3) - 3(3^2) + 2}{3} = \frac{27 - 27 + 2}{3} = \frac{2}{3}$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ پیدا کریں۔

حل: $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ یعنی $f(x)$ یو ہ ناطقہ تابع دہ،
دا چہ $x \rightarrow 4$ صفر کہی ا و د f د 4 د تعریف پہ ناحیہ کہی شامل نہ دی او $x \neq 4$ لاستہ
ہی راوړو۔

$$\lim_{x \rightarrow 4} F(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-3)(x+4)}{x-4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 4 + 4 = 8$$

بی نهایت د تابع د لمٹ پہ حیث

ویل کہی، چہ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \alpha$ کہ د خپلې خوښې M څخه لوی د هر عدد لپاره د δ
مثبت پیدا شوی وي، داسې چہ له $|x - a| < \epsilon$ غیر مساوات څخه $|x - a| < \epsilon$ غیر مساوات په
لاس راځي لکه $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \alpha \Rightarrow M > 0, \delta > 0$ داسې چہ $|x - a| < \delta \Rightarrow |F(x) - \alpha| < M$
دلته دې شکل ته اوړي۔

۱- هر کله چې $f(x) > M$ وي $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ دی.

۲- هر کله چې $f(x) > M$ وي $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -a$ دی.

مثال: پیدا کړئ چې $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x+1}{x} = 2$ دی

حل: د $\epsilon > 0$ عدد لپاره فرض کوو، چې $\left| \frac{2x+1}{x} - 2 \right| < \epsilon$

$$\Rightarrow \left| \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} - 2 \right| < \epsilon \Rightarrow \left| 2 + \frac{1}{x} - 2 \right| < \epsilon$$

$$= \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon \Rightarrow x > \frac{1}{\epsilon}$$

که د $N = \frac{1}{\epsilon}$ لپاره شرط دی $\lim_{x \leftarrow a} \frac{2x+1}{x} = 2$ سم دی.

مثال: $\lim_{x \leftarrow a} \frac{x^2 + 2x}{x^2}$ محاسبه کړئ.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} 1 + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{2}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

مثال: په داسې حال کې چې $\lim_{x \rightarrow a} 2(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ پیدا کړئ.

يعنې: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} = \infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty$ وي.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1-x^2}}{\frac{1}{1-x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1-x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{1-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

که $F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}$ وي او $2(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2}$ وي داسې حل کېږي.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} \cdot 1-x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x(1+x) = 1+1 = 2$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow a} (2-x^2) = -a$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+5) = a$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [(x^2+5) + (2-x^2)] = \lim_{x \rightarrow a} (5+2) = 7$$

د لټ محاسبه او ځينې مبهم حالات

د لټونو په محاسبه کې د ضرب د حاصل مجموعه او ځينې وخت د توابعو نسبت د مبهمو شکلونو $0, \infty, 0-\infty, \infty-\infty$ سره مخامخ کېږو، چې ځينې حالتونه يې په لاندې ډول دي.

۱- په $\frac{0}{0}$ حالت کې: که $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ولرو، داسې چې $F(x)$ ، $g(x)$ پولینومي توابع وي،

په صورت او مخرج کې يې مشترک فکتور $(x-a)$ دی.
او په بعضو حالاتو کې کېدای شي مضاعف او يا څو ځلي وي.

لومړی مثال-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2}{x^2-4x+4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{2-2} = \frac{2}{0} = \infty \end{aligned}$$

دویم مثال: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h^2)-x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h^2)-x^2}{h} = 2x$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ پیدا کریں!

حل: دا چې $x=2$ د $\frac{0}{0}$ شکل اختیاروي، د لمټ د پیدا کولو لپاره د تابع صورت او مخرج د صورت او مخرج په مزدوج کې ضربوو، لرو چې:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)(x+\sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-(x+2)(\sqrt{4x+1}+3)(\sqrt{4x+1}-3))}{\sqrt{4x+1}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2+1)(\sqrt{4 \cdot 2+1}+3)}{4(2+\sqrt{2+2})} = \\ &= \frac{(3)(\sqrt{9+3})}{4(2+2)} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 4} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

۲- $\frac{\infty}{\infty}$ حالت: کله چې $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)}$ د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل اختیار کړي، $\frac{F(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{g(x)}}$

په حالت کې د ∞ شکل ته بدلېږي. د دې طریقې په پیروي سره کولی شو ابهام رفع کړو؛ خو کېدای شي ځینې وخت سخت مثال هم آسانه حل شي. په دې حالت کې د کسر صورت او مخرج همزمان د متحول په لوړ طاقت تقسیموو، ابهام له منځه ځي، په دې شرط چې $\frac{\infty}{\infty}$ حالت د دوو توابعو په نسبت کې، چې له دې جملې څخه په پولینوم کې ښکاره شي. مثال: هغه لټونه چې $\frac{\infty}{\infty}$ حالت لري، غواړو څو مثالونه یې د غونې په شکل حل کړو.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{x^2 - 12x + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(3 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2})}{x^2(1 - \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{3}{1} = 3$$

دویم مثال:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 5}{6x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(8 + \frac{5}{x})}{x(6 + \sqrt{\frac{x}{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{5}{x}}{6 + \sqrt{\frac{x}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{5}{x}}{6 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(8 + \frac{5}{x})}{x(6 + \sqrt{\frac{x}{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{5}{x}}{6 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

درېم مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x + 5}{\sqrt{9x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(9 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2})}{x^2 \sqrt{9 + \frac{1}{x^4}}} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

څلورم مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 8x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})}{x^2(1 - \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

۳- درېم حالت (0 ∞) :

$\lim_{x \rightarrow a} \{F(x).g(x)\}$ ممکنه ده په $0 \cdot \infty$ شکل وي، په دې حالت کې لږ $F(x)g(x) = \frac{F(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ د $\frac{0}{0}$ شکل اختیاروي، موږ لاندې مثالونه د نمونې په شکل حل کوو.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left[(x^2 - 25) \cdot \frac{1}{x - 5} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 5 + 5 = 10$$

دویم مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left[(x^2 - 16) \frac{1}{x-4} \right] &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 4+4 = 8 \end{aligned}$$

درېم مثال: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a}}{x-a}$ مقدار محاسبه کړئ!که $x = y^5$ او $a = b^5$ فرض کړو، لرو چې:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a}}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{y-b}{y^5-b^5} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{y-b}{(y-b)(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4} = \frac{1}{5b^4} = \frac{1}{5\sqrt[5]{a^4}} \end{aligned}$$

-4 $\infty - \infty$:که $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)]$ د $\infty - \infty$ شکل ولري.

په دې حالت کې $f(x) - g(x) = f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right)$ او یا $0 - \infty$ حالاتو ته اوږي، باید یاده شي، چې که د دوو کسرونو د تفاضل حالت او یا د جذرونو د تفاضل شکل اختیار کړي، د یو بل څخه د کسرونو د تفریق کولو، په مزدوجونو باندې د جذري افادو ضرب او تقسیم په نتیجه کې ابهام د حذف قابل وي.

مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$ لټ محاسبه کړئ!

حل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

دویم مثال: $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2})$ پیدا کریں!

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x-1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - 8x^3) = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^5 (1 - \frac{8}{x^2})] = \infty \cdot 1 = \infty$$

خلورم مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x + 1})$ لمٹ پیدا کریں!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 5x + 1})(x + \sqrt{x^2 + 5x + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 5x + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 5x - 1}{x + \sqrt{x^2 + 5x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x - 1}{x + \sqrt{x^2 + 5x + 1}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(-5 - \frac{1}{x})}{x + \sqrt{x^2 + 5x + 1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(-5 - \frac{1}{x})}{x(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-5}{1+1} = -\frac{5}{2}$$

پنجم مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x+1})$ پیدا کریں!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x + 1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

بی نہایت د لمٹ پہ حیث پہ بی نہایت کی

دا چي $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ دی، کہ د هر لوی او M مثبت عدد لپاره د N یو مثبت عدد وټاکل شي، داسې چي د $|x| > N$ غیر مساوات څخه د $|f(x)| > M$ غیر مساوات لاس ته راشي، په سمبولیک شکل داسې لیکو.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow M > 0, N > 0 / |x| > N \Rightarrow f(x) > M$$

په پورتنیو تشبېحاتو کې څلور حالتې مطرح کېږي، چې عبارت دي له:

- 1) $x > N : f(x) > M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- 2) $x < -N : f(x) < -M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- 3) $x < -N : f(x) > M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- 4) $x > N : f(x) < -M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

د توابعو محدودیت

1- $f(x)$ تابع په یوه نقطه کې محدوده نومېږي، ځکه چې $|f(x)|$ قیمتونه د M له یوه ټاکلي عدد څخه لویېدلی شي، یعنې $|f(x)| \leq M$.

2- $f(x)$ تابع کله چې $x \rightarrow a$ محدوده وي، که په یوه $(a-f, a+f)$ مجاورت کې د a څخه محدوده وي.

3- $f(x)$ تابع د $x \rightarrow \infty$ لپاره محدوده ده، که د N مثبت عدد موجود کړی شي، د هر x لپاره د $|x| > N$ تابع $f(x)$ محدوده ده، لکه $f(x) = \cos x$ په IR کې محدوده ده او $g(x) = \frac{x+1}{x}$ تابع د $x \rightarrow \infty$ لپاره محدوده ده.

بې نهایت کوچنۍ توابع

د $d(x)$ تابع په $x \rightarrow a$ کې بې نهایت کوچنۍ نومېږي، که $\lim_{x \rightarrow a} d(x) = 0$ وي.

۱: د دې لپاره چې $\lim_{x \rightarrow a} d(x) = b$ وي، لازمه او کافي ده، چې $f(x)$ د b ثابت عدد د مجموعې په حیث او د $d(x)$ بې نهایت کوچنۍ تابع په $x \rightarrow a$ وړاندې کېدی شي، یعنې:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = b + d(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} d(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

۲- کله چې $d(x)$ په $x \rightarrow a$ کې بې نهایت کوچنۍ وي، چې صفر نه شي؛ نو

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{d(x)} = \infty$$

۳- د بې نهایت کوچنیو توابعو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

۴- د بې نهایت کوچنۍ تابع د ضرب حاصل او محدوده تابع یوه بې نهایت کوچنۍ تابع وي.

۵- هرکله $d(x)$ بې نهایت کوچنۍ او $u(x)$ داسې تابع، چې لمټ یې صفر کېدای نه شي؛ نو $v(x) = \frac{d(x)}{u(x)}$ تابع بې نهایت کوچنۍ ده.

مثال: $d(x) = x^2 - 4$ تابع بی نهایت کوچنی ده، څکه چې که $x \rightarrow 2$ تقرب وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 4 - 4 = 0$$

دویم مثال: $d(x) = x^2 - 4$ په $x \rightarrow 3$ بی نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = (3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

درېم مثال: $d(x) = \frac{1}{2x}$ په $x \rightarrow \infty$ بی نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

څلورم مثال: $d(x) = x^3 - 27$ تابع په داسې حال کې $x \rightarrow 3$ $\lim_{x \rightarrow 3} d(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 27)$ بی نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x \rightarrow 3} ((3)^3 - 27) = 0$$

$f(x) = \frac{2}{5x^2 - 6x}$ تابع په $x \rightarrow \infty$ بی نهایت کوچنی ده، څکه چې:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{5x^2 - 6x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

د مثلثاتي توابعو لمټ

مخکې له دې چې د مثلثاتي توابعو لمټ تشرېح کړو، مثلثاتي توابعو ته په لاندې ډول شرح ورکړو، چې مثلثاتي توابع یې عبارت دي له:

$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

$$y = \tan x$$

$$y = \cot x$$

$$y = \sec x$$

$$y = \csc x$$

د دغو توابعو لمټ، په داسې حال کې چې $x \rightarrow 0$ وي، په لاندې ډول یې لاس ته راوړو.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \cot x = \infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \sec x = \infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \csc x = \infty$$

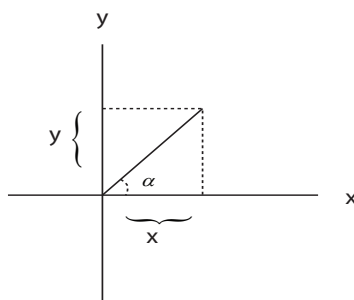
د مثلثاتي نسبتونو تعريف

کله چې α زاويه په ستندرد حالت کې د (x, y) اختياري نقطه د دويمې ضلعي د دغې زاويې غیر د مبداء څخه وي او وروسته $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ مساحت د $(0, 0)$ او (x, y) نقطو تر مینځ وي، د α زاويې مثلثاتي نسبتونه عبارت دي له:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x}, \quad \csc \alpha = \frac{r}{y}$$



(۸) شکل

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

باید وویل شي، چې په پورته څلور گونو حالاتو کې مخرجونه صفر نه وي، اساسي رابطه د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په لاندې ډول ده.

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{\frac{r}{x}}{\frac{x}{r}} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\csc \alpha = \frac{r}{y} = \frac{\frac{r}{y}}{\frac{y}{r}} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2}$$

دا چې $x^2 + y^2 = r^2$ دی، په پورته معادله کې یې د هغه په ځای وضع کوو.

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2}$$

همدا ډول $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$ په لاس راځي.

د مثلثاتي توابعو لمټ

د مثلثاتي توابعو د لمټ په محاسبه کې امکان لري، چې د ابهام حالت منځته راشي، په دا ډول لمټ کې د ابهام له مختلفو شکلونو څخه مهم شکل $\frac{0}{0}$ دی او دا حالت د یوه عمده فکتور د تشخیص په واسطه، چې د $\sin x$ نسبت او د x زاویه ده رفع کړو، موږ په مثلثاتو کې د $y = \sin x$ او $y = \cos x$ توابع پېژنو، کله چې x صفر ته نږدې کېږي د $\sin x$ تابع صفر ته تقرب کوي، یعنې $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ، چې دا د $y = \sin x$ گراف په شکل ښه درک کولای شو. (۱) شکل

په همدې ترتیب کله چې x د (۱) خواته تقرب وکړي، یعنې $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ، په (۲) شکل کې د $\cos x$ گراف په ښه ډول سره ښیو، معلومېږي چې د y قیمت په صفري نقطه کې له یوه سره مساوي دی. (۲) شکل

قضیه:

کله چې د x زاویه د صفر خواته تقرب کوي، د $\sin$ او x نسبت د ۱ خواته تقرب کوي.

$$\lim_{x \rightarrow D} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ثبوت: د x زاویه لکه څنګه چې $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ده، د r له شعاع سره مرکزي زاویه په نظر کې نیسو، لکه د (۴) شکل، د دوو $\triangle OAM, \triangle OAC$ مثلثونو مساحتونه د OAM قطاع د ذکر شوې دایرې سره مقایسه کوو، لرو چې:

(۴) شکل

د OAC < مثلث مساحت، د OAM < قطاع مساحت، د OAM مثلث مساحت او همدارنګه د مثلثونو او قطاع مساحت په ځانګړي ډول محاسبه کوو، لرو چې:

$$OAM \text{ د مثلث مساحت} = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} r \cdot \overline{BM}$$

$$OAM \text{ د قطاع مساحت} = \frac{1}{2} x r^2$$

$$OAC \text{ د مثلث مساحت} = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} r \cdot \overline{AC}$$

بنا پر دې د (۴) شکل د مضاعفونو تساوي لاندې شکلونه اختیاروي:

$$= \frac{1}{2} r \overline{BM} < \frac{1}{2} x r^2 < \frac{1}{2} r \overline{AC} \dots\dots\dots 2$$

د ۲ رابطې اطراف په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو، اخړني نامساوات لاندې شکل ځانته اختیاروي.

$$\frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{2} r \cdot \overline{BM} < \frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{2} x r^2 < \frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{2} r \overline{AC} \Rightarrow \frac{\overline{BM}}{r} < x < \frac{\overline{AC}}{r}$$

دا چې $\frac{\overline{BM}}{r} = \sin x$ او $\frac{\overline{AC}}{r} = \tan x$ دی، د دې پر ځای په پورتنۍ رابطه کې وضع کوو.

$$\sin x < x < \tan x$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

ټول پورتنی حدونه په $\sin x$ تقسیموو، لرو چې:

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x}{\frac{\cos x}{\sin x}} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{\cos x} < \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

تول حدونه معكوسو

د ټولو حدونو لمټ اخلو، گورو چې:

فلهدا په نتيجه کې

لومړی مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \rightarrow 0$ وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

دویم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \rightarrow 0$ وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2$$

درېیم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \rightarrow 0$ وکړي.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

څلورم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}$ محاسبه کړئ، که چېرې $x \rightarrow 0$ ته تقرب وکړي.
حل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \sin(ax)}{ax} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = a \cdot 1 = a \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} &= a \end{aligned}$$

پنجم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \rightarrow 0$ ته تقرب وکړي.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \right) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

شپږم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \rightarrow 0$ ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \sin 8x}{8x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{8x} = 8 \cdot 1 = 8$$

یا په بل عبارت، $8x = y$ نیسو او په پورتنۍ معادله کې یې وضع کوو.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \sin 8x}{8x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8y}{8y} = 8 \cdot 1 = 8$$

اووم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$ لمټ پیدا کړئ، که چېرې $x \rightarrow 0$ ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1 \cdot 1 = 1$$

اتم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 6x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: کوشن کوو چې یو ضریب عامل د $\frac{\sin y}{y}$ په شکل لاسته راوړو، صورت او مخرج په 6 کې ضربوو، $6x = y$ وضع کوو، لرو چې:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 6x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cdot 5 \cdot \sin 6x}{6x} = 30 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = 30 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6y}{6y} \\ &= 30 \cdot 1 = 30 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 6x}{x} = 30\end{aligned}$$

نهم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan x}{2 \tan 3x + \sin x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \rightarrow 0$ ته تقرب کړی وي.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan x}{2 \tan 3x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{x \sin x}{x \cos x}}{3x \frac{2 \tan 3x}{3x} + \frac{\sin x}{x}} = \frac{(x \frac{\sin^2 x}{2x} + \frac{\sin x}{x \cos x})}{(x \frac{6 \tan 3x}{3x} + \frac{\sin x}{x})} \\ &= \frac{(2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x})}{(2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x})} = \frac{2 + 1 \cdot \frac{1}{1}}{6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} + 1} = \frac{3}{7}\end{aligned}$$

د لومړي څپرکي پوښتنې

د لاندې توابعو لمټ محاسبه کړئ؟

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = ?$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x^2-3} = ?$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-1} = ?$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x}) = ?$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-11x+5}{x^2+x} = ?$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = ?$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x} = ?$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 4 = ?$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+1} - x = ?$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2} = ?$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = ?$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 3ax + 2a^2}{x^2 - 2ax - 3a^2} = ?$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + \frac{4}{x}) = ?$$

$$12) \lim (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = ?$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x^2+x} = ?$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - h}{h} = ?$$

د لاندې توابعو لمټ په لاس راوړئ؟

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan 8x}{\tan 2x} = ?$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = ?$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin a}{x-a} = ?$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = ?$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 8x}{\tan 2x} = ?$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x}) = ?$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} = ?$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y \cdot \sin y} = ?$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - 6 \cos^2 y}{y^2} = ?$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} (8x \cot g 4x) = ?$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = ?$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \sin 5x}{x} = ?$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} = ?$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(12x)}{\sin(4x)} = ?$$

$$10) \lim_{b \rightarrow 1} \frac{\sin(b^2-1)}{b^2-1} = ?$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = ?$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} = ?$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 2x} = ?$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{4x^2}$$

مشتق

ټوليزه موخه:

د مشتق او دهغه اصول پېژندل، همدارنگه د مثلثاتي او لوگارتمي توابعو له مشتقاتو سره آشنایېږ.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای ته رسولو سره به محصلین په لاندې برخو کې پوره پوهه ترلاسه کړي:

- ۱- د مشتق تعریف او د هغې د اړوندو پوښتنو حل.
- ۲- د مشتق قواعد او اصول په صحیح ډول پېژندل او له هغې څخه د گټې اخستېنې طریقه.
- ۳- د مثلثاتي توابعو د مشتقاتو تعریف او د هغې د اصولو او قواعدو پېژندل.
- ۴- د لوگارتمي توابعو مشتقاتو تعریف، قواعد او د مشتق نیولو د اصولو پېژندل.
- ۵- د دویمو او له هغې څخه د لوړو مشتقاتو پېژندل او د هغې د اړوندو پوښتنو حل کول.

د اوولسمې پېړۍ په لومړیو کې د پیر فرما فرانسوي ریاضي پوه اسحق نیوټن (انګلیسي) ولایپ نیتزد (الماني) په واسطه د مشتق بنسټ کېښودل شو، چې نن ورځ د ډېرو مهمو او اساسي اقتصادي مسایلو، تفاضلي حساب او انټیګرال اړوند معاصرې ریاضي او نور د مشتق د مفهوم په اساس رامنځته شوي دي او دا چې مشتق یو ډېر اوږد بحث دی؛ نو کوشنې کوو، چې په واضح ډول یې وڅېړو کړو.

د مشتق تعریف: د Y تابع په متحول کې د نسبي تغیر پیدا کول د یو وارد شوي تغیر په اساس په یو مستقل متحول کې، یعنې $y = f(x)$ او که x د متحول قیمت تغیر وکړي؛ نو د وارد شوي تغیر پیدا کول په نسبي شکل د Y تابع په متحول کې په $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ شکل سره ښودل کېږي.

یا په بل عبارت مشتق عبارت دی د تابع د تزايد لمټ د مستقل متحول پرتزايد باندې، که چېرې د مستقل متحول تزايد د صفرخواته تقرب کوي.

يعنې $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ وکړي. بايد يادونه وشي چې د مشتق د ښودلو لپاره د تابع د پاسه يو زور نوشته کوو، يعنې د $f'(x)$ د $f(x)$ مشتق او $g(x)$ د $g(x)$ مشتق او $d'(x)$ د $d(x)$ او $h'(x)$ د $h(x)$ مشتق وي دا چې په يوه نقطه کې د تابع مشتق په شکل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\frac{dy}{dx}$ په عمومي صورت د تابع مشتق په $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ شکل لیکو.

مثال: $f(x) = x^2$ مشتق پيدا کړئ!

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = a+a = 2a$$

مثال: د $y = 3x^2 - 5$ تابع د گراف ميل په (2,0) نقطه کې پيدا کړئ!

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(2+h)^2 - 5) - (3(2)^2 - 5)}{h}$$

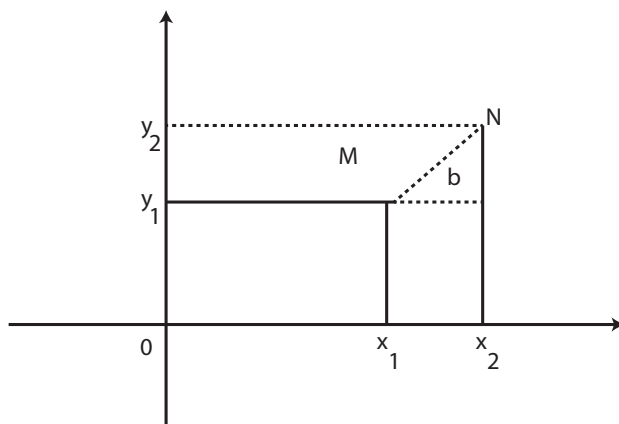
$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(4+4h+h^2) - 5) - (3(4) - 5)}{h} =$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(12+12h+3h^2-5) - (12+5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h+3h^2}{h}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(12+3h)}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} (12+3h) = 12$$

د هندسي مشتق تعريف

د تابع د مماس ميل په يوه مشخصه نقطه کې، د تابع له مشتق څخه په هماغه نقطه کې عبارت دی.



فرض کوو چې د $y = f(x)$ تابع منحنی رسم شوی، چې د منحنی لومړۍ نقطه د M وي، دا نقطه د مستقل متحول ارزښت ox_1 او د تابع د متحول ارزښت oy_1 نومېږي، چې د مستقل متحول د تغیر په اثر x_1 او x_2 له M نقطې دویمې نقطې N ته تغیر خوري چې په هغې نقطه کې تابع د y_2 ارزش اختیاروي، په نتیجه کې د تابع مشتق $y = f(x)$ دی او په یوه مشخصه نقطه کې د منحنی د مماس میل پیدا کول، چې M نقطه وي او که N نقطه M نقطې ته نږدې کړو او د هغې لمب په یوه نږدې فاصله کې M نقطې ته تقرب ورکړو، د هغې د میلان د تغیر درجه په لاندې ډول په لاس راوړو.

$$\cos = \frac{MA}{MN}, \sin b = \frac{AN}{MN}$$

$$\tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{MN}{MA} = \frac{AN}{MN} \cdot \frac{MN}{MA} = \frac{AN}{MA}$$

$$\tan b = \frac{AN}{MA} \Rightarrow \tan b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

یا

$$\Rightarrow \tan b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m'$$

د مشتق اقتصادي تعریف

مشتق له نهایي کمیت څخه عبارت دی، که یو مجموعي کمیت ور کړ شوی وي لکه د مجموعي عاید تابع، مجموعي لگښت، مجموعي تولید، مجموعي سپما، مجموعي سرمایه گزاری، مجموعي صادرات او واردات او نور.

په لنډه توګه وایو چې د تابع اول مشتق عبارت له نهایي عاید او نهایي لګښت، نهایي سپما، نهایي پانګې اچونې، صادراتو او وارداتو څخه وي، د لاندې مثالونو مشتق له لمټ نه په ګټه اخیستو پیدا کړئ!

لومړی مثال- $y = 3x$

$$y' = ?$$

$$\Delta y + y = 3(x + \Delta) \Rightarrow \Delta y = 3(x + \Delta x) - y$$

$$\Rightarrow \Delta y = 3x + 3\Delta x - 3x = 3\Delta x \Rightarrow \Delta y = 3\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 \Rightarrow y' = 3$$

دواړه خواوې په Δx تقسیموو.

دا چې $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ دی نو

دویم مثال- $f(x) = x^3$ وي $f'(x)$ پیدا کړئ.

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \Rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = (a^2 + a \cdot a + a^2)$$

$$f'(x) = (a^2 + a^2 + a^2) = 3a^2$$

$$f'(x) = 3a^2$$

د مشتق الجبري تعریف

هر کله چې په $y = f(x)$ تابع کې د x متحول د h په اندازه او یا Δx تزايد وکړي، ذکر

شوې تابع $\Delta y = f(x + h) - f(x)$ زیاتوالی متحول کېږي او د تابع او متحول د زیاتوالي

نسبت عبارت دی له:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

که چېرې د x لمټ د صفر خواته تقرب وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

که وجود ولري ویلای شو چې ذکر شوې تابع د x په نقطه کې د مشتق لرونکې ده، چې

لمټ په پورته رابطه کې نیول شوی دی، د مشتق نیونې عملیه ورته وایي یعنې د $y = f(x)$

تابع مشتق په لاندې ډول څېړو.

$$DY = Df(x) \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{d(x)} = \frac{df(x)}{dx} \quad \text{یا} \quad y' = f'(x)$$

یا په لاندې شکل ښودل کېږي:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

او یا په بل عبارت:

$$y' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

او په اخره معادله کې د $f(x)$ تابع مشتق په لاندې ډول هم تعریفوو.

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

او همدارنگه د $f(x)$ مشتق په $x = x_0$ کې عبارت دی له:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

مثال:- د $f(x) = x^4$ تابع مشتق دارنگه لاسته راوړو:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

حل: فورمول ته په کتو لرو چې:

$$f(x+h) = (x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

مثال:- د $f(x) = 4x - x^2$ تابع د گراف میل په $p(2, -2)$ نقطه کې پیدا کړئ!

حل: د x قیمت په p نقطه کې عبارت له 2 دی او میل په m ښیو.

$$m \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(2+h) - (2+h)^2 - 4 \cdot 2 + 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 4h - (4 + 4h + h^2) - 8 + 4}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - (4 + 4h + h^2) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - 4 - 4h - h^2 + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h) = 0$$

مثال:- د $f(x) = 4x - x^2$ تابع د گراف میل په $p(3, -3)$ نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\begin{aligned} m \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(-3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(3+h) - (3+h)^2 - 4 \cdot 3 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 4h - (9 + 6h + h^2) - (4 \cdot 3 + 3^2)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 + 4h - 9 - 6h - h^2 - 12 + 9}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 6h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4 - 6 - h)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} (-2 - h) &= -2 \end{aligned}$$

د مشتق د پیدا کولو قاعدې

د مشتق د سوالونو او مثالونو د اسانه حل کولو په خاطر کولای شو له فورمول او د مشتق له قواعدو نه ګټه واخلو او د هغې سوالونه په سمه توګه تر بررسی لاندې ونیسو. (۱) قاعده: د ثابتې تابع مشتق صفر دی.

لومړۍ قاعده:

فرضاً $f(x) = C$ یوه ثابت تابع وي؛ نو $f'(x) = 0$ دی یعنې $(C \in \mathbb{R})$.

ثبوت: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ او C یو ثابت عدد دی (تزايد یا تناقص) نه لري او h مقدار خلاف د صفر $x \rightarrow 0$ کړی یعنې:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

مثال:- د $f(x) = 20$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20 - 20}{h} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

دویمه قاعده:

د عینیت تابع مشتق (۱) یو دی.

هر کله چې $f(x) = x$ تابع وي؛ نو $f'(x) = 1$ دی

ثبوت:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - x}{h} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \Rightarrow f'(x) = 1$$

نوټ: تابع په $x = 0$ کې د مشتق نیونې وړ نه وي، په داسې حال کې چې دا تابع په صفر کې متمادي ده.

درېمه قاعده:

د $f'(x) = x^n$ تابع مشتق د $(n \in \mathbb{N})$ لپاره عبارت له $f'(x) = nx^{n-1}$ څخه وي.
 فلېدا د طاقت لرونکې تابع مشتق مساوي دی، توان ضرب د تابع او له توان نه یو کمېږي.
 ثبوت:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^n - x^n \\ &= x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}nx^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n \\ f(x+h) - f(x) &= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}nx^{n-2}h^2 + \dots + h^n \end{aligned}$$

د رابطې دواړه خواوې په h تقسیموو لرو چې:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)nx^{n-2}h^2}{2} + \dots + h^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)nx^{n-2}h}{2} + \dots + h^{n-1}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{n(n-1)nx^{n-2}h}{2} + \dots + h^{n-1}$$

$$f'(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)nx^{n-2}h}{2} + \dots + h^{n-1}) = nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{یا} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

مثال:- د $f(x) = 4x - x^2$ تابع مشتق پیدا کړئ!

$$f(x) = x^{12}$$

$$f'(x) = 12 \cdot x^{11}$$

$$2)f(x) = x^{20} \Rightarrow f'(x) = 20x^{19}$$

مثال:- د $y = \sqrt{x}$ تابع مشتق درېمې قاعدې ته په کتو لاسته راوړئ!

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \Rightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

مثال:- د $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ تابع مشتق په لاس راوړئ!

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \Rightarrow y = x^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow y' = (x^{-\frac{1}{4}})' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^5}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{4 \cdot x \sqrt[4]{x}}$$

خلورمه قاعده:

د یوې تابع او د یوه ثابت عدد د ضرب د حاصل مشتق مساوي دی د تابع مشتق ضرب له هغه ثابت عدد

$$\begin{aligned} \text{سره هر کله چې } f \text{ یوه تابع او } k \text{ یو ثابت عدد وي مشتق: } [kf(x)] &= kf'(x) \\ [kf(x)] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k[f(x+h) - kf(x)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k[f(x+h) - f(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot f'(x) \end{aligned}$$

مثال:- د $f(x) = 8 \cdot x^{12}$ 3) $f(x) = 7 \cdot x^6$ 2) $f(x) = 12x^8$ توابعو مشتق په لاس راوړی.

$$a) f(x) = 8 \cdot x^8$$

$$f'(x) = 8 \cdot x^{12-1} = 96x^{11}$$

$$\Rightarrow f'(9x) = 96x^{11}$$

$$b) f(x) = 7x^6 \Rightarrow f'(x) = 7 \cdot (x^6)'$$

$$f'(x) = 7(6x^{6-1}) = 7(6x^5)' = 42x^5$$

$$c) f(x) = 12x^8$$

$$f'(x) = 12(x^8)' = 12(8x^7) = 96x^7$$

$$\Rightarrow f'(x) = 96x^7$$

پنځمه قاعده:

د توابعو مجموعي مشتق مساوي دی د توابعو د مشتقونو له مجموعې سره، هر کله چې د $u(x)$ او $v(x)$ توابع ولرو؛ نو $(u+v)' = u' + v'$ ثبوت لرو چې:

$$\begin{aligned} [u(v) + v(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h) + v(x+h)\} - \{u(x) + v(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x) \Rightarrow (u+v)' = u' + v' \end{aligned}$$

مثال د توابعو د مجموعې مشتق $u(x) = 4x^2 + 5x$ ، $v(x) = 10x + 89$ پیدا کړئ!

حل:

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$$

$$[u(x) + v(x)]' = (4x^2 + 5x)' + (10x + 89)' = 8x + 5 + 10 = 8x + 15$$

يادښت: هر کله چې $y = u + v + w$ تابع وي او هره يوه برخه د تابع د x تابع وي د دا رنگه توابعو مشتق عبارت دی له: $y' = u' + v' + w'$

مثال: هر کله چې $y = 15x^6 + 2x^5 + 4x^3 + 4$ تابع د نوموړو توابعو مشتق لاسته راوړئ!
حل:

$$y' = u' + v' + w'$$

$$y = 15x^6 + 2x^5 + 4x^3 + 4$$

$$y' = 90x^5 + 10x^4 + 12x^2$$

شپږمه قاعده:

د دوه توابعو د ضرب د حاصل مشتق مساوي دی د مضرب مشتق ضرب مضروب فيه جمع د جمعې مشتق د مضروب فيه د مضروب سره.

هر کله چې $u(x)$ او $v(x)$ توابع ولرو نو:

$$y' = u' + v' + w'$$

$$(u(x), v(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

ثبوت:

که چېرې $v(x+h)(u(x))$ هم جمع او هم تفريق کړو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)v(x)}{h} + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right]$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h) - v(x)}{h} y'(x) + u(x) \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right]$$

$$\Rightarrow u'(x)v(x) + u(x)y'(x)$$

مثال:- که زموږ تابع لاندې شکل ولري:

$$y = (8x^3 + 3x^2 + 5)(2x^2 + 4x)$$

$$y' = u' + v' + w'$$

$$u' = 24x^2 + 6x$$

$$v' = 4x + 4$$

$$f'(x) = (24x^2 + 6x)(2x^2 + 4x)(4x + 4)(8x^3 + 3x^2 + 5)$$

$$f'(x) = 48x^4 + 96x^3 + 12x^3 + 24x^2 + 32x^4 + 12x^3 + 20x + 12x^3 + 32x^3 + 12x^2 + 20$$

$$f'(x) = 80x^4 + 152x^3 + 36x^2 + 20x + 20$$

دویم مثال - هر کله چې د $y = (3x^2 + 2x)(7x^3 + 8)$ وي $y'(x)$ مشتق یې پیدا کړئ!

حل:

$$y' = (x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$u' = 6x + 2$$

$$v' = 21x^2$$

$$y'(x) = (6x + 2)(7x^3 + 8)(21x^2 + 2x)$$

$$y'(x) = 42x^4 + 48x + 14x^3 + 16 + 63x^4 + 42x^3$$

$$y'(x) = 105x^4 + 56x^3 + 48x + 16$$

اوومه قاعده:

د کسري تابع مشتق عبارت دی د صورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع

هر کله چې د $u(x)$ او $v(x)$ توابع ورکړل شوي وي؛ نو:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{v(x+h) - v(x)}}{h} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x+h)(v(x)) - u(x)(v(x+h))}{v(x+h)v(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h} =$$

پورته $u(x)$ او $v(x)$ هم جمع او هم منفي شوي، په رابطه کوم تغیر نه دی راغلی او همدارنګه صورت او مخرج په h تقسیموو لاندې شکل نیسي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x) - u(x) \frac{v(x) - v(x+h)}{h}}{\frac{v(x+h)v(x)h}{h}} =$$

او په نتیجه کې

$$\begin{aligned} &= \frac{v(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) - v(x+h)}{h}}{\lim v(x+h)v(x)} = \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \end{aligned}$$

هر کله چې $u(x)$ او $v(x)$ توابع ورکړل شوې وي نو:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

مثال:- هر کله چې $y = \frac{10x^4 + 5x^2}{2x^6 - 4x}$ تابع وي مشتق يې پيدا کړئ؟

حل: دا چې $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$ دی. $v(x) = 2x^6 + 4x$, $u(x) = 10x^4 + 5x^2$ هغه په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$f'(x) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(40x^3 + 10x)(2x^6 - 4x) - (10x^4 + 5x^2)(12x^5 - 4)}{(2x^6 - 4x)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{(80x^9 - 40x^7 - 20x^7 - 40x^2) - 120x^9 + 40x^4 - 40x^4 - 60x^7 + 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-40x^9 - 40x^7 - 120x^4 - 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2} \Rightarrow y' = \frac{-40x^9 - 40x^7 - 120x^4 - 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2}$$

دویم مثال- د $y = \frac{1}{x^4}$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل: که $u(x) = 1$ او $v(x) = x^4$ وضع شي نظر اوومې قاعدې ته لرو چې:

$$y' = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{(1)'}{(x^4)} = \frac{0x^2 - 4x^3 \cdot 1}{(x^4)^2} = \frac{-4x^3}{x^8} \Rightarrow y' = -\frac{4}{x^5}$$

اتمې قاعده

هر کله چې u, v او w توابع د مشتق نیونې وړ وي لرو چې:

$$(uvw)' [u(v \cdot w)]' = u'(v \cdot w) + u(vw)'$$

$$= u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\Rightarrow (uvw)' = u'v \cdot w + uv'w + uvw'$$

مثال:- د $y = (2x^2 + 2x)(x^2 - 4)(3x^2 + x)$ توابعو مشتق پيدا کړئ؟

حل: اتمې قاعدې ته په کتو لرو چې:

$$(uvw)' = u'v \cdot w + uv'w + uvw'$$

$$y' = (4x+2)(x^2-4)(3x^2+x) + (2x^2+2x)(2x)(3x^2+x) + (2x^2+2x)(x^2-4)(6x-1)$$

$$y' = (4x^3-8x+2x^2-8x)(3x^2+x) + (4x^3+4x^2)(3x^2+x) + (2x^4-8x^2+2x^3-8x)(6x-1)$$

$$y' = (12x^5+4x^3-24x^2-8x^2+4x^2+6x^4+2x^3-24x^2+2x^3-8x+12x^5+4x^4$$

$$+12x^4+4x^3+12x^5+2x^4-48x^3-8x^2+12x^4+2x^3-48x^2-8x$$

$$\Rightarrow y' = 36x^5 + 40x^4 - 64x^3 - 88x^2 - 16x$$

نهمه قاعده:

هر کله چې u تابع د مشتق نیونې وړ وي او c هم ثابت عدد (ثابته تابع) وي نو:

$$(cu)' = c'u + cu' = 0 \cdot u + cu' = cu' \Rightarrow (cu)' = cu'$$

لومړۍ مثال:- د $y = (24)(2x^3 + 5x)$ توابعو مشتق پیدا کړئ؟

حل: دا چې $u = 2x^3 + 5x$ او $c = 24$ دی او مشتق یې $u' = 6x^2 + 5$ او $c' = 0$ دی په معادله

کې وضع کوو.

$$y' = (cu)' = (c)'(u) + c(u)'$$

$$y' = (cu)' = y' = (24)'(2x^3 + 5x) + (24)(2x^3 + 5x)' = 0(2x^3 + 5x) + 24(6x^2 + 5)$$

$$y' = 0 + 144x^2 + 120 \Rightarrow y' = (cu)' = 144x^2 + 120$$

لسمه قاعده:

د مرکبو توابعو مشتق (تابع تابع) د مرکبې تابع مشتق مساوي دی عمومي مشتق ضرب

داخلي مشتق دی.

فرضا $(f \circ g)(x)$ یوه مرکبه تابع ده ثبوتوو چې:

ثبوت:

$$[f \circ g(x)]' = [f(g(x))]'$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$[f(g(x))]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+h) - f(g(x))}{h}$$

اوس $x+h$ په x' ښیو؛ نو $h = x' - x$ کېږي

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(g(x)+h)' - f(g(x))}{x' - x}$$

حل: صورت او مخرج په $g(x') - g(x)$ ضربوو لرو چې:

$$\begin{aligned}
\lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(g(x')) - f(g(x))}{x' - x} \cdot \frac{g(x') - g(x)}{g(x') - g(x)} &= \\
\lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(g(x')) - f(g(x))}{g(x') - g(x)} \cdot \frac{g(x') - g(x)}{x' - x} &= \\
\lim_{g(x') \rightarrow g(x)} \frac{f(g(x')) - f(g(x))}{g(x') - g(x)} \cdot \lim_{x' \rightarrow x} \frac{g(x') - g(x)}{x' - x} &= \\
\Rightarrow [f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x) &
\end{aligned}$$

مثال:- د $f(x) = (x^5 + 4)^8$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
f'(x) &= 8(x^5 + 4)^{8-1} (5x^{5-1}) \\
f'(x) &= 8(+4)^7 \cdot 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7 \cdot x^4
\end{aligned}$$

دویم مثال:- د $g(x) = \frac{1}{(x^3 - 4x^2 + 2)^4}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$\begin{aligned}
g(x) \frac{1}{(x^3 - 4x^2 + 2)^4} &= (x^3 - 4x^2 + 2)^{-4} \\
g'(x) &= -4(x^3 - 4x^2 + 2)^{-4-1} \cdot (3x^2 - 8x) \\
g'(x) &= -4(x^3 - 4x^2 + 2)^{-5} \cdot (3x^2 - 8x) \\
g'(x) &= \frac{-4(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2 + 2)^5} = \frac{-12x^2 + 32x}{(x^3 - 4x^2 + 2)^5} \\
\Rightarrow g'(x) &= \frac{-12x^2 + 32x}{(x^3 - 4x^2 + 2)^5}
\end{aligned}$$

درېم مثال:- د $f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^3 + 2} = (x^3 + 2)^{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow [f(g(x))] &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
f'(g) &= \frac{1}{2}(x^3 + 2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (3x^2) = \frac{1}{2}(x^3 + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2) \\
f'(g) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2}{(x^3 + 2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 2}} \\
\Rightarrow f'(g) &= \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 2}}
\end{aligned}$$

د مثلثاتی توابعو مشتق

د مثلثاتی توابعو مشتق عبارت دی له:

$$1) \frac{d}{dx}(\sin x) = (\sin x)' = \cos x$$

$$2) \frac{d}{dx}(\cos x) = (\cos x)' = -\sin x$$

$$3) \frac{d}{dx}(\tan x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$4) \frac{d}{dx}(\cot x) = (\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$5) \frac{d}{dx} \sec(x) = (\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$6) \frac{d}{dx}(\csc x) = (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

$$\begin{aligned} 1) \frac{d}{dx}(\sin x) &= (\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x+h}{2} \cos \frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \\ (\sin x)' &= 1 \cdot \cos x \Rightarrow (\sin x)' = \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = -1 \cdot \sin x = -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{d}{dx}(\tan x) &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{d}{dx}(\cot x) &= (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \Rightarrow (\cot x)' = -\csc^2 x \end{aligned}$$

$$5) \frac{d}{dx} \sec x = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = \frac{0 \cdot \cos x - 1(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x \Rightarrow (\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$6) \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cdot \cot x$$

$$(\csc x)' = \left[\frac{1}{\sin x} \right]' = \frac{0 \cdot \cos x - 1(\cos x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x \cdot \sin x} =$$

$$= -\csc x \cdot \cot x \Rightarrow (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

لومړی مثال:- د $y = \frac{x^2}{\cos x}$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

$$y' = \frac{(x^2)' \cos x - (\cos x') x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x \cos x - 1(\sin x) x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}$$

دویم مثال:- د $y = x^4 \sin x$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$y = (x^4)' \sin x + (x^4)(\sin x)' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x$$

$$\Rightarrow y' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x$$

درېیم مثال:- د $y = \sin \frac{\pi x}{180}$ مشتق پې محاسبه کړئ؟

حل: هر کله چې $f(x) \sin x$ او $g(x) = \sin \frac{\pi x}{180}$ وضع کړو او y لاندې قیمت اختیاروي.

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$y' = (\sin x)'(g(x)) \cdot \left(\frac{\pi}{180} x \right)' = \cos \frac{\pi}{180} x \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{180}$$

څلورم مثال:- د $y = \cos \frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

حل: که $f(x) \cos$ او $g(x) = \cos \frac{\pi x}{180}$ وضع کړو.

$$y = f(g(x)) \Leftrightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$y' = (\cos)' \left(\frac{\pi}{180} x \right) \cdot \left(\frac{\pi}{180} x \right)' = -\sin \left(\frac{\pi}{180} x \right) \frac{\pi}{180}$$

$$y' = -\frac{\pi}{180} \sin \frac{\pi x}{180}$$

پنجم مثال:- د $y = \cos^2 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ!

حل: لسمې قاعدې ته په کتو لرو چې:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\cos^2 2x)' = 2 \cos(2x) \cdot \cos(2x)' = 2 \cos(2x) \cdot (-2 \sin(2x))$$

$$(\cos^2 2x)' \Rightarrow -4 \cos 2x \cdot \sin 2x$$

شپږم مثال:- د $y = \cos(6x-4)$ تابع مشتق پیدا کړئ!

$$y'(\cos(6x-4))' = -\sin(6x-4) \cdot (6x-4)'$$

$$= -\sin(6x-4) \cdot 6$$

$$\Rightarrow y' = -6 \sin(6x-4)$$

اووم مثال:- د $y = \sin(4x-1)$ تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل:

$$(\sin(4x-1))' = \cos(4x-1) \cdot (4x-1)' = \cos(4x-1) \cdot 4 = 4 \cos(4x-1)$$

$$\Rightarrow (\sin(4x-1))' = 4 \cos(4x-1)$$

اتم مثال:- د $y = \sec x \cdot \cot x$ تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل:

$$y' = (\sec x \cdot \cot x)' = (\sec x)' \cot x + (\cot x)' \sec x$$

$$= (\sec x \cdot \tan x)' \cot x + (-\cos^2 x)' \sec x$$

$$= \sec x - \cos^2 x \cdot \sec x$$

$$= \sec x (1 - \cos^2 x)$$

د لوگاريتمي توابعو مشتق

د لوگاريتمي تابع مشتق $y = \log_a^x$ عبارت دی له $y' = \frac{1}{x} \log_a^e$ دا چې په پورته فورمول کې a

کولای شي هر قیمت غوره کړي او e عبارت ده له $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ او یا $\lim_{x \rightarrow 0} (1+a)^{\frac{1}{x}} = e$ او

يو غیر ناطق ثابت عدد دی او قیمت يې عبارت دی له

$$e = 2,7182818284599045 \dots$$

او اوس د $y = \log_a^x$ تابع مشتق پیدا کوو چې $y' = \frac{1}{x} \log_a^e (\log_a^x)'$

ثبوت:

$$\begin{aligned}
 (\text{Log}_a^x)' &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(x+h) - \text{Log}_a^x}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \text{Log}_a \frac{x+h}{x} \right] \\
 &= \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{h} \text{Log}_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \right] = \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \text{Log}_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \\
 &= \frac{1}{x} \lim_{a \rightarrow 0} \log_a (1+a)^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{x} \text{Log}_a^e \\
 \Rightarrow (\text{Log}_a^x)' &= \frac{1}{x} \text{Log}_a^e
 \end{aligned}$$

دا چې $\frac{h}{x} = a$ فرض کوو.

یا په بل عبارت زنځیري قاعدې ته په کتو $f'(x) = f'(u)u'(x)$ که چېرې $f(x) = \text{Log}_a^{u(x)}$ غواړو لرو $f'(x) = \frac{1}{u(x)} \log_a^e u'(x)$ دی که چېرې $u = x$ وي $f(x) \text{Log}_e^x$ مساوي په $f'(x) = \frac{1}{x}$ سره دی.

نتیجه: د پورته فرمول ثبوت دارنگه تشریح کوو چې:

۱- هر کله چې $a=e$ وي که چېرې $\log_a^e = \log_e^e = 1$ دی یعنې:

$$(\text{Lnx})' = (\text{Log}_a^e)' = \frac{1}{x} \text{Log}_a^e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow (\text{Lnx})' = \frac{1}{x}$$

۲- هر کله چې $a=10$ وي که چېرې $\text{Log}_a^x = \text{Log}_{10}^x$ لیکلای شو او د هغې مشتق اخیستلای شو داسې چې:

$$\begin{aligned}
 \text{Log}_a^x' &= (\text{Log}_{10}^x)' = \frac{1}{x} \text{Log}_{10}^e = \frac{1}{x} \cdot \text{Log}_e \\
 \Rightarrow (\text{Log}_x)' &= \frac{1}{x} \text{Log}_e
 \end{aligned}$$

لومړی مثال:- د $f(x) = \text{Log}(4x+2)$ تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل: په دې ځای کې $u(x) = 4x+2$ او $u'(x) = 4$ نو

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{Log}_e \frac{4}{4x+2} \Rightarrow \frac{4}{4x+2} \text{Log}_e = f'(x)$$

د توان لرونکو توابعو مشتق:

د $y = a^x$ توابعو مشتق دارنگه محاسبه کوو:

$y = a^x$ دواړو خواوو ته مشتق نیسو $Lny = xLna$

دواړو خواوو ته مشتق نیسو $\frac{y'}{y} = Lna$

$$\Rightarrow y' = y.Lna = a^x.Lna \Rightarrow y' = a^x.Lna$$

دویم مثال- لاندې مشتقات محاسبه کړئ!

$$a) f(x) = \text{Log} 5x$$

$$b) g(x) = \text{Ln}(x^2 + 1)$$

$$c) f(x) = \text{Ln}(x^3 + x^2)$$

$$d) f(x) = \text{Ln}(\cos 3x)$$

$$a) f(x) = \text{Log} 5x$$

حل:

په دې ځای کې $u(x) = 5x$ او $u'(x)$ نظر فورمول ته لرو چې:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot \text{Loge} = \frac{5}{5x} \text{Loge} = \frac{\text{Loge}}{x}$$

$$b) g(x) = \text{Ln}(x^2 + 1)$$

$$c) f(x) = \text{Ln}(x^3 + x^2)$$

حل: $u(x) = x^2 + 1$ او $u'(x) = 2x$ فورمول ته په کتو لرو چې:

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot \text{Lne} = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{Lne} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دا چې $\text{Lne} = 1$ دی.

حل:

دا چې:

$$u'(x) 3x^2 + 2x, u(x) = x^3 + x^2$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot \text{Lne} = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2} \text{Lne} = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{x(x^2+2x)} = \frac{x+2}{x^2+x}$$

حل:

$$d)f(x) = \ln(\cos 3x)$$

$$u'(x) = -3 \sin 3x, u(x) = \cos 3x$$

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x} = -3 \tan 3x$$

که $y = \text{Lpg}_e^{u^x}$ تابع موجوده وي که چېرې $u=f(x)$ وي مشتق يې عبارت دی له:

$$y = \text{Log}_e^{u^n} = (\text{Log}_e^{u^n})' = \frac{n u^{n-1} u'}{v^n} = \frac{n u'}{u}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{n u'}{u}$$

مثال: د لاندې معادلې مشتق پیدا کړئ:

$$y = \text{Log}(10x^3 \cdot 5x^2 + 6x)^2$$

$$u = 10x^3 \cdot 5x^2 + 6x$$

$$u'(x) = 30x^2 + 10x + 6$$

$$y'(x) = \frac{n u' u^{n-1}}{v^n} = \frac{n u'}{u} =$$

$$y'(x) = \frac{2(30x^2 + 10x + 6)(10x^3 \cdot 5x^2 + 6x)}{(10x^3 \cdot 5x^2 + 6x)^2} = \frac{60x^2 + 20x + 12}{(10x^3 \cdot 5x^2 + 6x)^2}$$

$$y'(x) = \frac{2(30x^2 + 10x + 6)}{2(5x^3 + 2.5x^2 + 3x)^2} = \frac{30x^2 + 10x + 6}{5x^3 + 2.5x^2 + 3x}$$

د ضمني توابعو مشتق

هر کله چې د x او y متحولین د $y=f(x)$ را بطې پواسطه له یو بل سره رابطه ولري، په دې صورت کې y صریح تابع د x متحول ده، ولې ممکنه ده چې د x ، y تر منځ ارتباط د $f(x,y)=0$ رابطې پواسطه معین یا ټاکلی وي، په دې حالت کې ویل کېږي، چې y ضمني تابع د x وي لکه $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ معادله چې دوه صریح تابع $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ او $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ افاده کوي او پورته معادله د ذکر شویو توابعو ضمني حالت دی. د ضمني توابعو د مشتق پیدا کولو په خاطر y نظر x متحول ته د ټاکلې معادلې دواړو خواو ته نظر x ته مشتق نیسو، داسې چې y متحول د x تړلې تابع فرض کېږي او په نهایت کې د y تابع مشتق نظر x متحول ته عبارت دی له:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f'(y)}$$

که y ثابت فرض شي $f'(x)$ د f مشتق نظر x متحول ته دی، که x ثابت فرض شي $f'(y)$ د f مشتق نظر y متحول دی.

مثال: د y مشتق نظر x ته له $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ ضمني تابع په لاس راوړئ!

حل:

$$(x^2 + y^2 - r^2)' = 2x + 2yy' = 0$$

$$\Rightarrow 2yy' = -2x \Rightarrow y' = -\frac{2x}{2y} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

دویم مثال-

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$(y^6 - y - x^2)' = 6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$\Rightarrow 6y^5 y' - y' = 2x \Rightarrow y'(6y^5 - 1) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

درېم مثال- د $y^4 - y - x^2 = 0$ تابع مشتق پیدا کړئ!

$$y^4 - y - x^2 = 0 \Rightarrow (y^4 - y - x^2)' = 0 \Rightarrow 4y^3 y' - y' - 2x = 0$$

$$\Rightarrow 4y^3 y' - y' = 2x \Rightarrow y'(-1) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{4y^3 - 1}$$

$$\Rightarrow (y^4 - y - x^2)' = \frac{2x}{4y^3 - 1}$$

باید یادونه وشي، چې موږ کولای شو د لوگارتیم په وسیله مشتق کړي وکړو، ځکه په ډېرو مواردو کې د توابعو مشتق له لوگارتیم نه په ګټه اخیستو محاسبه کېږي، داسې چې په پیل کې د $y=f(x)$ رابطې دواړو خواوو ته طبیعي لوگارتیم نیسو

$$\text{Lny} = \text{Lnf}(x) \text{ لرو چې}$$

د پورته ذکر شوې رابطې دواړو خواوو ته د ضمني تابع په حیث کولای شو مشتق ونیسو، داسې چې

$$(Lny)' = \frac{1}{y} y' \Rightarrow \frac{y'}{y} = (Lny)' \Rightarrow y' = y (Lny)'$$

$$\Rightarrow y' = f(x) \cdot (Lny)'$$

دا چې $y = f(x)$ دی

دویمه طریقه:

$$(Lnf(x))' \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (Lnf(x))'$$

لومړۍ مثال: د $y = x^{2x}$ مشتق د لوگارتیم په مرسته محاسبه کړئ!

حل:

$$y = x^{2x}$$

$$Lny = Lnx^{2x} \Rightarrow Lny = 2x \cdot Lnx$$

$$(Lny)' = (2Lnx)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2Lnx + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y(2Lnx + 2) \Rightarrow y' = 2(Lnx + 1)y$$

$$y' = 2(Lnx + 1)x^{2x}$$

داچې $y = x^{2x}$ په پورته معادله کې وضع کوو.

دویم مثال- د $y = v''$ تابع مشتق لاسته راوړئ.

حل:

$$y = v'' \Rightarrow Lny = Lnv'' \Rightarrow (Lny)' = (uLnv)'' \Rightarrow \frac{y'}{y} = u'Lnv + u(Lnv)'$$

$$\Rightarrow (u'Lnv + u \frac{v'}{v})y$$

$$y' = (u'Lnv + u \frac{v'}{v})v''$$

د نسبتي توابعو مشتق د مشتق متحول

کله چې زموږ تابع یوه نسبتي تابع ورکړل شوې وي او د هغې مشتق پیدا کوو، د مشتق د پیدا کولو لپاره له لاندې قاعدې څخه گټه اخلو.

۱- که $y = \frac{1}{x}$ تابع ورکړل شوې وي، مشتق یې عبارت دی له:

ثبوت:

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1}$$

$$y'(x) = -1 \cdot x^{-1-1}$$

$$y'(x) = -x^{-2} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

۲- که تابع $y = \frac{1}{x^n}$ شکل ولري، مشتق يې عبارت دی له:

$$y = \frac{1}{x^n}$$

$$y' = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

لومړی مثال: د $y = \frac{1}{x^{10}}$ تابع مشتق پیدا کړئ!

$$y = \frac{1}{x^{10}} = x^{-10} \quad y'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$y'(x) = -10x^{-10-1} \Rightarrow y'(x) = -10x^{-11}$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-10}{x^{11}}$$

۳- که تابع $y = \frac{1}{(x^3 + 2x^2 + 6)}$ وي د دارنگه توابعو مشتق عبارت دی له:

حل:

$$y = \frac{1}{u} \Rightarrow y' = \frac{-u}{x^{n+1}}$$

$$y = \frac{1}{(x^3 + 2x^3 + 6)} \Rightarrow y' = \frac{-(3x^2 + 4x)}{(x^3 + 2x^3 + 6)^2}$$

۴- هر کله چې $y = \frac{1}{x^n}$ تابع وي، د هغو توابعو مشتق عبارت دی له:

$$y'(x) = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$$

مثال: د $y = \frac{1}{(x^3 + 2x^2 + 6)}$ تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل:

$$y = \frac{1}{(4x^5 + 6x^2 + 12)^{12}}$$

$$u = (4x^5 + 6x^2 + 12)$$

$$u'(x) = 20x^4 + 12x$$

$$y'(x) = \frac{-nu}{u^{n+1}}$$

$$y'(x) = \frac{-12(20x^4 + 12x)}{(4x^5 + 6x^2 + 12)^{13}}$$

دویم مشتقات او له هغې پورته

په پورته مثالونو کې موږ یواځې د ورکړل شوو توابعو اول مشتق د مشتق نیونې له روشونو نه په ګټه اخیستو او د هغو د قاعدو په کارونې خپل سوالونه حل کړي او اوس د دویم مشتق د پیدا کولو لپاره او له هغې پورته هم له قاعدو څخه چې په پورته ذکر شوو توابعو کې د مشتق نیونې په خاطر ترې ګټه اخیستل شوې وه هم ګټې اخیستو وړ ګرځي، داسې چې مخکې ذکر شوي د تابع اول مشتق ورکړل شوی وي، د مربوطه منحنی په میلان کې له تغیر نه ګټه اخیستل شوې او د دویم مشتق څخه د مربوطه منحنی په میلان کې ګټه اخلو او په ورکړل شوې تابع کې دویم مشتق د تغیر درجه ښيي. **د مثال په توګه:** که یوه تولیدي تابع ورکړل شوې وي د دې تابع لومړی مشتق په مجموعي تولید کې نسبي تغیر ښيي، چې د نهایي تولید یا مؤلديت په نوم یادېږي او د ذکر شوې تابع دویم مشتق په مؤلديت کې زیاتوالی ښيي.

$$y = 4x^2 + 12x$$

$$y' = 8x + 12$$

$$y' = 8$$

د $y = 4x^2 + 12x$ تابع د مشتق غونډې یې محاسبه کړئ!

او همدارنګه باید وویل شي چې د یوې تابع مشتق د یوې نوې تابع په حیث کېدای شي د مشتق نیونې وړ وي، د تابع د مشتق دویمه مرتبه مشتق نومېږي او په همدې ډول تابع کېدای شي څو ځلې او حتی لایتناهي ځلې د مشتق نیونې وړ وي او دارنګه مشتقات په لاندې ډول ښودل کېږي.

$$y = f(x) \quad \text{تابع}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{لومړی مشتق}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \quad \text{دویم مشتق}$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) \quad \text{درېیم مشتق}$$

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) \quad \text{n ام مشتق}$$

مثال: د لاندې توابعو اول، دویم، درېیم او څلورم مشتق لاسته راوړئ!

$$a) \quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

$$y''' = 6a$$

$$y^{(4)} = 0$$

$$b) \quad y = 2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 12$$

$$y' = 8x^3 + 15x^2 + 12 + 2$$

$$y'' = 24x^2 + 30x + 12$$

$$y''' = 8x + 30$$

$$y^{(4)} = 48$$

$$y^{(5)} = 0$$

$$c) \quad \begin{cases} y = \sin x, y' = \cos x \\ y'' = -\sin x, y''' = -\cos x \\ y^{(4)} = \sin, \dots \end{cases}$$

$$c) \quad y = 6x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 10x + 6$$

$$y' = 30x^4 + 12x^2 + 10x + 10$$

$$y = 120x^3 + 12x^2 + 10$$

$$y'' = 360x^2 + 24x$$

$$y^{(4)} = 36x^2 + 24$$

$$y^{(5)} = 720x$$

$$y^{(6)} = 0$$

د دویمو او له هغې نه د پورته مشتق قواعد هر کله چې د u او v توابع د n ام ځلې مشتقاتو لرونکې وي نو:

$$1) (\lambda u(x))^{(n)} = \lambda u^{(n)}(x)$$

$$2) (u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$$

$$3) (u.v)' = uv' + v'u$$

$$4) (u.v)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$5) (u.v)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

$$6) (u.v)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$

$$(u.v)^{(n)} = u^{(n)}v + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} u^{(n-1)}v' + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} u^{(n-2)}v'' + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} u^{(n-3)}v''' + \dots + uv^{(n)}$$

مثال: دویم مشتق له $y = e^{ax} \cdot x^2$ تابع څخه په لاس راوړئ!

$$y = e^{ax} \cdot x^2$$

$$y' = (e^{ax})' \cdot x^2 + e^{ax} (x^2)' = ae^{ax} \cdot x^2 + 2e^{ax} \cdot x$$

$$y'' = (e^{ax})'' \cdot x^2 + 2(e^{ax})' \cdot (x^2)' + e^{ax} (x^2)''$$

$$y'' = a^2 e^{ax} \cdot x^2 + 4ae^{ax} \cdot x + 2e^{ax}$$

$$\Rightarrow y = e^{ax} \cdot x^2 \Rightarrow y'' = a^2 e^{ax} \cdot x^2 + 4ae^{ax} \cdot x + 2e^{ax}$$

د دویم څپرکي پوښتنې

له قاعدو نه په ګټه اخیستو سره د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ!

$$1) f(x) = x^4$$

$$4) y = \sqrt{x}$$

$$2) f(x) = 3x + 4$$

$$5) f(x) = \frac{1}{8}x^8 + 3x^4 - 8$$

$$3) y = \frac{1}{x^{10}}$$

$$6) f(x) = 2x^5 - 8x^3$$

له تعریف نه په ګټه اخیستو د لاندې توابعو مشتق لاسته راوړئ!

$$7) y = 2x^3 + 4$$

$$11) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$8) f(x) = x^3 - 9$$

$$12) f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$9) h(x) = x^4$$

$$h'(x) = ?$$

$$13) f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$10) f(x) = 4x^2 - 6$$

د لاندې الجبري توابعو مشتق په لاس راوړئ!

$$14) y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

$$18) y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$15) y = x^4 + 3x^2$$

$$19) y = \sqrt{6x+8}$$

$$16) f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$17) y = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$$

د مثلثاتي توابعو مشتقات لاسته راوړئ!

$$20) y = 2\sin x - 3\cos x$$

$$26) y = \log x$$

$$21) y = 4\cos^2 x$$

$$27) y = \log(3x+1)$$

$$22) y = 2\sin^3 x$$

$$28) y = \ln(x^3 + x^2)$$

$$23) y = \tan x + \cot x$$

$$24) y = 2x \tan x$$

$$25) y = 2x \cot x$$

د لاندې توابعو مشتق د لوګارتم په مرسته پیدا کړئ!

$$29) y = x^{x^3}$$

$$34) y = \ln(x^2 + 2)$$

$$30) y = x^{\sin x}$$

$$35) 4x^3 + 4x^2$$

$$31) y = (1+x)^3(2x+1)^2(9x-9)$$

$$36) y = 5x^2 + 6x$$

$$32) y = \log(\sin 3x)$$

$$37) y = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x$$

$$33) y = \log 4x$$

قسمي، ترکیبي او کلي مشتق نیونه

ټولیزه موخه

لوستونکي به په سمه توګه قسمي، ترکیبي او کلي مشتق نیونه درک کړي او له اصولو او قواعدو به سمه ګټه واخلي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به لوستونکي:

- ۱- مشتق تعریف او اړونده سوالونه حل کړای شي.
- ۲- قسمي مشتقات تعریف او قواعد یې درک کړي.
- ۳- دویم قسمي مشتقات تعریف او قواعد یې درک کړي.
- ۴- کلي مشتقات تعریف او د هغې مربوطه سوالونه حل کړي.
- ۵- له قسمي، دویم قسمي مشتقاتو نه ګټه اخیستل او د مشتقاتو حل به لوستونکي درک کړي او د هغې په کارونه به پوه شي.

قسمي مشتقات

څو متحوله تابع او قسمي مشتقات د اقتصادي ریاضي له مهمو او اساسي مسایلو څخه دي، تر اوسه مو د توابعو مفاهیم، لمټ او مشتق مطالعه کړل، چې یواځې د یو مستقل متحول لرونکي وو، یعنې توابعو په عمومي توګه $y=f(x)$ شکل درلود.

د دارنګه توابعو د مشتق له قیمت نه په ګټه اخیستو یا یو د مشتق له قواعدو څخه ګټه اخلو مشتق یې پیداوو او اوس هغه توابع تر مطالعې لاندې نیسو، چې امکان لري په ځینو حالاتو کې یو تابع د یوه تړلي متحول د دوه او یا څو مستقلو متحولونو په عوض وي، یعنې $u=f(x,y)$ او $u=f(x,y,z)$ او نور چې دارنګه تابع دوه متحوله، درې متحوله او نور نومېږي.

مثلاً:

$$1) z = 4x + 6y - 10$$

$$2) z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$3) u = 2x^2 - y^2 + xyz + 3z^2$$

$$4) z = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$$

د (۱) او (۲) سوالونو په اړه د z تابع دوه متحوله او ۳ د u تابع درې متحوله او ۴ مثال باید وویل شي، چې په دې ځای کې د z تابع متحول ($x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$) مستقل متحولین وي او د څو متحوله تابع مشتق له متحولینو څخه یوه ته په کتو په داسې حال کې ډېر له هغې څخه ثابت عددونه فرض شي نظر هماغه متحول ته په کتو د تابع د قسمي مشتق په نوم یادېږي او څو متحوله توابع کېدای شي د بیلابېلو مرتبو د قسمي مشتقات لرونکې نظر هر مربوط متحول ته وي، داچې د دوه متحوله تابع قسمي مشتقات $z=f(x,y)$ په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dz}{dx} = f'_x(x, y)$$

$$\frac{dz}{dy} = f'_y(x, y)$$

همدارنگه د z قسمي مشتقات نظر x_1 ته نیسو، نظر x_2 او اخر x_3 پیدا کوو، لرو چې:

$$\frac{dz}{dx_1 f(x_1)} = zx_1 \Rightarrow f(x_1)$$

$$\frac{dz}{dx_2 f(x_2)} = zx_2 \frac{dz}{dx_3 f(x_3)} = zx_3$$

لومړی مثال- قسمي مشتقات یې پیدا کړئ!

$$z = 6x^2 + 8xy + 6y^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 12x + 8y$$

$$\frac{dz}{dy} = 8x + 12y$$

دویم مثال: قسمي مشتق یې پیدا کړئ!

$$z = 6x^{12}y^8 + 4x^2y + 24xy^2$$

$$\frac{dz}{d(x)} = zx = 72x^{11}y^8 + 4xy + 24y^2$$

$$\frac{dz}{d(y)} = zy = 48x^{12}y^7 + 4x^2 + 48xy$$

درېم مثال: قسمي مشتقات یې پیدا کړئ چې:

$$z = \frac{4x^2}{3y^2}$$

$$zx = \frac{8x(3y^2) - 0(4x^2)}{(4y^2)^2} = \frac{24xy^2}{16y^4}$$

خلورم مثال:

$$z = 4x^3y^3 + 12x^2y^2 + 4y^4$$

$$\frac{dz}{dx} = zx = 12x^2y^3 + 24xy^4$$

$$\frac{dz}{dy} = zy = 12x^3y^2 + 24x^2y + 16y^3$$

پنځم مثال- د درې متحوله تابع قسمي مشتقات په لاندې ډول دي:

$$u = x^2y^2z + 4x - 2y + z + 6$$

$$\frac{du}{dx} = 2xy^2z + 4$$

$$\frac{du}{dy} = 2x^2yz - 2$$

$$\frac{du}{dz} = x^2y^2 + 1$$

شپږم مثال- د $f(x,y) = x^2y - 5xy^2 + 4xy$ تابع قسمي مشتق په لاندې ډول دي:

$$f(x) = \frac{du}{dx} = 2xy - 5y^2 + 4y$$

$$\frac{df}{dy} = f(y) = x^2 - 10xy + 4x$$

دویم قسمي مشتقات او ترکیبي مشتقات

۱- دویم قسمي مشتقات: کله چې وغواړو اول قسمي مشتقونه د دویم ځل لپاره نظر هماغه متحول ته مشتق ونیسو د ذکر شوې تابع قسمي دویم مشتقونه نظر هماغه متحول ته په لاس راځي، دویم قسمي مشتقات په تابع کې له تغیر څخه عبارت دي نظر په وارد شوي تغیر په مستقل متحول کې یې تر بحث لاندې نیسو.

۲- ترکیبی مشتقات: که موږ قسمي مشتقات نظر x متحول ته یو ځل بیا نظر y متحول مشتق و نیسو، ویلای شو چې د تابع ترکیبی مشتق په لاس راغلی.

او هر کله چې د $f(x,y)$ تابع په (x,y) نقطه کې له تعریف ناحیې څخه د قسمي مشتقاتو لرونکې وي د $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ مشتقات هم توابع د x او y دي او کېدای شي د لاندې قسمي مشتقاتو لرونکې وي.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

که f_{xy} , f_{yx} توابع متمادي وي په هغه صورت کې $f_{xy} = f_{yx}$ دی.

لومړی مثال: د لاندې تابع اول قسمي مشتقات، دویم او ترکیبی مشتق پیدا کړئ!

$$z = 6x^2 + 8xy - 8y^2$$

$$z_x = 12x + 8y$$

$$z_{xx} = 12x$$

$$z_y = 8x - 16y$$

$$z_{yy} = -16$$

$$z_{xy} = 8$$

$$z_{yx} = 8$$

ترکیبی مشتق

دویم مثال- دوه متحوله تابع $z = x^4 y^3 + 3x^2 y^2 - 2xy + 2$ محاسبه کړئ!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 y^3 + 3xy^2 - 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 y^3 + 6y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12x^3 y^2 + 12xy - 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^4 y^2 + 6xy - 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2 y + 6x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 12x^3 y^2 + 12xy - 2$$

په پورته مثال کې لیدل کېږي چې $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ دی

دربیم مثال- د $z = x^2 y + y^3$ تابع اول او دویم ځلي مشتقات دا رنگه پیدا کوو.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

څلورم مثال- فرض کړئ چې د یوې تصدۍ د تولید تابع د لاندې شکل لرونکې وي.

$$Q = Ak^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$$

په پورته تابع کې Q د تولید مجموعي مقدار دی.

وسطی تولید dk په ارتباط

$$\Rightarrow Q = A \left(\frac{L}{K} \right)^{\frac{3}{4}}$$

$$Q = \frac{Q}{L} Ak^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}} \bigg/ L =$$

$$= Ak^{\frac{1}{4}} L^{-1} L^{\frac{3}{4}} = Ak^{\frac{1}{4}} L^{-\frac{1}{4}} = A \left(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{1}{4}}} \right)$$

$$= A \cdot \frac{k^{\frac{1}{4}}}{L^{\frac{1}{4}}} = A \left(\frac{K}{L} \right)^{\frac{1}{4}}$$

A د تکنالوجۍ ضریب k د تولید عامل لکه د تولید د وسایلو پانګه د تولید بل عامل،

لکه کار او طاقت k او L نه یواځې د تولید د عواملو نمایندګي کوي، بلکې د عاید په

توزیع کې هم ترې ګټه اخیستل کېږي، لاندې مطالب هدف دی.

۱- تولید یا د تولید د عواملو وسطي مؤلديت.

۲- نهايي تولید یا د تولید د عواملو نهايي تولید.

۳- په تولید کې د تغیر درجه یا د عواملو مؤلديت.

۴- په نهايي مؤلديت کې د تغیر درجه یو له عواملو ده، که چېرې په یوه وخت تغیر وکړي.

نوټ:

$$Q = A k^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$$

L= کارگر

K= ماشین

Q= تولید

د لومړي جز ځواب:

$$Q = \frac{Q}{K} = A k^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}} / K =$$

$$= A k^{\frac{1}{4}} K^{-1} L^{\frac{3}{4}} = A k^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{3}{4}} = A \left(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}} \right)$$

د هغې حل په صفحه مخامخ لیکل شوی.

د L په ارتباط وسطي تولید

۲- نهايي تولید: مخکې له دې چې دویم جز حل کړو، نهايي تولید دا رنگه تعریفوو:

نهايي تولید د مجموعي تولید په مقدار کې له هغه تغیر څخه عبارت دی، چې د یو وا حد تغیر په اثر په مربوطه عامل کې منځ ته راځي، خو که چېرې زیات عوامل ثابت پاتې وي.

د ریاضي له مخې د تولید د تابع له قسمي مشتق څخه عبارت نظر د K په څېر عامل ته که چېرې بل عامل په تابع کې پاتې شوی وي.

یعنې:

د درېیم جز ځواب.

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{dQ} &= Q_k = \frac{1}{4} AK^{\frac{1}{4}-1} L^{\frac{3}{4}} \\
 &= \frac{1}{4} AK \cdot \frac{-\frac{3}{4}}{K^{\frac{3}{4}}} L^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} A \left(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}} \right) = \frac{A}{4} \left(\frac{L}{K} \right)^{\frac{3}{4}} \\
 \frac{dQ}{dL} &= Q_L = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} L^{-\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{3}{4} A \cdot \frac{K^{\frac{1}{4}}}{L^{\frac{1}{4}-1}} = \frac{3}{4} A \left(\frac{K}{L} \right)^{\frac{1}{4}} \\
 Q_K &= \frac{1}{4} AK^{-\frac{3}{4}} L^{\frac{3}{4}} \\
 Q_{KK} &= -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right) AK^{-\frac{3}{4}-1} L^{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right) AK^{-\frac{7}{4}} L^{\frac{3}{4}} \\
 &= -\frac{3}{16} AK^{-\frac{7}{4}} L^{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{16} A (K^{-\frac{7}{4}} L^{\frac{3}{4}}) = -3AL^{\frac{3}{4}} / 16K^{\frac{7}{4}} \\
 \Rightarrow Q_{KK} &= -\frac{3A}{16} \left(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{7}{4}}} \right) \\
 Q_L &= \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} L^{-\frac{1}{4}} \\
 Q_{LL} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right) AK^{\frac{1}{4}} L^{-\frac{1}{4}-1} = -\frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right) AK^{\frac{1}{4}} L^{-\frac{5}{4}} \\
 &= -\frac{3}{16} AK^{\frac{1}{4}} / L^{\frac{5}{4}}
 \end{aligned}$$

د څلورم جز ځواب

د تابع ترکیبي مشتق دا رنګه پیدا کوو، دا چې ترکیبي مشتق مثبت وي په دې دلالت کوي، چې په نهایي مؤلديت کې تغیر او ټول عوامل د متحول مربوط وي، مثبت دي فلهاذا مخ په زیاتېدو دي.

$$Q_K = \frac{1}{4} AK^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{3}{4}}$$

$$Q_L = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} L^{\frac{-1}{4}}$$

$$Q_{KL} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) AK^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{16} AK^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{-1}{4}}$$

$$= \frac{3A}{16} AK^{\frac{3}{4}} L^{\frac{1}{4}}$$

$$Q_{KL} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right) K^{\frac{1}{4}-1} L^{\frac{-1}{4}} = \frac{3}{16} AK^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{-1}{4}}$$

$$\Rightarrow = \frac{3A}{16K^{\frac{3}{4}} L^{\frac{1}{4}}}$$

پنجم مثال- هر کله چې د $Q = 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}$ تصدی د تولید تابع وي.

۱- د K او L عامل وسطي تولید محاسبه کړئ!

۲- نهايي تولید يې محاسبه کړئ!

۳- په تولید کې د تغیر درجه محاسبه کړئ!

۴- په نهايي مؤلديت کې د تغیر درجه محاسبه کړئ!

وسطي تولید عامل L $\frac{Q}{K} = 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}} / K$ د k عامل وسطي تولید

$$= 4K^{\frac{1}{3}} K^{-1} L^{\frac{2}{3}} = 4K^{\frac{-2}{3}} L^{\frac{2}{3}} = 4L^{\frac{2}{3}} / K^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow = 4\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= Q/L = 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}} / L = 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{-1}{3}}$$

$$= 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{-1}{3}} = 4K^{\frac{1}{3}} / L^{\frac{1}{3}} \Rightarrow QL = 4\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

د دویم جز خواب تر کیبی مشتق

$$Q = 4K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$dQ/dK = 4\left(\frac{1}{3}\right)K^{\frac{1}{3}-1}L^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QK = \frac{4}{3}L^{\frac{2}{3}} / \frac{K^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{3}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$QK = \frac{4}{3}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$Q = 4K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$dQ/dL = \frac{2}{3}(4)K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}\left(K^{\frac{1}{3}} / L^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow QL = \frac{8}{3}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

د درېیم جز خواب

$$QK = \frac{4}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QL = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}}$$

$$QKK = \frac{4}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)K^{-\frac{2}{3}-1}L^{\frac{2}{3}} = -\frac{8}{9}K^{-\frac{5}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QKK = -8L^{\frac{2}{3}} / 9K^{\frac{5}{3}}$$

$$QLL = \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{4}{3}} = -8K^{\frac{1}{3}} / 9L^{\frac{4}{3}} = QLL = \frac{-8K^{\frac{1}{3}}}{9L^{\frac{4}{3}}}$$

$$QK = \frac{4}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QKL = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{9}K^{-\frac{2}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

$$QL = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

$$QLK = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\right)K^{\frac{1}{3}-1}L^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

باید وویل شي چې د ترکیبي مشتقونو ضریبونه مثبت دي، فلهاذا تابع مخ په زیاتېدو ده.

کلي مشتقات

په قسمي مشتق نیونه کې مو د تابع مشتق، نظر یوه متحول ته نیوه او نور متحولونه مو ثابت فرض کړل.

ولې په کلي مشتق نیونه کې ټول متحولونه په یو وخت تغیر کوي، د مشتق نیونې په مبحث کې مو ولیدل چې که $y=f(x)$ تابع وي.

او د هغې تابع مشتق $\frac{dy}{dx}=f(x)$ شکل لري او که د معادلې دواړه خواوې په dx ضرب کړو معادله لاندې شکل غوره کوي $dy=f(x)dx$ چې دا افاده د کلي مشتق مفهوم لري ، کلي مشتق نیونه هغه وخت د بحث وړ کېږي، چې تابع د څو مستقلو متحولینو لرونکې وي او موږ په خپل ځای کې توابع تر مطالعې لاندې نیسو.

چې د دوه ډوله مستقلو متحولینو لرونکې وي او د دې توابعو کلي مشتق عبارت دی د تابع له قسمي مشتقاتو د ضرب د حاصل له مجموعې سره او د هغې په مربوطه متحول کې د وارد شوي تغیر سره.

فرضاً که تابع لاندې شکل ولري $y = f(u, v, w)$ چې په هغې کې u, v, w د بل متغیر تابع لکه د x ده، چې مرکبه تابع نومېږي او د دارنگه توابعو مشتق عبارت دی له:

$$y' = f'u \cdot ux + f'v \cdot vx + f'w \cdot wx$$

یا په بل عبارت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

یابه بل عبارت په اقتصادي مسايلو کې هغه وخت بې نهایت ارزښت لري او په t ښودل کېږي، کولای شو له دې فورمول نه گټه واخلو، یعنې که $u=f(x,y,z)$ په داسې حال کې چې z,y,x توابع له t متحول څخه

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

او که د مرکبو توابعو مشتق د دوه میانجی مستقل متحولونو لرونکی وي . $Z=f(u,v)$ په داسې حال کې چې $u=f(x,y)$ او $v=Q(x,y)$ وي x,y مستقل وي؛ نو د z تابع مشتقات نظر x او y متحول ته عبارت دي له:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

لومړۍ مثال: د لاندې مرکبې تابع مشتق محاسبه کړئ!

دا چې

$$y = 2u^2 - 4uv - 5v^2$$

$$u = 2x^2 - 2x$$

$$v = x^3 + x$$

$$u'x = 4x - 2$$

$$v'x = 3x^2 + 1$$

$$y' = 4uu' - 4u'v - 4uv' - 10vv'$$

$$y' = 4(2x^2 - 2x)(4x - 2) - 4(4x - 2)(3x^2 + 1)$$

$$- 4(2x^2 - 2x)(3x^2 + 1) - 10(x^3 + x)(3x^2 + 1)$$

دویم مثال: وښایئ چې $z = \varphi(x^2 + y^2)$ تابع لاندې معادله صدق کوي!

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

حل: د φ تابع (فی) د دوه مستقلو متحولو x او y د میانجی متحول په واسطه $t = x^2 + y^2$ وي نو:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(x^2 + y^2) 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(x^2 + y^2) 2y$$

$$\Rightarrow y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x^2 + y^2) 2xy - \varphi'(x^2 + y^2) 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

باید یادونه وشي چې اقتصادي ریاضي تر ډېره له پخوا راهسې له اقتصادي مسایلو تولید، عرضه، تقاضا، توزیع، متاع، اجناس، وخت، کار او نورو سره سروکار لري، له دې سببه

د توابعو د کلي مشتق د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول نه ډېره گټه اخیستل کېږي او فورمول په لاندې شکل تشریح کوو، فرضاً که تابع د لاندې شکل لرونکې وي.

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy \dots I$$

$$dz = zx \cdot dx + zy \cdot dy \dots I$$

۱- که تابع د تابع تابع شکل ولري، دا چې z د تابع په اوله مرحله کې د (x, y) متحول وي او په دویمه مرحله کې یو له مستقلو متحولو څخه تابع د بل مستقل متحول وي لکه $z = f(x, y)$ داسې، چې $y = f(x)$ وي په دې مرحله کې z د کلي مشتق نظر x ته او $\frac{dz}{dx}$ محاسبه کېږي او د I معادلې دواړه خواوې په dx تقسیموو، معادله لاندې شکل اختیاروي.

$$\frac{dz}{dx} = zx \cdot \frac{dx}{dx} + zy \cdot \frac{dy}{dx} \dots 1$$

$$\frac{dz}{dx} = zx + zy \cdot \frac{dy}{dx} \dots 2$$

۲- که $z = f(x, y)$ وروسته د x له له طریقه یواځې د y تابع وي، د z کلي مشتق نظر Y ته دارنگه محاسبه کېږي، یعنې $\frac{dz}{dy}$ او په اول قدم کې $z = f(x, y)$ وروسته $x = f(y)$ اوس د I معادلې دواړه خواوې په dy تقسیموو، معادله لاندې شکل اختیاروي.

$$\frac{dz}{dy} = zx \cdot \frac{dx}{dy} + zy \cdot \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dy} = zx \cdot \frac{dx}{dy} + zy \dots 3$$

۳- په درېیم حالت کې کولای شي د z تابع اول د y, x تابع او دویم د y, x له طریقه هر یو د بل متحول وي، دا چې په اقتصادي مسايلو کې د (t) وخت عامل اساسي رول لري، په دې حالت کې z د y, x تابع او وروسته د y, x له طریقه د t تابع وي لکه:

$$z = f(x, y) \text{ و } X = f(t)$$

$$Y = f(t)$$

دا چې د z کلي مشتق نظر t ته عبارت له $\frac{dz}{dt}$ محاسبه کېږي د I معادلې دواړه خواوې په dt تقسیموو اول فورمول لاندې شکل غوره کوي.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= zx \cdot x(t) + zy \cdot y(t) \\ \Rightarrow \frac{dz}{dt} &= zx \cdot \frac{dx}{dt} + zy \cdot \frac{dy}{dt} \dots\dots\dots 4\end{aligned}$$

دربیم مثال: د $z = 6x^{\frac{2}{3}} \cdot y^6$ تابع کلي مشتق محاسبه کړئ!
حل: اول فورمول ته په کتو لرو چې :

$$\begin{aligned}z &= 6x^{\frac{2}{3}} \cdot y^6 \\ dz &= zx dx + zy \cdot dy \\ dz &= \left(\frac{2}{3}\right)(6)(x^{\frac{2}{3}-1} y^6) dx + (36(x^{\frac{2}{3}} y^5) dy \\ dz &= \left(\frac{12}{6}\right)(x^{-\frac{1}{3}} y^6) dx + (36(x^{\frac{2}{3}} y^5) dy \\ dz &= (2x^{-\frac{1}{3}} y^6) dx + (36(x^{\frac{2}{3}} y^5) dy\end{aligned}$$

خلورم مثال: فرض کوو چې د یوه کارگر د عاید تابع عبارت له $z = 9x^2 y^2$ څخه وي، په دې تابع کې z خالص عاید x د کارگر د ورځې کار y د فی ساعت کار مزد او لکه څنګه چې فرض کوو، چې د فی ساعت کار مزد د تابع تابع د کارگر د کار د ساعت اندازه وي $y = x^2 + 3x - 1$ په دې حالت کې د کارگر د تابع کلي مشتق پیدا کړئ (د کار گر په عاید کې تغیر په y او x کې د وارد شوي تغیر په اثر یعنې کار په ساعت کې او د فی ساعت کار مزد) خو دی.

حل: فورمول ته په کتو لرو چې:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= zx + zy \frac{dy}{dx} \\ z &= 9x^2 y^2 \quad \frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 18x^2 y(2x + 3) \\ y &= x^2 + 3x - 1 = 18xy^2 + 36x^3 y + 54x^2 y \\ zx &= 18xy^2 \\ zy &= 18x^2 y \quad \frac{dz}{dx} = 18xy(y + 2x^2 + 3x) \\ \frac{dy}{dx} &= y' = 2x + 3\end{aligned}$$

۱- د y قیمت په لاسته راغلي ځواب کې وضع کوو

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= 18xy^2 + 36x^3y + 54x^2y \\ \frac{dz}{dx} &= 18(x^2 + 3x - 1) + 36x^3(x^2 + 3x - 1) + 54x^2(x^2 + 3x - 1)^2 \\ &= 18(x^2 + 3x - 1)^2(x^2 + 3x - 1) + 36x^3 + 108x^4 - 36x^3 + 54x^4 + 162x^3 - 54x^2 \\ &= 18x(x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x^5 + 9x^2 - 3x - x^2 - 3x + 1) + 36x^5 + 162x^4 + 126x^3 - 54x^2 \\ &= 18x(x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) + 36x^5 + 162x^4 + 126x^3 - 54x^2 \\ &= 18x^5 + 108x^4 + 126x^3 - 108x^2 + 18x + 36x^5 + 162x^4 + 126x^3 - 54x^2 \\ &= 54x^5 + 270x^4 + 252x^3 - 162x^2 + 18x\end{aligned}$$

۳- کولای شو د پورته سوال ځواب دارنگه په لاس راوړو، چې د y قیمت په اصلي تابع کې وضع کوو او بیا نظر x ته د تابع مشتق نیسو.

$$\begin{aligned}z &= 9x^2(x^2 + 3x - 1)^2 = 9x^2(x^2 + 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\ z &= 9x^2(x^4 + 6x^3 + 6x + 1) \\ z &= 9x^6 + 54x^5 + 63x^4 - 54x^3 + 9x^2 \\ \frac{dz}{dx} &= 54x^5 + 270x^4 + 252x^3 - 162x^2 + 18x\end{aligned}$$

پنځم مثال: فرض کوو چې د عرضې تابع د یوې متاع لپاره عبارت ده له $z = (4x + 6y - 1)^3$ په پورته مثال کې z د عرضې مقدار او تابع ده، x د متاع قیمت او y د تعویض د اشیاء قیمت وي، هر کله چې د اشیاء قیمت تعویضي او د تابع قیمت متاع $y = 2x^2 + 8x$ وي، د اړونده متاع په عرضه کې کلي تغیرات د هماغې متاع د قیمتونو او اشیاءو په نظر کې نیولو سره عوض او محاسبه کړئ او د z کلي مشتق پیدا کړئ!

حل:

$$\begin{aligned}z &= (4x + 6y - 1)^3 \\ y &= 2x^2 + 8x \\ \frac{dz}{dx} &= zx \frac{dy}{dx} + zy \cdot \frac{dx}{dx}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= 3(4x+6y-1)^2(6)(4x+8) + 3(4x+6y-1)^2(4) \\
&= 18(4x+8)(4x+6y-1)^2 + 12(4x+6y-1)^2 \\
&= (72x+144)(4x+6y-1)^2 + 12(4x+6y-1)^2 \\
&= (72x+144)(4x+6y-1)(4x+6y-1) + 12(4x+6y-1)12(4x+6y-1) \\
&= (72x+144)(16x^2+24xy-4x+24xy+36y^2-4x-6y-6y+1) \\
&\quad + 12(16x^2+24xy-4x+24xy+36y^2-6y-4x-6y+1) \\
&= (72x+144)(16x^2+48xy-8x+36y^2-12y+1) + \\
&\quad + 12(16x^2+48xy-8x+36y^2-12y+1) \\
&= 1152x^3+3454x^2y-576x^2+2592xy^2-864xy+72x \\
&\quad + 2304x^2+6912xy-1152x+5184y-1728y+144 \\
&\quad + 192x^2+576y-96x+432y-144y+12 \\
&= 1152x^3+3456x^2y+1920x^2+2592xy^2+6048xy-1176x \\
&\quad + 9350y+432y^2+156
\end{aligned}$$

٦ مثال- که فرض کرو د متاع لپاره د عرضي تابع $z = (x^2 + 2xy + y^2)^2$ وي، څکه د

$$y = 6x^2 + 1$$

$$\text{او } x=2 \quad y=4$$

حل:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= zx \frac{dy}{dx} + zx \cdot \frac{dx}{dx} \\
\frac{dz}{dx} &= 2(x^2 + 2xy + y^2)(2x + 2y)(12x) + 2(x^2 + 2xy + y^2)(2x + 2y) \\
\frac{dz}{dx} &= 2(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 4^2)(2 \cdot 2 + 2 \cdot 4)(12 \cdot 2) + 2(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 4^2)(2 \cdot 2 + 2 \cdot 4) \\
&= 2(4 + 16 + 16)(4 + 8)(24) + 2(4 + 16 + 16)(4 + 8) \\
&= 2(36)(12)(24) + 2(36)(12) \\
&= 8640 \cdot 24 + 8640 = 207360 + 8640 = 216000 \\
\frac{dz}{dx} &= 216000
\end{aligned}$$

اووم مثال: فرض کوو چې د یوه کارگر د عاید تابع عبارت له $z = 9x^2y^2$ څخه وي؛ نو په دې تابع کې z خالص عاید x د کارگر د ورځني کار ساعت y د کار د فی ساعت مزد، همدارنګه فرض کوو چې د فی ساعت کار مزد تابع د تابع د کارگر د کار د ساعتونو اندازه او لاندې شکل لري.

$$y = x^4 + 3x - 1$$

په دې حالت کې د کارگر د کار د تابع کلي مشتق محاسبه کړئ!
 (د وارده تغېر په اثر د کارگر په عايد کې تغېر په x, y کې يعنې د کار په ساعت کې
 او د في ساعت کار مزد) څو دی؟

حل:

$$\frac{dz}{dx} = zx + zy \frac{dy}{dx}$$

$$z = 9x^2y^2$$

$$y = x^4 + 3x - 1$$

$$zx = 18xy^2$$

$$zy = 18x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3$$

$$y'(x) = 4x^3 + 3$$

$$\frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 18x^2y(4x^3 + 3)$$

$$= 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 18xy(y + 4x^3 + 3x)$$

پاسنی سوال کولای شو له دوه جهتو بررسي کړو:

1-د y قیمت په وروستي ځواب کې وضع کوو، لرو چې:

$$\frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\frac{dz}{dx} = 18x(x^4 + 3x - 1)^2 + 72x^5(x^4 + 3x - 1)^2 + 54x^2(x^4 + 3x - 1)^2$$

$$= 18x(x^4 + 3x - 1)^2(x^4 + 3x - 1)^2 + 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 18x(x^8 + 3x^5 - x^4 + 3x^5 + 9x^2 - 3x - x^4 - 3x + 1) +$$

$$+ 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 18x^9 + 108x^6 - 36x^5 + 162x^3 - 108x^2 + 18x$$

$$+ 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 90x^9 + 378x^6 + 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 90x^9 + 378x^6 + 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

۲- کولای شو د ذکر شوې تابع ځواب دارنگه لاسته را وړو، چې y په اصلي تابع کې وضع کوو، وروسته نظر x ته د تابع مشتق پیداوو.

حل: دا چې $z = 9x^2y^2$ دی $y = x^4 + 3x - 1$ وي.

$$z = 9x^2(x^4 + 3x - 1)^2$$

$$z = 9x^2(x^4 + 3x - 1)(x^4 + 3x - 1)$$

$$z = 9x^2(x^8 + 3x^5 - x^4 + 3x^5 + 9x^2 - 3x - x^4 - 3x + 1)$$

$$z = 9x^2(x^8 + 6x^5 - 2x^4 + 9x^2 - 6x + 1)$$

$$z = 9x^{10} + 54x^7 - 18x^6 + 81x^4 - 54x^3 + 9x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 90x^9 + 378x^6 - 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

د درېم څپرکي پوښتنې:

۱- د لاندې توابعو قسمي مشتقات محاسبه کړئ!

$$1) z = x^2 + y^2 + 5xy$$

$$2) z = 3x^2y^2 + 12xy^3 + 2y^4$$

$$3) z = (x^2 + y^2)^5$$

$$4) z = x^2 + 3x - 9$$

۲- د لاندې توابعو اول او دویم قسمي مشتقونه او ترکیبي مشتق پیدا کړئ!

$$1) z = 8x^2 + 16xy - 24y^2$$

$$2) z = (4x^2 + 2y^2)$$

۳- فرض کړئ چې د یوې تصدی د تولید تابع لاندې شکل لري:

$$p = 8k^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

۱- د k د عامل په اړه وسطي تولید

۲- د L د عامل په اړه وسطي تولید

۳- نهايي تولید

۴- په تولید کې د تغیر درجه

۵- په مؤلديتونو کې د تغیر درجه

پورتنی پنځه جزء محاسبه کړئ!

۴- فرض کوو چې د یوه نجار د عاید تابع عبارت له $z = 9x^2y^2$ وي.

۱- z خالص عاید ۲- x د نجار ورځني کاري ساعتونه ۳- y د فی ساعت کار مروج مزد

سربېره پر دې فرض کوو، چې د فی ساعت کار مزد د نجار د کاري ساعت د اندازې تابع

وي، یعنې $y = x^4 + 3x - 1$ په دې حالت کې د نجار د تابع کلي مشتق پیدا کړئ!

۵- د $z = e^{4x^2+3y^2}$ تابع کلي مشتق پیدا کړئ که چېرې $x = 8y^4$ وي.

۶- د $z = 8x^3 + 12xy - 6y^3$ تابع کلي مشتق پیدا کړئ، که چېرې $x = 2t^{\frac{1}{2}}, y = 4t^2$ وي.

سرچینې او اخیستنې:

- ۱- ریاضی عمومی مؤلف داکتر غوری سال ۱۳۸۶
- ۲- ریاضیات عمومی سردار محمد ۲۰۰۶ میلادی
- ۳- لکچر نوت های پوهاند اقتصاد سال های ۱۳۷۷ و ۱۳۷۶
- ۴- ریاضیات عالی مؤلف پوهنوال دکتور محمد (نور غوری) و زا کتاب های صنوف ۱۱ و ۱۲ مکاتب نیز استفاده شده است.

د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام

د پوهنې وزارت د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت دښوونیز نصاب د انکشاف ریاست د ټولنې دیني او ښکاره ضرورت په درک کولو سره چې د محصلینو او شاگردانو د درسي کتابونو په برخه کې یې تخنیکي او مسلکي رشتې درلودې او لري یې، په لومړي سر کې یې تصمیم ونيو، چې په ښوونیزو پلانونو او درسي مفرداتو باندې بیاکتنه وکړي او ورپسې بیا د شاگردانو او محصلینو د درسي کتابونو د تالیف لپاره مبادرت او کوشښ وکړي. د خدای (ج) په فضل او مرحمت سره او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د ښوونکو په میرانې او همت سره د ادارې او حسابدارۍ درسي کتابونه تالیف شول تر څو په وړیا ډول د شاگردانو او محصلینو په واک او اختیار کې ورکړل شي.

د علم او معرفت له ټولو لوستونکو، علاقمندانو، د ادارې او حسابدارۍ د مکاتبو له ښوونکو، گرانو شاگردانو او د تخنیکي او مسلکي زده کړو د چارو له متخصصینو او همدا شان له ټولو څېړونکو او شنونکو څخه صمیمانه هیله کېږي، چې د دې کتابونو په مطالعې سره چې په لومړي ځل د ښوونکو او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د مسلکي غړو له لوري تالیف او تدوین شوي دي. د مسلکي، تخنیکي او علمي مطالبو او مفاهیمو د څرنگوالي په هکله خصوصاً د هغوی املایي او انشایي اشتباهاتو په اړه مونږ ته لارښوونه وکړي، ترڅو په راتلونکي کې وکړای شو، په همدې او نورو برخو کې گرانو شاگردانو ته له دې څخه ښه، غوره، ګټور او ارزښتناکه موضوعات وړاندې کړو.

همدا شان له گرانو شاگردانو او محصلینو څخه هیله کوو ترڅو د دې کتابونو د مطالعې او استفادې پر مهال د هیواد اقتصادي ستونزې، فقر او وروسته پاتې والی په نظر کې ونیسي او د کتابونو په ساتنه کې کوشښ او زیار وباسي، ترڅو د ډېرو شاگردانو او محصلینو د ګټې وړ وګرځي.

پته: دپوهنې وزارت - د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت د تعلیمي نصاب د انکشاف ریاست - د کتابونو د تالیف او د درسي ممدو موادو د برابرولو عمومي مدیریت.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library