

تقریظ

داوسنی هر اړخیز ناورین څخه د افغان ولس د خلاصون لاره یواځې په علم کښې نښتي ده. یوه ټولنه هغه وخت پرمختګ کولې شي، کله چې د علم په ډگر کښې مخکې لاړه شي. په نړي کښې هغه ملتونه مخکې ، اسوده او سوکاله ژوند لري په کومو کښې چې علمیت خپور شوي ده . که وغواړو چې د پرمختللو هیوادونو په شمار کښې راشو نو باید په خپل ځوان نسل باندي زیاته سرمایه گذاري وکړو ، دغه ځوانان باید په تعلیمي او تحصیلي اډ کامیو کې وروزل شي ترڅو هغه تشه چې زمونږ په ټولنه کښې وجود لري ډکه شي .

زه د زړه له تله د دلاور (رضا) دغه نیک اقدام ستایم ، دلاور رضا یو هیوادپاله ، احساس پاله او مسولیت پاله ځوان ده. تل مدام زیار او کوشش کوې چې به ټولنه کښې علمي ، او کولتوري فدمت کړي . د نوموړي دغه انار (لوگاریتم) علمي او څیړنیز اثر په علمي او کولتوري ډگر کښې نه هیریدونکي اقدام ده .

Ketabton.com

لوگاریتم په روزمره ژوند کې ډیر استعمال ساحه لري، د بناغلي استاد دلاور رضا دغه هڅه ټولو ډیر هغو اشخاصو لپاره موثر تمامیدلي شي، کوم چې په طبعي علومو کې لوري زده کړي، ماستري او حتي کوم چې دوکتورا کوي. ځکه ټولي بهترين علمي منابع او سرچیني او حتي دنن ورځي بهترين کتابتون (انترنيت) چې دنړي موثره کتابونه په کې په کم نرخ او هر ځای کې ترلاسه کیداشي، په هغي کې هم اکثره کتابونه په انکلیسي ژبه خپرېږي.

زه بناغلي دلاور (رضا) ته ددي کتاب مبارکي وایم. او هیله ورڅخه کوم چه تل همداسي د خپل خوریدلي هیواد او هیوادالو خدمتگار ووسي، له څښتن تعالی څخه ورته ددي ستر زیار او کوښښ بدله په دي او هغي ابدی دنیا کې غواړم.

پوهیالي نورزمان (باوري)

تنگرهار پوهنتون

ساینس پوهنځي استاد

پیل خبرې

ریاضي د لاتیني کلمې (Mahatmata) څخه اخیستل شوی چه معنی یې جمناسټیک دی، ځکه چه پخوانیو یونانیانو فکر کاوه چې لکه چه جمناسټیک د بدن فزیکي فعالیتونو کې رول لري دغه رنگه ریاضي هم د دماغو په سالم ساتلو او فعالیتونو کې رول لري .

که چیرې یو څوگ په ریاضي پوهیږي او ریاضي پر هغه تاثیر کړی وي نو لاندې خواص به په هغه کې لیدل کېږي. اول خدای پیژوندونکې ، دویم څیرکتیا ، درېیم منطقي فکر ، څلورم پراخه لیدل ، پنځم لطیف روح او اخري ټکی نظم په واقعیت سره ریاضي پوه دی .

ریاضیات د ذهن او فکر د انکشاف او ودې له پاره ډېر گټور او اغیزمن دی، لکه د ورزش او بدن ښکلا (باډي بلډینګ) لپاره تمرینات ضرور دي همدارنگه د مغزو رشد ، پراختیا او حرکت لپاره د ریاضي زده کړه اړینه ده .یعنې په دی معنی که څوک غواړي چې پراخه لیدلوری ولري ، غښتلی منطقي نظر ولري نو ریاضي دې زده کړي .

هغه ماشومان چې کم ذهنه او ګوپل وي نو بهترينه خبره ده چې په نوموړي ماشوم باندې د حساب د زده کړې تمرین او کوشش وشي . په بنسټونځیو کې هغه زده کوونکي په طبیعي ډول پر نورو مضامینو هم بر لاسي وي چې څه ناڅه په ریاضي پوهیږي او هغه زده کوونکي چې ریاضي یې نه وي ، زده نو پر نورو مضامینو هم نه پوهیږي .

په یو مطلب کې راغلي دي چې لومړۍ نړیواله جګړه د کیمیا پوهانو ترمنځ وه ، دویمه نړیواله جګړه د فزیک پوهانو ترمنځ وه او خدای د ونګرې که چیرې دریمه نړیواله جګړه پېښه شي نو دغه جګړه به د ریاضیکي جګړه وي په نتیجه کې به نړۍ ته ستر زیان واوړي ، د په ریاضي هکله د یو شمیر پوهانو ویناوي :

افلاطون د اکاډمي په دراوږې لیکل شوي وو ، هر هغه څوک چې په هندسه نه پوهیږي د ننه نه شي .

ریاضي پوهه ټایلور وویلي وه هندسه هغه پل دی چې انسان د ظلم نړۍ څخه یو د حقیقت یو نوراني ښار او محل ته رسوي .

افلاطون ووايي : د ریاضي د کار کولو محصول د طبیعت ښکلا دی او هغه څوک چې پر ریاضي نه پوهیږي نو د طبیعت ښکلا په ښه ډول نشي درک کولای

راجر بیکن و وایې: ریاضیات د علومو د دروازې کیلي دی، په ریاضیاتو کې لټي کول ټولو علومو ته صدمه رسوي.

اریک تمپل بل وایې: ټول ریاضي پوهان د ریاضي بنوونکې ندي او ټول د ریاضي بنوونکې ریاضي پوهان ندي.

ګالیله وایې: په ریاضیاتو کې څه مهم دي؟ فکر کول، ریاضیات الفبا دي چې د همدې الفبا پر مټ الله ج نړۍ خلق کړې دی.

حضرت علي کرم الله وجهه څخه یو چا پوښتنه وکړه چې 17 اوبنان

درانګه وویشي چې اول نفر $\frac{1}{2}$ برخه، دویم برنفر $\frac{1}{3}$ برخه، دریم نفر

$\frac{1}{9}$ برخه واخلي او د قربانی یو اوبن هم حلال نشي؟

حضرت علي کرم الله وجهه یو نفر ته وویل، چې یو اوبن له بیت المال

څخه راوړی او د 17 اوبنانو سره یې یو ځای کړی چې 18 اوبنان

کېږي، او د معینه نسبتونو د ویش څخه وروسته پورته ذکر شوي

برخي په لاس راځي یعنې: اول نفر ته 9 اوبنان، دویم نفر ته 6 اوبنان

او دریم نفر ته 2 اوبنان وویشل شول، چې ټول 17 اوبنان کېږي او د

بیت المال اوبن یې بیرته بیت المال ته وسپارلو.

په هر صورت د رياضي زده کړه هر چاته ضرور ده چه ياده يې کړي ،
مسلكې اشخاص بايد خپلې ملې ژبي ته د رياضياتو استعمال را
وژباړي .

د سوکاله او پرختللي افغانستان په هيله

استاد دلاور رضا معروف خيل

د ریاضي علوم

د ریاضیاتو په تعریف کې ویل کېږي، چې یو عقلاني پوهه (علم) دی، چې ځینې کمیتونه (مقادیر) د ځینې نورو کمیتونو په واسطه د هغو دقیقو روابطو په واسطه چې د دوی ترمینځ وجود لري، تعین او بحث کوي.

کمیت:

هر هغه څه چې د اندازه کولو وړتیا ولري، زیات او یا کم شي کمیت نومېږي؛ لکه سرعت، قوه، کتله او نور.

د اوولسم قرن مشهور ریاضي پوه له نظره (دگارت):

ریاضیات د نظرم او اندازې خالص علوم دی، ددې علم د کلیت قاطعیت او بارزوالي په پام کې نیولو سره چې د ریاضیاتو تعریف مو بشپړ کړی وي، ویل کېږي.

ریاضیات د کمیتونو غیر مستقیمه اندازه گیری ده او د کمیتونو ترمینځ روابط برقراروي.

دا علم نظرد کمیتونو د څېړنې لپاره په کوچنیو څانگو وېشل کېږي؛ لکه حساب، هندسه، مثلثات، الجبر، انالیز، وکتور، مترکس او نور، چې په عمومي ډول حساب د منفصل کمیتونو او هندسه د متصل کمیتونو څخه (اشکال، اجسام) څخه بحث کوي.

کله د اعدادو پرځای د حروفونو څخه استفاده کوي؛ مثلاً:

$$(3 + 4)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

دا ډول فورمولونه چې په واقعیت کې د غیر مشخص کمیتونو اړیکې څرگندوي، د ریاضي په الجبر څانګې پورې اړه لري، په دې توګه الجبر د فورمولونو په پلي کولو د حساب عملي ساده او عمومیت ورکوي.

د کارت په اوولسم قرن کې یو هندسي شکل د یو الجبري معادلې په واسطه ارایه کړ، چې د مختصاتو په سیستم پورې اړه درلوده او تحلیلي هندسه یې مینځته راوړه، په دې ترتیب الجبر د ریاضي هغه برخه ده، چې هم منفصل او هم منتقل کمیتونه تر څپرې لاندې نیسي.

د ریاضي مفاهیمو د منشاء په هکله باید ووايو چې دا مفاهیم د انسان ذهن ته د خارجي جهان د تجربې او لیدنې کتنې څخه حاصل او په لاس راغلی، چې وروسته ذهن هغه ته انکشاف او جوړښت ورکړی او یا یې نومولی وي.

غیر منظم شکل یې منظم او یا منظم شکل ته یې غیر منظم شکل ورکړی، لېکن مشهور فیلسوف او ملګري یې هر ډول مفهوم د تجربې او عمل محصول ګڼي، ولې په مقابل کې یې عقلي فلاسفه لکه دکارت واسیتیوزوا، اولایب ننز په عقل ممتاز او مستقل له تجربې څخه ګڼي او په دې عقیده دي، چې انتان لرونکي د فطري افکارو دي او له تجربې څخه یې مستقل ګڼي؛ مثلاً دکارت او کانت په دې عقیده دي، چې په طبیعت کې اساساً عدد وجود نه لري او دا ذهن دی، چې واحد په واحد زیات او اعداد مینځته راوړي.

همدارنګه د هندسې په اړه نوموړي وایي، چې اصلاً هندسي اشکال په طبیعت کې وجود نه لري او ټول اجسام درې بعدي دي، په دې ترتیب دوه یو اړخیزې قطري مینځته راځي، چې یوه یې محض د تجربې او عمل اصالت دی او بل یې محض د عقل اصالت دی.

په هر ترتیب په لنډ ډول وایو، دا تجربه ده، چې د ریاضي لومړني مفاهیم انسان ته تلقین او بیا د ذهن عقل او فکر فعالیت دي، چې هغه له سره نوي، کامل او یا متغیر شکل ورکوي او د خپل د علاقې وړ شکل، حالت ته یې راولي؛ مثلاً د تسبیح دانې او داسې نورد اعدادو د ښودلو لپاره په کار یووړل شو، چې وروسته بیا مختلف عددونه مینځته راغلل.

د فکر متداوم او فعال جریان حتی منفي او موهومي عددونه رامینځته کړل، همدارنگه هندسي مفاهيم د ډېر کوچني شي د لیدلو څخه د نقطې مفهوم د نازک او باریک سیم د لیدلو څخه د خط مفهوم د سپورمۍ د لیدلو څخه د دایرې مفهوم د هگۍ د لیدلو څخه، د بیضوي مفهوم رامینځته شو، چې وروسته یې انکشاف او پرمختګ وکړ.

په مصر کې د نیل د سیند طغیان چې ځمکې به یې خرابې او حدود به یې له مینځه وړل، د مثلث، مربع او مستطیل او مساحت مفاهیمه مینځته راغلل، چې د نن ورځې د عصري هندسې اساسات جوړوي.

د ریاضي اصول او روش

د ریاضیاتو روش د دې علم په مبداء او منشاء کې د یو شمېر اصولو وضع کول دي، چې د دې اصولو په کار اچولو سره او په هغوی استدلال کول، یو سلسله قضیې مینځته راوړي، چې په منطقي ډول له لومړني اصولو څخه په لاس راځي.

په بل عبارت:

د ریاضیاتو روش یو جوړوونکی قیاس یا قضیې دي، چې پایلې یې د وضع شوو اصولو په کار اچولو څخه حاصلېږي.
دا لومړني اصول عبارت دي له:

۱. د ریاضي تعریف. ۲. بدیهي اصول یا متعارف اصول. ۳. موضوعه اصول.

i. د ریاضي تعریف:

هغه څه چې د یو شي طبیعت، ذات، خواص واضح او روښانه کړي، یاد هغه په اړه یو فکر رامینځته کړي، تعریف نومېږي.
په بل عبارت؛ د ریاضي تعریف یو قضیه ده، چې د یو معین مقدار ذات معلوم کړي، د مثال په ډول د (α) زاویه، چې $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ وي، حاده زاویه ده.

ii. بدیهه اصول (متعارف اصول):

هغه قضیه ده، چې بدیهه څرگند او د معینو مقادیرو ترمینځ دیوې ضروري رابطې ښوونکې وي؛ مثلاً کله چې $A = B$ ، $B = C$ وي، نو $A = C$ دی او نور.

iii. موضوعه اصول:

دا هغه اصول دي، چې اثبات یې ناممکن وي، کېدای ش د هغه نه انکار وشي او یا تجدید شي، ولې دا اصول قبلول ددې لپاره چې هغه دلایل چې دا اصول یې مبدا او منشا ګڼل کېږي، ځای په ځای پاتې نه شي او استدلال ادامه وکړي، له نوم نه یې معلومېږي، دا اصول د اشخاصو له خوا وضع او قرار دادي جنبه لري او پرته له دې چې ضروري قبلېږي او منطقي ضرورت نه لري؛ مثلاً د اقلیدوس موضوعه اصول.

د ریاضي استدلال او برهان:

معمولاً ویل کېږي، چې د ریاضي استدلال قیاس دی او دا په هغه استدلال اطلاق کېږي، چې ذهن د یوې کلي قضیې څخه د هغه جز خواته ځي او د هغه اصولو څخه چې په ابتداء د دغه علم کې وضع شوي وي، منطقاً نورې قضیې نتیجه ګیري کېږي؛ مثلاً د یو مستطیل د تعریف څخه چې یوه کلي قضیه ده، د مستطیل نور خواص نتیجه ګیري کېږي.

ولې اکثر د ریاضي علما د ریاضیاتو قیاس روش نه قبلوي او وایي چې ریاضیات په لومړي سر کې د تجربې بڼه درلوده او استقرایي روش یې درلود، چې بیا د استقرا نه قیاس ته لاره بدله کړې ده.

مثلاً؛ د حساب نه الجبر او د مسطحه هندسې نه فضايي هندسې ته رسېدلي دي.

د ریاضي استدلال کې ذهن د خارجي جهان د واقعیتونو په اساس خپل فعالیت ته ادامه ورکوي، هر هغه څه چې بهتر او مناسب وي، پایلو ته د

رسېدلو په خاطر انتخاب او حاصل شوي نتایج بیا د بعدی استدلال لپاره په کاروي.

معمولاً د ریاضي په استدلال کې د تجربې او تحلیل روش نه کار اخلي، چې دا په حقیقت کې د کل څخه تجزیه تلل دي او یا هم د تکرېبي روش څخه کار اخلي، چې د جز څخه کل ته تلل دي.

یادونه کېږي، چې تحلیل او ترکیب یو د بل تکمیل کوونکي دي، د تجزې پرته ترکیب او د ترکیب پرته تجزیه ناقصه ده، د ریاضي له تعریف نه شروع او مطلوب قضیې ته رسېږي، ولې په تحلیل او تجزیه کې د قضیې نه تعریف ته رسېږو، په دې ترتیب تحلیل له قضیې نه پر تعریف ختمېږي او ترکیب له تعریف نه پر قضیه ختمېږي.

د ریاضیاتو علمي ارزش او استعمال یې په نورو علومو کې:

همغسې چې مخکې یادونه وشوه، علوم د عمل او تجربې څخه سرچینه اخلي او وروسته توسعه او پراختیا پیدا کوي.

د ریاضي په برخه کې هم لومړني مفاهیم له عیني جهان او تجربې څخه اخیستل شوي دي او بیا یې توسعه او انکشاف کړی دی، چې ثابت او استوار قوانین او روابط لري.

چې یو کمیت د بل کمیت له مخې تعین او پیدا کوي، د ریاضي علومو لپاره اوس کچې ته رسېدلی، چې د تجربې پرته د مقادیرو ترمینځ ثابت روابط او قوانین رامینځته کړي.

په داسې حال کې چې ریاضیات یو ذهني علم شمېرل کېږي، خو لومړني مفاهیم په تجربه او عینیت استوار ده.

دې علم کاملاً دقیق، قاطع او مسلم احکام یې حقیقي دقیق او مطمین دي، چې هیڅوک په کې تردید نه لري، په همدې دلیل هر تجربې علم چې د ریاضي

په چوکاټ کې ولوېږي او د ریاضي فورمولونه پرې تطبیق شي، همغومره به قاطع، دقیق او د اعتماد وړ وي.

په اوسني عصر او زمان کې حتی د اجتماعي علومو عالمان او استادان کوښښ کوي، ترڅو خپل نظریات او تیوري گانې د ریاضي په قالب او فورمولونو کې ارایه کړي.

په دې مورد کې لارډ کالوین د فزیک یو مشهور عالم وایي:
 ((کله چې د یو موضوع په هکله صحبت کوې، که وتوانېږې هغه اندازه او د اعدادو په ژبه یې ارایه کړې، که د هغه باره کې ډېر هم پوهېږې، خو له دې کار نه بغیر به مو معلومات نیمگړي وي.))

بله دا چې ځینې عالمان وایي:
 ((شناخت عبارت د اندازه گیری خخه ده.))

د نجوم فزیک عالمان غالباً داسې روابط په ریاضي کې برقرار او قایموي چې د غسې جهان سره انطباق لري، یعنې د ریاضي قوانینو ته د تجربې جنبه ورکوي.

د اوسني عصر فزیک، نجوم، تحلیلي او محاسبوي کیمیا، روانشناسي، انجینري، ساختمان، بانکداري... دا هغه علوم دي، چې د ریاضي د پوښښ او قالب پرته به نیمگړي او کم اعتباره وي، د پورته خبرو حقیقت به خپله د ساینس پوهنځي په څلورو کلونو کې احساس کړي.

لوگاریتم (Logarithm)

د ریاضي اوومه عملیه ده، چې ریاضي د عملیو د پرو لویو او یاد پرو کوچنیو عددونو په محاسبه کې؛ لکه ضرب، تقسیم، طاقت، جذر، نمایی (اکسپوننشیل) معادلې، نفوسو د تکرر مسایل، د بکتریا دوه گوني وېش، د رادیو اکتیف موادو تخریب، بانکونو په مرکبه ربحه او اداسې نورو ځایونو کې ترې استفاده کېږي.

لوگاریتم هغه عملیه ده، چې د ضرب او تقسیم عملیې په جمع او تفریق په عملیو، د توان او جذر عملیې په ضرب او تقسیم په عملیو بدلوي. لوگاریتم یوه داسې عملیه ده، چې نه یوازې محاسبه ساده کوي، بلکې د محاسبې وخت هم لنډوي.

دا عملیه د لومړي ځل لپاره د یو مسلمان ریاضي پوه (الخوارزمي - Khwarizmi) له خوا وپېژندل شوه او د یوه سکاتلنډي ریاضي پوه (جان نیپر - Jhon Napier) په واسطه پراختیا ورکړل شوه.

وروسته د جان نیپر د مړینې څخه (برکس Briggs) نومې عالم د جان نیپر د زوی په مرسته د لومړي ځل لپاره د لوگاریتم جدول د لسو (10) په قاعده ترتیب او منتشر کړی.

بالاخره د دې عملیې په واسطه د محاسبې خطکش، د حساب ماشین او داسې نور شیان اختراع شوي دي.

د لوگاریتم په واسطه مسایل په اسانه، ژر، په لږ وخت او په دقیق ډول سره

حل کېږي.

لوگاریتمي تابع (Logarithm Function)

لوگاریتم په لغت کې د متناسبو اعدادو شمېرلو ته وایي او په اصطلاح کې د اکسپوننشیل معادلې معکوسې معادلې ته لوگاریتم وایي.

اکسپوننشیل معادله:

هغه معادله ده، چې توان یې مجهول وي، عمومي شکل $a^x = b$ ، چې a او b ثابت عددونه دي، او x په کې مجهول دی؛ لکه $2^x = 16$ دا چې د اکسپوننشیل معادلې معکوس شکل ته لوگاریتم وایي، نو لیکو چې:

$b = a^x$ یو اکسپوننشیل معادله ده، نو معکوسه شکل یې عبارت ده له

$$\text{Log}_a^b = x \quad \text{څخه.}$$

پاملرنه:

کولی شو، چې اکسپوننشیل معادله په لوگاریتمي معادلو او لوگاریتمي معادلې په اکسپوننشیل معادلو بدلې کړو.

مثال: لوگاریتمي $x = 2^3 \Rightarrow \text{Log}_2^x = 3$ اکسپوننشیل.

$$2^x = 16 \Rightarrow \text{Log}_2^{16} = x \quad \text{اکسپوننشیل}$$

په بل عبارت سره: لوگاریتم د x عدد ($x > 0$) د a په قاعده ($a \neq 1, a > 0$) عبارت له هغه عدد څخه دی، چې a د نوموړي عدد په توان رفع شي، نو حاصل یې د x سره مساوي کېږي؛ مثلاً:

$$\text{Log}_a^x = y \Rightarrow a^y = x$$

$$1). \text{Log}_8^{64} = 2 \Rightarrow 8^2 = 64$$

$$2). \text{Log}_5^{25} = 2 \Rightarrow 5^2 = 25$$

$$3). \text{Log}_9^{81} = 2 \Rightarrow 9^2 = 81$$

- 4). $\text{Log}_{12}^{144} = 2 \Rightarrow 12^2 = 144$
- 5). $\text{Log}_3^9 = 2 \Rightarrow 3^2 = 9$
- 6). $\text{Log}_{25}^{625} = 2 \Rightarrow 25^2 = 625$
- 7). $\text{Log}_{13}^{169} = 2 \Rightarrow 13^2 = 169$
- 8). $\text{Log}_{21}^{441} = 2 \Rightarrow 21^2 = 441$
- 9). $\text{Log}_{20}^{400} = 2 \Rightarrow 20^2 = 400$
- 10). $\text{Log}_{30}^{900} = 2 \Rightarrow 30^2 = 900$

په بل عبارت سره:

فرضوو چې N او b دوه داسې مثبت حقيقي عددونه دي، چې $b \neq 0$ او $a \neq 1$ وي، نو د N عدد لوگاریتم د b په قاعده د a څخه عبارت دی، که چېرې b د a په توان رفع شي، د N عدد لاسته راشي؛ دارنگه چې:

$$\text{Log}_b^N = a \Leftrightarrow b^a = N$$

$$\text{Ex: } 4^2 = 16 \Leftrightarrow \text{Log}_4^{16} = 2$$

$$\text{Ex: } 10^3 = 1000 \Leftrightarrow \text{Log}_{10}^{1000} = 3$$

$$\text{Ex: } 6^0 = 1 \Leftrightarrow \text{Log}_6^1 = 0$$

په بل عبارت سره:

که $y = a^x$ اکسپوننشیل تابع وي، نو x ته د (a) په قاعده د (y) لوگاریتم وایي، چې دغه عبارت په ریاضي کې داسې $(x = \text{Log}_a^y)$ بنودل کېږي.

یا په بل عبارت سره:

که $a > 0$ او $a \neq 1$ او هم $N > 0$ وي، د N عدد لوگاریتم د a په قاعده د x عدد دی، که a په توان د x رفع شي، نو د N عدد لاسته راشي.

پورته تعریف ریاضي په ژبه داسې لیکل کېږي:

$$\text{معادل روابط} \quad \begin{cases} \text{Log}_a^N = x \\ N = a^x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{لوگاریتمي تابع} \\ \text{نمایی (اکسپوننشیل) تابع} \end{array}$$

$$1). \text{Log}_6^{36} = 2 \Rightarrow 36 = 6^2$$

$$2). \text{Log}_2^{\frac{1}{16}} = -4 \Rightarrow \frac{1}{16} = 2^{-4}$$

$$3). \text{Log}_7^{49} = 2 \Rightarrow 49 = 7^2$$

یا په بل عبارت:

د یوه طاقت توان ته لوگاریتم وایي.

$$x = \text{Log}_a^y \Rightarrow y = a^x$$

په لنډ ډول د توان محاسبه کولو ته لوگاریتم وایي.

$$\text{Ex: } 256 = 16^2 \Rightarrow \text{Log}_{16}^{256} = 2$$

$$\text{Ex: } 289 = 17^2 \Rightarrow \text{Log}_{17}^{289} = 2$$

د ټولو ذکر شوو تعریفونو له مخې د یوه عدد لوگاریتم مفهوم او مقصد دا دی، چې د یوه عدد لوگاریتم نظریوې قاعدې ته هغه عدد دی، چې که قاعده پرې رفع شي، نو خپله عدد په لاس راځي.

پاملرنه:

له یوه څخه د لویو عددونو لوگاریتم مثبت او له یوه څخه د کوچنیو عددونو لوگاریتم منفي دی. همدارنگه لوگاریتم صرف مثبت عددونه لري، خو منفي عددونه لوگاریتم نه لري. همدا شان د یو لوگاریتم صفر دی، او د صفر لوگاریتم منفي لایتناهي $(-\alpha)$ دی.

$$\text{Ex: } \text{Log}_2^{32} = 5 \Rightarrow 32 = 2^5$$

$$\text{Ex: } \text{Log}_{125}^5 = \frac{1}{3} \Rightarrow 5 = (125)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Ex: } \text{Log}_{10}^{0.1} = -1 \Rightarrow 0.1 = 10^{-1}$$

$$\text{Ex: } \text{Log}_{10}^{0.01} = -2 \Rightarrow 0.01 = 10^{-2}$$

(۱). له (۱) نه د لوی عددونو لوگاریتم تل مثبت وي.

$$10^0 = 1 \longrightarrow \text{Log}_{10}^1 = 0$$

$$10^1 = 10 \longrightarrow \text{Log}_{10}^{10} = 1$$

$$10^2 = 100 \longrightarrow \text{Log}_{10}^{10^2} = 2$$

$$10^3 = 1000 \longrightarrow \text{Log}_{10}^{10^3} = 3$$

$$10^4 = 10000 \longrightarrow \text{Log}_{10}^{10^4} = 4$$

(II). له (1) نه د کوچنیو عددونو لوگاریتم تل منفي وي.

$$10^0 = 1 \longrightarrow \text{Log}_{10}^1 = 0$$

$$10^{-1} = 0,1 \longrightarrow \text{Log}_{10}^{10^{-1}} = -1$$

$$10^{-2} = 0,01 \longrightarrow \text{Log}_{10}^{10^{-2}} = -2$$

$$10^{-3} = 0,001 \longrightarrow \text{Log}_{10}^{10^{-3}} = -3$$

$$10^{-4} = 0,0001 \longrightarrow \text{Log}_{10}^{10^{-4}} = -4$$

(III). د صفر لوگاریتم $(-\alpha)$ دی.

(IV). د صفر څخه کوچني عددونه یعنې منفي عددونه لوگاریتم نه لري.

د لوگاریتم ساده مثالونه

Number	Exponential Expression	Logarithm
10000	10^4	4
1000	10^3	3
100	10^2	2
10	10^1	1
1	10^0	0
$\frac{1}{10} = 0,1$	10^{-1}	-1
$\frac{1}{100} = 0,01$	10^{-2}	-2
$\frac{1}{1000} = 0,001$	10^{-3}	-3
$\frac{1}{10000} = 0,0001$	10^{-4}	-4

لوگاریتمی تابعگانی (Logarithmic Function)

لوگاریتمی تابع:

که $y = a^x$ یوه نمایی (اکسپوننشیل) تابع وي، نو x ته د (a) په قاعده د y لوگاریتمی تابع ویل کېږي.

یعنې د نمایی تابع معکوس حالت ته لوگاریتمی تابع ویل کېږي. او په $y = a^x \Leftrightarrow x = \text{Log}_a^y$ شکل سره بنودل کېږي.

$$f(x) = a^x : \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \\ \text{Range } f(x) = \mathbb{R} > 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \text{Log}_a^x, \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Dom } f(x)^{-1} = \mathbb{R} > 0$$

$$\text{Range } f(x)^{-1} = \mathbb{R}$$

یعنې د لوگاریتمی تابع دومین د نمایی تابع رینج او د لوگاریتمی تابع رنج د نمایی تابع دومین دی.

د لوگاریتمي تابع خاصیتونه :(Logarithmic Function Laws)

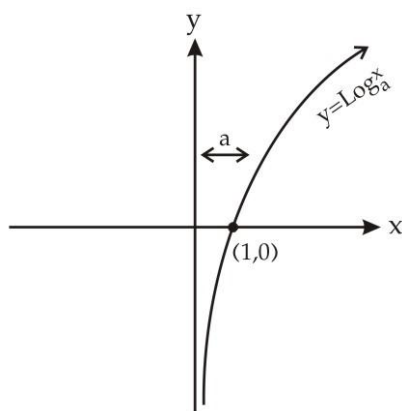
۱. د لوگاریتمي تابع د کمیتونو ساحه د مثبتو عددونو له سیټ څخه عبارت ده.

۲. څرنگه چې $\log_a^1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر سره ده، نو په دې اساس ویلی شو، چې هر لوگاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0 = 1$ لري، چې په دې ترتیب د هر لوگاریتمي تابع گراف په قایمو مختصاتو کې د $(1, 0)$ له نقطې څخه تېرېږي.

۳. هره لوگاریتمي تابع یو په یو یا (Injection) ده، یعنې د هر $x_1 = x_2$ لپاره تل $f(x_1) = f(x_2)$ او یا د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1) \neq f(x_2)$ ده. که $y = \log_a^x$ تابع ولري، دلته (a) دوه حالتونه لري، چې گراف یې هم فرق کوي.

۱. که چېرې $a > 1$ وي، نو لرو چې:

$$y = \log_a^x$$

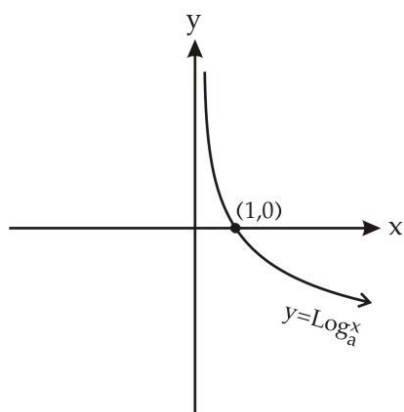


x	$\log_a^x$
0	-5
1	0
a	1
$+\alpha$	$+\alpha$

۲. که چېرې $0 < a < 1$ وي، نو په دې حالت کې لرو چې:

$$y = \log_a^x$$

$$0 < a < 1$$



x	$\text{Log}_a x$
0	$+\alpha$
a	1
1	0
$+\alpha$	$-\alpha$

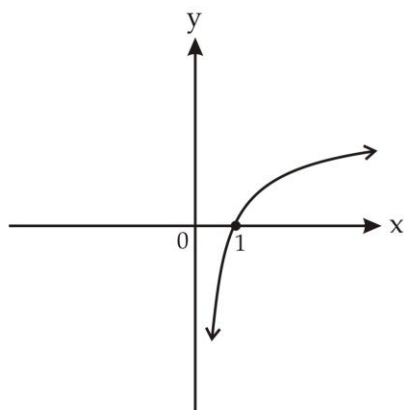
گراف $y = \text{Log}_a^x$

دلته b دوه حالتونه لري:

۱. که چېرې $b > 1$ وي، نو گراف یې په لاندې ډول دی:

$$y = \text{Log}_a^x$$

$$b > 1$$



$$\text{Domain} = (0, \alpha)$$

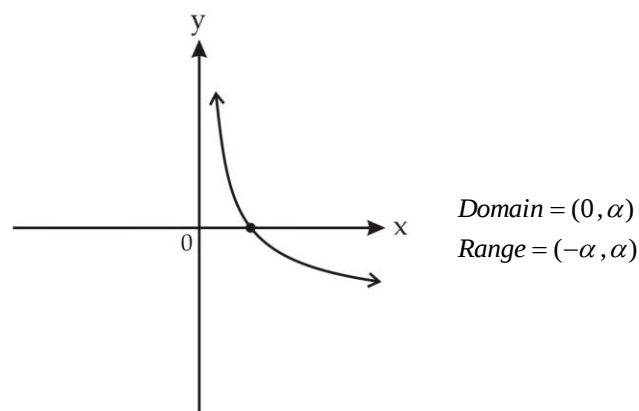
$$\text{Range} = (-\alpha, \alpha)$$

۲. که چېرې $0 < b < 1$ وي، نو گراف، دومین او رنج یې په لاندې ډول سره

دی.

$$y = \text{Log}_a^x$$

$$0 < b < 1$$



په عمومي ډول د لوگاریتمي تابع د گراف د رسمولو لپاره د لوگاریتمي $y = \log_a x$ او نمایي $y = a^x$ تابع گرافونه نسبت $y = x$ مستقیم خط ته متناظر دی.

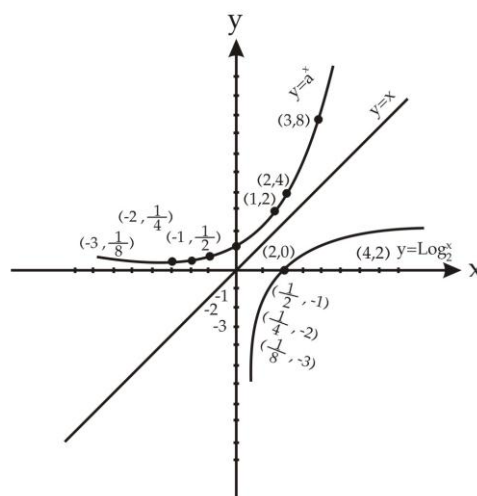
دلته (a) دوه حالتونه لري:

۱. که $a > 1$ وي، مثلاً $y = \log_2 x$ ، یعنې $a = 2$ فرض شي، نو دې ډول تابع گراف صعودي دی او قایم بجانب یې $x = 0$ خط دی.

x	$y = 2^x$	نمایي تابع
3	8	$\Rightarrow (3, 8)$
2	4	$\Rightarrow (2, 4)$
1	2	$\Rightarrow (1, 2)$
-1	1/2	$\Rightarrow (-1, 1/2)$
-2	1/4	$\Rightarrow (-2, 1/4)$
-3	1/8	$\Rightarrow (-3, 1/8)$

x	$\log_a y$	لوگاریتمي تابع
1	0	$\Rightarrow (1, 0)$
2	1	$\Rightarrow (2, 1)$
1/2	-1	$\Rightarrow (1/2, -1)$
4	2	$\Rightarrow (4, 2)$
1/4	-2	$\Rightarrow (1/4, -2)$
1/8	-3	

الف شکل:

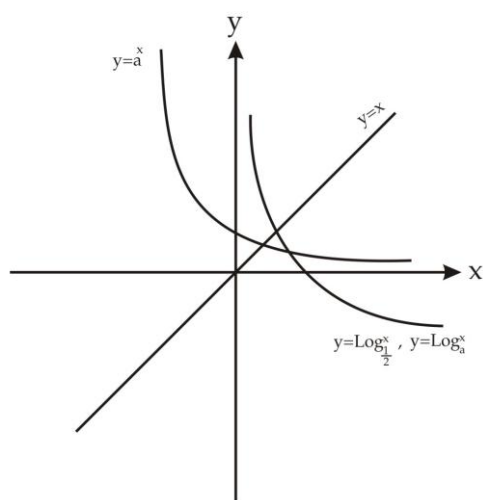


$$\text{Domain of } y = 2^x \Rightarrow (-\infty, \infty) \Leftrightarrow \text{Range of } y = \text{Log}_2^x$$

$$\text{Range of } y = 2^x \Rightarrow (0, \infty) \Leftrightarrow \text{Domain of } y = \text{Log}_2^x$$

۲. که چپری $0 < a < 1$ وي، یعنی $a = \frac{1}{2}$ فرض شي، $y = \text{Log}_{\frac{1}{2}}^x$ وساتو، په دې صورت کې تابع نزولي ده. نو په هغه صورت کې چې $0 < a < 1$ وي، د $y = \text{Log}_a^x$ تابع گراف په لاندې ډول ده.

دیترگراف په څېر کمیتونه ورکوو:
ب شکل:



له بلې خوا پوهېږو چې لوگاریتمي او اکسپوننشیل تابعگانې یو د بل معکوس دي، اوس که چېرې f ته نمایی تابع او f^{-1} ته لوگاریتمي تابع ووايو، نو د دوی ترکیب هم په لاندې ډول دی:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$$

$$f \circ f^{-1} = f(f(x)^{-1}) = f(\log_a^x) = a^{\log_a^x} = x$$

$$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a^{a^x} = x$$

نتیجه: نو له دې ترکیب څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

$$\left. \begin{array}{l} \log_a^{a^x} \Rightarrow \\ a^{\log_a^x} = x \end{array} \right\} \log_a^{a^x} = a^{\log_a^x} = x$$

مثال: د $f(x) = \log_5^x$ تابع قیمتونه په $f(5)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{25})$ او $f(125)$ کې پیدا کړئ؟

حل: په راکړل شوي تابع کې د x پرځای قیمتونه لیکو، چې په نتیجه کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x) = \log_5^x \Rightarrow f(5) = \log_5^5 = 1$$

$$f(x) = \log_5^x \Rightarrow f(1) = \log_5^1 = 0$$

$$f(x) = \log_5^x \Rightarrow f(\frac{1}{25}) = \log_5^{\frac{1}{25}} = \log_5^{5^{-2}} = -2 \cdot \log_5^5 = -2 \cdot 1 = -2$$

$$f(x) = \log_5^x \Rightarrow f(125) = \log_5^{125} = \log_5^{5^3} = 3 \cdot \log_5^5 = 3 \cdot 1 = 3$$

مثال: د $f(x) = \log_3^x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ ، $f(3)$ ، $f(27)$ او $f(81)$ کې په لاس راوړو.

حل: راکړل شوي قیمتونه په تابع کې د x پرځای وضع کوو.

$$f(x) = \log_3^x \Rightarrow f(1) = \log_3^1 = 0$$

$$f(x) = \log_3^x \Rightarrow f(3) = \log_3^3 = 1$$

$$f(x) = \log_3^x \Rightarrow f(27) = \log_3^{27} = \log_3^{3^3} = 3 \cdot \log_3^3 = 3$$

$$f(x) = \log_3^x \Rightarrow f(81) = \log_3^{81} = \log_3^{3^4} = 4 \cdot \log_3^3 = 4$$

تمرین (Excerces):

۱. د $f(x) = \text{Log}_4^x$ تابع قیمتونه په $f(1), f(16), f(4)$ او $f(\frac{1}{16})$ کې پیدا کړئ؟

۲. د $f(x) = \text{Log}_2^x$ تابع قیمتونه په $f(1), f(64), f(32)$ او $f(\frac{1}{4})$ کې پیدا کړئ.

لوگاریتمی او اکسپوننشیل (نمایی) تابع گانی یو پر بل تبدیلول (Logarithmic Function)

لاندې نمایی مساوات په لوگاریتمی حالت تبدیلوو:

- 1). $100^0 = 1 \Rightarrow \log_{100}^1 = 0$
- 2). $10^{-4} = 0,0001 \Rightarrow \log_{10}^{0,0001} = -4$
- 3). $10^{\frac{1}{3}} = 10^{-3} \Rightarrow \log_{10}^{10^{\frac{1}{3}}} = -3$
- 4). $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2} \Rightarrow \log_2^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
- 5). $(\frac{1}{2})^{-4} = 16 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{16} = -4$
- 6). $10^3 = 1000 \Rightarrow \log_{10}^{1000} = 3$

لاندې لوگاریتمی مساوات په نمایی حالت تبدیلوو:

- 1). $\log_2^{4x} = x \Rightarrow 2^x = 4x$
- 2). $\log_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{9}} = 2 \Rightarrow (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$
- 3). $\log_c^{\frac{1}{x}} = -y \Rightarrow c^{-y} = \frac{1}{x}$
- 4). $\log_{10}^{0,01} = -2 \Rightarrow 10^{-2} = 0,01$
- 5). $\log_8^1 = 0 \Rightarrow 8^0 = 1$
- 6). $\log_2^{32} = 5 \Rightarrow 2^5 = 32$

عملي مثالونه:

د اکسپوننشیل شکل څخه لوگاریتمي شکل ته د معادلې تبدیلول:

- 1). $4^2 = 16 \Rightarrow \log_4^{16} = 2$
- 2). $10^3 = 1000 \Rightarrow \log_{10}^{1000} = 3$
- 3). $6^0 = 1 \Rightarrow \log_6^1 = 0$
- 4). $3^4 = 81 \Rightarrow \log_3^{81} = 4$
- 5). $12^2 = 144 \Rightarrow \log_{12}^{144} = 2$
- 6). $10^5 = 100000 \Rightarrow \log_{10}^{100000} = 5$

لوگاریتمي معادلې په اکسپوننشیل شکل بدلول:

- 1). $\log_{10}^{100} = 2 \Rightarrow 10^2 = 100$
- 2). $\log_7^{49} = 2 \Rightarrow 7^2 = 49$
- 3). $\log_5^{125} = 3 \Rightarrow 5^3 = 125$
- 4). $\log_{10}^1 = 0 \Rightarrow 10^0 = 1$
- 5). $\log_3^3 = 1 \Rightarrow 3^1 = 3$
- 6). $\log_{10}^{0.1} = -1 \Rightarrow 10^{-1} = 0.1$
- 7). $\log_{10}^{0.001} = 3 \Rightarrow 10^{-3} = 0.001$
- 8). $\log_{10}^{0.0001} = -4 \Rightarrow 10^{-4} = 0.0001$
- 9). $\log_{125}^5 = \frac{1}{3} \Rightarrow 5 = (125)^{\frac{1}{3}}$
- 10). $\log_2^{32} = 5 \Rightarrow 2^5 = 32$
- 11). $\log_3^{27} = 3 \Rightarrow 3^3 = 27$
- 12). $\log_6^{36} = n \Rightarrow 6^n = 36 \Rightarrow 6^n = 6^2 = n = 2$
- 13). $\log_3^{81} = 4 \Rightarrow 3^4 = 81$
- 14). $\log_2^8 = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$
- 15). $\log_7^{\frac{1}{49}} = -2 \Rightarrow 7^{-2} = \frac{1}{49}$
- 16). $\log_{10}^{\frac{1}{1000}} = -3 \Rightarrow 10^{-3} = \frac{1}{1000}$
- 17). $\log_2^{16} = 4 \Rightarrow 2^4 = 16$

عملي مثالونه:

لوگاریتمي شکل په اکسپوننشیل (نمایی) شکل بدلول او اکسپوننشیل شکل په لوگاریتمي شکل بدلول.

- 1). $Ex: \log_x^y = m \Leftrightarrow x^m = y$
- 2). $Ex: \log_{10}^{10^3} = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 10^3$
- 3). $Ex: \log_7^{49} = 2 \Leftrightarrow 7^2 = 49$
- 4). $Ex: \log_{10}^{10000000} = 7 \Leftrightarrow 10^7 = 10000000$
- 5). $Ex: \log_y^{\frac{1}{8}} = -3 \Leftrightarrow y^{-3} = \frac{1}{8}$
- 6). $Ex: \log_5^{625} = 4 \Leftrightarrow 625 = 5^4$
- 7). $Ex: \log_{12}^{144} = 2 \Leftrightarrow 12^2 = 144$
- 8). $Ex: \log_a^m = n \Leftrightarrow a^n = \frac{1}{m}$
- 9). $Ex: \log_4^{64} = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$
- 10). $Ex: \log_{10}^1 = 0 \Leftrightarrow 10^0 = 1$

عملي مثالونه:

لاندې افادې د اکسپوننشیل نه په لوگاریتمي او د لوگاریتمي شکل نه په اکسپوننشیل واړوئ.

- 1). $4^3 = 64 \Rightarrow \log_4^{64} = 3$
- 2). $3^3 = 27 \Rightarrow \log_3^{27} = 3$
- 3). $10^{-3} = \frac{1}{1000} \Rightarrow \log_{10}^{\frac{1}{1000}} = -3$
- 4). $\log_9^{\frac{1}{9}} = -1 \Rightarrow 9^{-1} = \frac{1}{9}$
- 5). $\log_9^9 = 1 \Rightarrow 5 = 5^1 \Rightarrow \log_9^9 = 1 \Rightarrow 9^1 = 9 \Rightarrow 9 = 9$
- 6). $\log_b^{\frac{1}{y}} = d \Rightarrow \frac{1}{y} = b^d$
- 7). $\log_{10}^{10000000} = 7 \Rightarrow 10000000 = 10^7$
- 8). $\log_{10000}^1 = 0$
- 9). $\log_{10^0}^{10^0} = 1$
- 10). $\log_8^{8^{-3}} = -3 \cdot \log_8^8 = -3 \cdot 1 = -3$
- 11). $\log_{13}^{13^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} \cdot \log_{13}^{13} = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

تمرین:

لاندې لوگاریتمی افادې په نمایی شکل ولیکئ.

- 1). $\log_8^2 = \frac{1}{3}$
- 2). $\log_{27}^3 = \frac{1}{3}$
- 3). $\log_4^{\frac{1}{32}} = -\frac{5}{2}$
- 4). $\log^{0,01} = -2$
- 5). $\log^{1000} = 3$
- 6). $\log^1 = 0$
- 7). $\log_{144}^{12} = \frac{1}{2}$
- 8). $\log_5^{\frac{1}{625}} = -3$
- 9). $\log_{100}^{1000} = \frac{3}{2}$
- 10). $\log_{32}^4 = \frac{2}{5}$

تمرین:

لاندې اکسپوننشیل (نمایی) رابطې په لوگاریتمی شکل ولیکئ؟

- 1). $5^4 = 625$
- 2). $7^{-1} = \frac{1}{7}$
- 3). $10^{-4} = 0,0001$
- 4). $32^{2/5} = 4$
- 5). $256^{-1/4} = \frac{1}{4}$
- 6). $8^{2/3} = 4$
- 7). $4^{3/2} = 8$
- 8). $11^{-2} = \frac{1}{121}$
- 9). $10^{-2} = 0,01$
- 10). $4^{-1} = 0,25$

د لوگاریتم قوانین او مثالونه

د لوگاریتم قضیې او خواص (Property of Logarithm)

لومړۍ خاصیت: د یو لوگاریتم د هر مثبت عدد په قاعده صفر (0) دی.

$$\log_a^1 = 0$$

$$\text{Proof : } \log_a^1 = 0 \Rightarrow a^0 = 1$$

$$\log_{1000}^1 = 0 \Rightarrow 1000^0 = 1$$

دویم خاصیت: د هر مثبت عدد لوگاریتم په خپله قاعده مساوي کېږي،
له یو سره.

$$\log_a^a = 1$$

$$\text{Proof} \Rightarrow \log_a^a = 1 \Rightarrow a = a^1$$

د طاقت قانون دی:

$$\log_{1000}^{1000} = 1 \Rightarrow 1000^1 = 1000$$

$$\log_a^1 = 0$$

درېم خاصیت: د یوه طاقت عدد لوگاریتم په خپله قاعده د توان څخه
عبارت دی.

$$\log_b^{b^r} \Rightarrow r \qquad b \neq 1$$

$$\text{Proof} = \log_b^{b^r} = r \qquad \Rightarrow b^r = b^r$$

$$Ex: \log_{20}^{20^2} = 2 \Rightarrow 20^2 = 20^2$$

$$Ex: \log_x^{x^6} = 6 \Rightarrow x^6 = x^6$$

خلورم خاصیت: دیوه حاصل ضرب لوگاریتم په یوه قاعده باندې د ضربی عواملو د لوگاریتمو د مجموعې سره مساوي دی.

$$\log_a^{m.n} = \log_a^m + \log_a^n$$

$$Proof = \log_a^m = x \Rightarrow a^x = m$$

$$\log_a^n = y \Rightarrow a^y = n$$

$$a^x \cdot a^y = m.n$$

طرف په طرف ضربوو او د طاقت قانون پرې عملي کوو.

$a^{x+y} = m.n$ دا چې اکسپوننشیل (نمایی تابع) شکل لري، نو لوگاریتمي شکل ته اړوو.

$$a^{x+y} = m.n \Rightarrow \log_a^{m.n} \Rightarrow x+y$$

پورته معادله کې د x او y پرځای مخکیني قیمتونه ذکر کوو.

$$\log_a^{m.n} = \log_a^m + \log_a^n$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \log_a^m \\ y = \log_a^n \end{array} \right\}$$

$$Ex: \log_2^{(2x)} \Rightarrow \log_2^2 + \log_2^x \Rightarrow 1 + \log_2^x$$

$$Ex: \log_m^{my} \Rightarrow \log_m^m + \log_m^y \Rightarrow 1 + \log_m^y$$

$$Ex: \log_2^{14} \Rightarrow \log_2^{2 \cdot 7} \Rightarrow \log_2^2 + \log_2^7 \Rightarrow 1 + \log_2^7$$

$$Ex: \log_A^{ARAZAN} = \log_A^A + \log_A^R + \log_A^A + \log_A^Z + \log_A^A + \log_A^N$$

$$= 1 + \log_A^R + 1 + \log_A^Z + 1 + \log_A^N \Rightarrow 3 + \log_A^R + \log_A^Z + \log_A^N$$

لاندې افادې چې د ضرب په شکل لیکلې شوي دي، د جمعې په شکل (فورمول) باندې لیکو:

$$1: \log_6^{(6x^2)} = ?$$

$$Solution: \log_6^{(6x^2)} = \log_6^6 + \log_6^{x^2} \Rightarrow 1 + 2\log_6^x$$

$$2: \log_{10}^{(10x^2 \cdot y)} = ?$$

$$Solution: \log_{10}^{10} + \log_{10}^{x^2} + \log_{10}^y \Rightarrow 1 + 2\log_{10}^x + \log_{10}^y$$

$$3: \log_2^{(x \cdot y \cdot z)} = ?$$

$$Solution: \log_2^{(x \cdot y \cdot z)} = \log_2^x + \log_2^y + \log_2^z$$

لاندې افادې چې د جمعې په شکل لیکل شوي، د ضرب په شکل یې تبدیل کړئ؟

$$1. \log_7 \frac{x^3}{5y^4} + \log_7 \frac{5y^4}{x^2} = ?$$

$$\text{Solution: } \log_7 \left(\frac{x^3}{5y^4} \cdot \frac{5y^4}{x^2} \right) = \log_7 \left(\frac{x}{1} \right) \Rightarrow \log_7 x$$

$$2. \log_{10}^4 + \log_{10}^5 \Rightarrow \log_{10}^{4.5} \Rightarrow \log_{10}^{20}$$

$$3. \log_9 + \log_3 \Rightarrow 1 + 1 = 2$$

$$4. \log_{10}^{1000} + \log_{10}^{\frac{1}{100}} \Rightarrow \log_{10}^{(1000 \cdot \frac{1}{100})} = \log_{10}^{10} = 1$$

$$5. \log_{12}^{36} + \log_{12}^4 = \log_{12}^{36 \cdot 4} = \log_{12}^{144} = \log_{12}^{12^2} = 2$$

$$6. \log_3 \left(\frac{8x}{3y^3} \right) + \log_3 \left(\frac{3y^4}{x} \right) = \log_3 \left(\frac{8x}{3y^3} \cdot \frac{3y^4}{x} \right) = \log_3^{8y} \Rightarrow \log_3^8 + \log_3^x + \log_3^y$$

$$7. \log_{10}^5 + \log_{10}^{20} \Rightarrow \log_{10}^{5 \cdot 20} = \log_{10}^{1000} = \log_{10}^{10^3} = 3 \Rightarrow 3 - \log_5^2$$

لاندې د خارج قسمت افادې د تفاضل په شکل لیکو:

$$1. \log_4^{\frac{32}{2}} \Rightarrow \log_4^{16} = \log_4^{4^2} = 2 \cdot \log_4^4 = 2 \cdot 1 \Rightarrow 2$$

$$2. \log_5^{\frac{250}{160}} = \log_5^{\frac{25}{16}} = \log_5^{25} - \log_5^{16} \Rightarrow \log_5^{5^2} - \log_5^{2^4} \\ \Rightarrow 2 \log_5^5 - \log_5^{2^4} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 4 \cdot \log_5^2 \Rightarrow 2 - 4 \log_5^2$$

$$3. \log_7^{\left(\frac{63}{49} \right)} = \log_7^{63} - \log_7^{49} = \log_7^{7 \cdot 9} - \log_7^{7^2} = \\ \Rightarrow \log_7^7 + \log_7^9 - 2 \cdot \log_7^7 \Rightarrow 1 + \log_7^9 - 2 \\ \Rightarrow \log_7^9 - 1$$

$$4. \log_m^{\left(\frac{x \cdot y \cdot z}{d} \right)} = \log_m^{(x \cdot y \cdot z)} - \log_m^d \Rightarrow \log_m^x + \log_m^y + \log_m^z - \log_m^d$$

لاندې د تفاضل افادې د خارج قسمت په شکل لیکو:

$$1. \log_a^{y^2 a} - \log_a^{y^2} = \log_a^{\frac{ay^2}{y^2}} = \log_a^a = 1$$

$$2. \log_2^{32} - \log_2^{16} = \log_2^{\frac{32}{16}} = \log_2^2 = 1$$

$$3. \log_{10}^{10000} - \log_{10}^{1000} = \log_{10}^{\frac{10000}{1000}} = \log_{10}^{10} = 1$$

$$4. \log_5^{625} - \log_5^{25} = \log_5^{\frac{625}{25}} = \log_5^{25} = 4$$

$$5. \log_5^{125} - \log_5^{25} = \log_5^{\frac{125}{25}} = \log_5^5 = 1$$

شپږم خاصیت: د یوه طاقت لرونکي عدد لوگاریتم پر بله قاعده د توان او همغه عدد د لوگاریتم د حاصل ضرب سره مساوي ده.

$$\log_b^{m'} \Rightarrow r \cdot \log_b^m$$

$$\text{Proof} = \log_b^m = x \Rightarrow m = b^x$$

اوس دواړه خواوې د (r) په توان پورته کوو.

$$m^r = (b^x)^r \Rightarrow m^r = b^{x \cdot r}$$

په لوگاریتمی معادله یې بدلوو.

$$\log_b^{m'} = x \cdot r$$

په آخر کې د x پرځای ذکر شوی قیمت وضع کوو.

$$\log_b^{m'} = x \cdot r \Rightarrow \log_b^{m'} = \log_b^m \cdot r$$

$$\log_b^{m'} = r \cdot \log_b^m$$

$$\text{Ex: } \log_2^{49^3} \Rightarrow 3 \cdot \log_2^{49}$$

$$\text{Ex: } \log_9^{81^5} \Rightarrow 5 \cdot \log_9^{81} \Rightarrow 5 \cdot \log_9^{9^2} \Rightarrow 5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$$

$$\text{Ex: } \log_5^{(5x)^3} \Rightarrow 3(\log_5^{5x}) \Rightarrow 3(\log_5^5 + \log_5^x) \Rightarrow 3(1 + \log_5^x) \Rightarrow 3 + 3\log_5^x$$

$$\text{Ex: } \log_3^{(\frac{9}{5})^5} \Rightarrow 5 \cdot \log_3^{\frac{9}{5}} \Rightarrow 5(\log_3^9 - \log_3^2) \Rightarrow 5(\log_3^{3^2} - \log_3^2) \Rightarrow 5(2 - \log_3^2) \Rightarrow 10 - 5\log_3^2$$

اووم خاصیت: د یوه عدد لوگاریتم د یوه طاقت لرونکي عدد پر قاعده عبارت دی د قاعدې د توان معکوس ضرب یې د همغه عدد لوگاریتم د قاعدې د قاعدې په قاعده.

$$\log_a^m = \frac{1}{b} \log_a^m$$

$$\text{Proof} \Rightarrow \log_a^m = y \Rightarrow m = a^y \dots\dots\dots I$$

(I) رابطه په عین ضرب او تقسیموو، کوم فرق نه کوي، یو طرف.

$$m = a^y \Rightarrow m = (a^y)^{\frac{b}{b}} \Rightarrow m = (a^b)^{\frac{y}{b}} \dots\dots\dots II$$

(II) د رابطې لوگاریتم نیو.

$$m = (a^b)^{\frac{y}{b}} \Rightarrow \log a^{b^{\frac{y}{b}}} = \frac{y}{b}$$

$$\log a^{b^{\frac{y}{b}}} = \frac{1}{b} \cdot y \Rightarrow \log_a^{b^{\frac{y}{b}}} = \frac{1}{b} \cdot \log_a^m$$

$$Ex: \log_{10}^{\sqrt[3]{1000}} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \log_{10}^{1000} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

نهم خاصیت: که قاعده د لوگاریتم په طاقت سره وي، نو په هغه صورت کې چې د لوگاریتم قاعده او د نیمایي تابع قاعده سره مساوي وي، خپله د عدد سره مساوي دي.

$$a^{\log_a^y} = y$$

$$Proof: \log_a^y = x \Rightarrow y = a^x \Rightarrow y = a^{\log_a^y}$$

$$Ex: 10^{\log_{10}^4} = 4$$

$$Ex: 0,2^{\log_{0,2}^5} = 5$$

$$Ex: 2^{\log_2^3} = 3$$

پاملرنه:

هیڅ وخت په لاندې ډول لوگاریتم نه شولیکلی:

$$Ex: \log_5^{4^5} \neq 4$$

ځکه چې هیڅ قاعدې ته برابر نه دی.

$$Ex: 3^{\log_4^3} \neq 4$$

ځکه چې هیڅ قاعدې ته برابر نه دی.

$$Ex: 8^{\log_{3^8}} \neq 8$$

ځکه دا هم هیڅ قانوني قاعدې ته نه ده جوړه.

لسم خاصیت: که چېرې $a, b \in R$ او خلاف د یو $(b \neq 1, a \neq 1)$ وي، نو لرو، چې:

$$\log b^a = \frac{1}{\log_a^b} \Rightarrow \log_b^a \cdot \log_a^b = 1$$

$$Proof: \log_b^a = y \Rightarrow a = b^y$$

که د اطراف لوگاریتم د a په قاعده ونیسو، لرو چې:

$$a = b^y \Rightarrow \log_a^a = \log_a^{b^y} \Rightarrow 1 = y \cdot \log_a^b \Rightarrow y = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$\Rightarrow \log b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$Ex: \log_3^5 \cdot \log_5^3 = 1$$

$$Ex: \log_2^{1000} \cdot \log_{1000}^2 = 1$$

$$Ex: \log_y^x \cdot \log_x^y = 1$$

$$Ex: \log_{64}^2 = ?$$

$$\log_{64}^2 = \frac{1}{\log_2^{64}} = \frac{1}{\log_2^{2^6}} = \frac{1}{6}$$

یوولسم خاصیت: دیوه معکوس عدد لوگاریتم د خپله عدد د منفي لوگاریتم سره مساوي دي، چېد یوه عدد منفي لوگاریتم ته د هغه عددونو لوگاریتم هم وایي.

$$\log_a^{\frac{1}{A}} = -\log_a^A \Rightarrow \text{Colog}_a^A$$

$$\text{Proof: } \log_a^{\frac{1}{A}} = \log_a^1 - \log_a^A = 0 - \log_a^A \Rightarrow -\log_a^A \Rightarrow \text{colog}_a^A$$

$$\Rightarrow \log_a^{\frac{1}{A}} = -\log_a^A = \text{Colog}_a^A$$

دولسم خاصیت: د قاعدې د بدلولو فارمول:

که دیو عدد لوگاریتم په یوه قاعده غوښتل شوي وي، مگرد دغه عدد لوگاریتم پردغه قاعده مشکل وي، نو د عدد او د لوگاریتم د قاعدې لوگاریتم پریوه بله قاعده پیدا کوو، د عدد لوگاریتم پردغه قاعده د لوگاریتم د قاعدې په لوگاریتم باندې وېشو، مطلوب عدد په لاس راځي.

$$\log_a^m = \frac{\log_b^m}{\log_b^a}$$

ثبوت:

که چېرې $\log_a^m = x$ وښیو، نو په اکسپوننشیل شکل یې بدلوو.

$$\log_a^m = x \Rightarrow m = a^x$$

د دواړو خواوو لوگاریتم د b په قاعده نیسو.

$$\log_b^m = \log_b^{a^x} \Rightarrow x \log_b^a$$

$$\log_b^m = \log_a^m \cdot \log_b^a$$

$$\frac{\log_b^m}{\log_b^a} = \frac{\log_a^m \cdot \log_b^a}{\log_b^a} \Rightarrow \log_a^m = \frac{\log_b^a}{\log_b^a}$$

د تبدیلی ($\log_a^x = \frac{\log_b^a}{\log_b^x} \Rightarrow \log_a^x \cdot \log_b^a = \log_b^x$) فارمول په مرسته لاندې

مثالونه حلوو:

1. $\log_{64}^{16} = ?$

Solutin: $\log_{64}^{16} = \frac{\log_2^{16}}{\log_2^{64}} = \frac{\log_2^{2^4}}{\log_2^{2^6}} = \frac{4 \cdot \log_2^2}{6 \cdot \log_2^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2. $\log_{100}^{0,0001} = ?$

Solution: $\log_{10}^{0,0001} = \frac{\log_{10}^{0,0001}}{\log_{10}^{100}} = \frac{\log_{10}^{10^{-4}}}{\log_{10}^{10^2}} = \frac{-4 \cdot \log_{10}^{10}}{2 \cdot \log_{10}^{10}} \Rightarrow \frac{-4.1}{2.1} = \frac{-4}{2} \Rightarrow -2$

3. $\log_{0,01}^{10000} = ?$

Solution: $\log_{0,01}^{10000} = \frac{\log_{10}^{10000}}{\log_{10}^{0,01}} = \frac{\log_{10}^{10^4}}{\log_{10}^{10^{-2}}} = \frac{4 \cdot \log_{10}^{10}}{-2 \cdot \log_{10}^{10}} = \frac{4.1}{-2.1} = \frac{4}{-2} = -2$

4. $\log_{16}^{32} = ?$

Solution: $\log_{16}^{32} = \frac{\log_2^{32}}{\log_2^{16}} = \frac{\log_2^{2^5}}{\log_2^{2^4}} = \frac{5 \cdot \log_2^2}{4 \cdot \log_2^2} = \frac{5.1}{4.1} = \frac{5}{4}$

5. $\log_{121}^{14641} = ?$

Solution: $\log_{121}^{14641} = \frac{\log_{11}^{14641}}{\log_{11}^{121}} = \frac{\log_{11}^{11^4}}{\log_{11}^{11^2}} = \frac{4 \cdot \log_{11}^{11}}{2 \cdot \log_{11}^{11}} = \frac{4.1}{2.1} = \frac{4}{2} \Rightarrow 2$

6. $\log_{0,001}^{0,0001} = ?$

Solution: $\log_{0,001}^{0,0001} = \frac{\log_{10}^{0,0001}}{\log_{10}^{0,001}} = \frac{\log_{10}^{10^{-3}}}{\log_{10}^{10^{-2}}} = \frac{-3 \cdot \log_{10}^{10}}{-2 \cdot \log_{10}^{10}} \Rightarrow \frac{-3.1}{-2.1} = \frac{3}{2}$

7. $\log_{0,1}^{1000} = ?$

Solution: $\log_{0,1}^{1000} = \frac{\log_{10}^{1000}}{\log_{10}^{0,1}} = \frac{\log_{10}^{10^3}}{\log_{10}^{10^{-1}}} = \frac{3 \cdot \log_{10}^{10}}{-1 \cdot \log_{10}^{10}} = \frac{3.1}{-1.1} \Rightarrow -3$

8. $\log_9^{27} = ?$

Solution: $\log_9^{27} = \frac{\log_3^{27}}{\log_3^9} = \frac{\log_3^{3^3}}{\log_3^{3^2}} = \frac{3 \cdot \log_3^3}{2 \cdot \log_3^3} = \frac{3.1}{2.1} = \frac{3}{2}$

9. $\log_{25}^{625} = ?$

Solution: $\log_{25}^{625} = \frac{\log_5^{625}}{\log_5^{25}} = \frac{\log_5^{5^4}}{\log_5^{5^2}} = \frac{4 \cdot \log_5^5}{2 \cdot \log_5^5} = \frac{4.1}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$

10. $\log_{27}^{81} = ?$

Solution: $\log_{27}^{81} = \frac{\log_3^{81}}{\log_3^{27}} = \frac{\log_3^{3^4}}{\log_3^{3^3}} = \frac{4 \cdot \log_3^3}{3 \cdot \log_3^3} = \frac{4.1}{3.1} = \frac{4}{3}$

$$11. \log_8^{16} = ?$$

$$\text{Solution: } \log_8^{16} = \frac{\log_2^{16}}{\log_2^8} = \frac{\log_2^{2^4}}{\log_2^{2^3}} = \frac{4 \cdot \log_2^2}{3 \cdot \log_2^2} = \frac{4}{3}$$

$$12. \log_b^a \cdot \log_c^b \cdot \log_a^d = 1$$

$$\text{Solution: } \frac{\log_m^a}{\log_m^b} \cdot \frac{\log_m^b}{\log_m^c} \cdot \frac{\log_m^c}{\log_m^a} \cdot \frac{\log_m^d}{\log_m^d} = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

دیارلسم خاصیت: د $\log_a^{A^n} = n \log_a^A$ او $\log_{a^n}^A = \frac{1}{n} \log_a^A$ څخه په استفادې بل خاصیت هم رامینځته کېږي.

$$\log_{a^n}^A = \frac{n}{\alpha} \log_a^A$$

پاملرنه:

د $\log_a^{A^n} = n \log_a^A$ او $\log_{a^n}^A = \frac{1}{n} \log_a^A$ خاصیتونو څخه په استفادې سره لیکلی شو.

$$1. \log a^{m^{\frac{1}{n}}} \Rightarrow \frac{n}{m} \log a^x$$

$$2. \log a^{x^{\frac{1}{m}}} \Rightarrow \log a^{\frac{x}{m}}$$

$$3. \log a^{m^x} \Rightarrow \log a^{\frac{1}{x^m}}$$

مقصد دا دی، چې پورته شکلونه د خپل د ګټې لپاره په دا شان تبدیلولی شو.

څوارلسم خاصیت: که عدد او قاعده د یو واحد په یوه خوا کې قرار ولري، نو لوګاریتم یې مثبت او که یو یې یوه خوا او بل یې بله خوا قرار ولري، نو لوګاریتم یې منفي دی.

یعنې؛

۱. پوهېږو چې $a^x > 1$ دی، کله چې $a > 1$ او هم $x > 0$ وي او یا دا رنگه چې $a < 1$ او هم $x < 0$ وي.

۲. که $a > 1$ او $x < 0$ او یا $a < 1$ او $x > 0$ ، نو پوهېږو چې $a^x < 1$ لاسته راځي.

$$a > 1, N < 1 \Rightarrow \log_a^N < 0$$

$$a > 1, N > 1 \Rightarrow \log_a^N > 0$$

$$a < 1, N > 1 \Rightarrow \log_a^N < 0$$

$$a < 1, N < 1 \Rightarrow \log_a^N > 0$$

مثال: د لاندې لوگاریتمونو څخه کوم یو بی مثبت او کوم یو بی منفي دی.

a) $\log_5^{13}$

b) $\log_9^8$

c) $\log_{2,1}^{0,3}$

حل:

(a) $\log_5^{13} > 0$ دی، ځکه چې (13) او هم 5 دواړه په یوه خوا قرار لري. یعنی $13 > 1$ او هم $5 > 1$ ، نو په نتیجه کې ویلی شو، چې نوموړی لوگاریتم مثبت دی.

(b) $\log_9^8 > 0$ دی، ځکه 8 او هم 9 په یوه خوا قرار لري، یعنی $8 > 1$ او $9 > 1$ دي، نو په نتیجه کې یاد لوگاریتم مثبت دی.

(c) $\log_{2,1}^{0,3} < 0$ دی، ځکه چې $0,3 < 1$ او $2,1 > 1$ دی، یعنی یو د بل په مختلف لوري قرار لري، په نتیجه کې ویلی شو، چې دغه لوگاریتم منفي دی. مثال: د لاندې لوگاریتمونو څخه کوم یو بی مثبت او کوم یو بی منفي دی؟

a). $\log_{0,9}^{0,2}$

b). $\log_{0,3}^8$

c). $\log_2^{0,5}$

حل:

(a) جز: $\log_{0,9}^{0,2} > 0$ دی، ځکه چې $0,2 < 1$ او هم $0,9 < 1$ دی، یعنی دواړه په یو خوا قرار لري، په نتیجه کې ویلی شو، چې دغه لوگاریتم مثبت دی.

(b) جز: $\log_{0,3}^8 < 0$ دی، ځکه چې $8 > 1$ او $0,3 < 1$ دی، یعنی یو په یو خوا او بل یی په بله خوا قرار لري، په نتیجه کې ویلی شو، چې دغه لوگاریتم منفي دی.

(c) جز: $\log_2^{0,5} < 0$ دی، ځکه $0,5 < 1$ او $2 > 1$ دی، یعنی یو د بل په مختلف لوري سره قرار لري، په نتیجه کې ویلی شو، چې دغه لوگاریتم منفي دی. پنځلسم خاصیت lemma: که چېرې $\log_a^M = \log_a^N$ وي، نو $M=N$ دی.

$$\text{proof : } M = N \Leftrightarrow a^{\log_a^M} = a^{\log_a^N}$$

د طاقت د خاصیت نه په استفاده لرو، چې:

$$M = N \Leftrightarrow \log_a^M = \log_a^N$$

شپاړلسم خاصیت: که $a > 1$ او هم $N > M > 0$ وي، نو:

$$\log_a^N > \log_a^M$$

ثبوت:

که چېرې $N > M > 0$ وي، نو $\frac{N}{M} > 1$ دی او

$$\log_a^{\frac{N}{M}} = \log_a^N - \log_a^M > 0$$

اوله دې څخه لرو، چې:

$$\log_a^{\frac{N}{M}} \Rightarrow \log_a^N > \log_a^M$$

مثالونه:

د لوگاریتم قوانین عملي کول:

$$1). \log_2^{\frac{1}{8}} = \log_2^{\frac{1}{2^3}} = \log_2^{2^{-3}} = (-3)\log_2^2 = (-3).1 = -3$$

$$2). \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{4}} = \log_{2^{-\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2^2}} = \log_{2^{-\frac{1}{2}}}^{2^{-2}} = \frac{-2}{-\frac{1}{2}} \log_2^2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}.1 = 2.2 = 4$$

$$3). \log_{10}^{(20 \times 2)^y} - \log_{10}^{\left(\frac{1}{5} x^2 y\right)} = \log_{10}^{\left(\frac{20 x^2 y}{5 x^2 y}\right)} = \log_{10}^{\left(\frac{20}{1}\right)} = \log_{10}^{100} = \log_{10}^{(10)^2} = 2. \log_{10}^{10} = 2$$

$$4). \frac{\log_5^{16}}{\log_5^8 + \log_5^4} = \frac{\log_5^{16}}{\log_5^{8.4}} = \frac{10 \log_5^{16}}{\log_5^{32}} = \log_{32}^{16}$$

$$\left(\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \right)$$

$$= \log_{2^5}^{2^4} = \frac{4}{5} \log_2^2 = \frac{4}{5}$$

$$5). \log_a^{\left(\frac{\sqrt{3x-5}}{7x^3}\right)} = \log_a^{\sqrt{3x-5}} - \log_a^{7x^3} = \log_a^{(3x-5)^{\frac{1}{2}}} - [\log_a^7 + \log_a^{x^3}]$$

$$= \frac{1}{2} \log_a^{3x-5} - \log_a^7 - \log_a^{x^3} = \frac{1}{2} \log_a^{3x-5} - \log_a^7 - 3 \log_a^x$$

$$6). \log_a \left(\frac{5x^3}{y} \right)^3 = 3 \left[\log_a \frac{5x^3}{y} \right] = 3 [\log_a 5x^3 - \log_a y] = 3 [\log_a 5 + \log_a x^3 - \log_a y]$$

$$= 3 [\log_a 5 + 2\log_a x - \log_a y] = 3\log_a 5 + 6\log_a x - 3\log_a y$$

$$7). \frac{1}{2} \log_{10} x - 3 \log_{10} (x-1) = \log_{10} x^{\frac{1}{2}} - \log_{10} (x-1)^3 = \log_{10} \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^3}$$

$$8). 2\log(x+1) - \frac{1}{3}\log x + \frac{1}{3}\log y =$$

$$= \log(x+1)^2 - \frac{1}{3}(\log x - \log y)$$

$$= \log(x+1)^2 - \frac{1}{3} \left[\log \frac{x}{y} \right]$$

$$= \log(x+1)^2 - \log \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$$

$$= \log \left[\frac{(x+1)^2}{\sqrt[3]{\frac{x}{y}}} \right]$$

$$9). \frac{1}{\log_2^{12}} + \frac{1}{\log_6^{12}} = \log_{12}^2 + \log_{12}^6 \dots \dots \dots \left(\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b} \right)$$

$$10). \log_x (\sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[5]{x}) = \log_x \sqrt[3]{x^{15}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x = \log_x \sqrt[3]{x^{15+10+15}} = \log_x \sqrt[3]{x^{40}}$$

$$= \log_x^{21} = \log_x^{10} = \frac{7}{10} \log_x x = \frac{7}{10}$$

$$11). (49)^{\left[1 + \log_{49} \frac{1}{2} \right]} = (49)^{\left[\log_{49} 2 + \log_{49} \frac{1}{2} \right]} = 49^{\log_{49} 2} = \left(\frac{7}{2} \right)^{\log_{49} 49}$$

$$= \left(\frac{7}{2} \right)^{\log_{49} 2} = \left(\frac{7}{2} \right)^{2 \log_{49} 7} = \left(\frac{7}{2} \right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$12). (10)^{(2 \log 5 - 1)} = 10^{(2 \log 5 - \log 10)} = 10^{\log 5^2 - \log 10} = 10^{\log \frac{25}{10}}$$

$$= \frac{25}{10} \log 10 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$13). \frac{(\sqrt{3})^{(2 \log 5 - \log 7)}}{\left(\frac{5}{\sqrt{7}} \right)^{\log(0.3)}} = \frac{(\sqrt{3})^{\log 5^2 - \log 7}}{\left(\frac{5}{\sqrt{7}} \right)^{\log 0.3}} = \frac{(\sqrt{3})^{\log 25 - \log 7}}{\left(\frac{25}{7} \right)^{\log \sqrt{0.3}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{3})^{\log \frac{25}{7}}}{\left(\frac{25}{7}\right)^{\log \sqrt{0.3}}} = \frac{\left(\frac{25}{7}\right)^{\log \sqrt{3}}}{\left(\frac{25}{7}\right)^{\log \sqrt{0.3}}} \\
&= \left(\frac{25}{7}\right)^{\log \sqrt{3} - \log \sqrt{0.3}} = \left(\frac{25}{7}\right)^{\log \sqrt{\frac{3}{0.3}}} \\
&= \left(\frac{25}{7}\right)^{\log \frac{1}{\sqrt{0.1}}} = \left(\frac{25}{7}\right)^{\log 10^{\frac{1}{2}}} \\
&= \left(\frac{25}{7}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{7}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{25}} = \frac{\sqrt{7}}{5}
\end{aligned}$$

لاندې سوالونه او ځوابونه درکړل شوي، تاسې پر سوالونو عملیه اجرا کړئ او درکړل شوي ځوابونه مربوطه سوالونو ته په ځانه خالي کې ولیکئ؟

1). $5\log 2 + \log 3 - \log 8 = ?$ () $A = -4\log 2$

2). $\log_6^{2\sqrt{3}} + \log_6^{3\sqrt{2}} = ?$ () $B = \log 12$

3). $\log_{x\sqrt{x}}^{(x\sqrt[3]{x})} = ?$ () $C = 0$

4). $5^{(2\log_5^2 + 3\log_5^3)} = ?$ () $D = \frac{3}{2}$

5). $a^{\log_6^4} - b^{\log_6^4} = ?$ () $E = \frac{8}{9}$

6). $2^{\log_2^3} = ?$ () $F = 108$

7). $\log_y^x \cdot \log_m^y \cdot \log_x^m = ?$ () $G = \log\left(\frac{256}{3}\right)$

8). $\log \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = ?$ () $H = 1$

9). $\log 2^4 - \log 3 + \log 16 = ?$ () $I = 3$

10). $\sqrt{\log 2(0.5)^4} = ?$ () $J = \frac{1}{6}$

د لوگاریتم د خاصیتونو لنډیز

Property of Logarithm

1. $\log a^1 = 0$
2. $\log_a^{(x,y)} \Rightarrow \log_a^x + \log_a^y$
3. $\log_a^a = 1$
4. $\log_b^{b^r} = r$
6. $\log_b^{m^r} = r \cdot \log_b^m$
7. $\log_a^{b^n} = \frac{1}{n} \log_a^b$
8. $a^{\log_a^m} = m$
9. $\log_a^b \cdot \log_b^c \cdot \log_c^d \dots \log_n^m = \log_n^a$
10. $\log a^{\sqrt[n]{m}} = \frac{1}{n} \log_a^m$
11. $\log_N^m = \frac{\log_a^M}{\log_a^N}$
12. $\log_a^m = \frac{1}{\log_m^a}$
13. $\log a^{\frac{1}{A}} = -\log_a^A = \text{co} \log_a^A$
14. $\log a^{m^{\frac{1}{n}}} = \frac{n}{m} \log_a^x$
15. $\log a^{x^{\frac{1}{m}}} = \log a^{\frac{1}{m}}$
16. $\log_{a^m}^x = \log a^{x^{\frac{1}{m}}}$
17. $a^{\log_a^x - \log_a^y} = \frac{x}{y}$
18. $a^{\log_a^x + \log_a^y} = x \cdot y$
19. $a^{\log_a^x} = x^{\log_a^a}$

$$20. \log_a^b \cdot \log_b^a = 1$$

$$21. \frac{\log_a^m}{\log_{ab}^m} = 1 + \log_a^b$$

$$22. \log a^{\log_b^m} = m \Rightarrow x = c^{b^m}$$

$$23. \log_{ab}^c = \frac{1}{\log_c^a + \log_c^b}$$

$$24. \log_a^x = \log_a^y \Rightarrow x = y$$

$$25. \log_a^{\left(\frac{x}{y}\right)} = \log_a^x - \log_a^y$$

پاملرنه:

په لاندې ډول لیکل صحیح نه دي.

$$1. \log \frac{b^N}{a^N} \neq \log_b^M - \log_b^N$$

دا ځکه چې د بنې خوا نه موږ چې طرف لاسته نه شو راوړلی، گورو چې:

$$\log_b^M - \log_b^N \Rightarrow \log_b^{\left(\frac{M}{N}\right)}$$

نو بڼه داسې $\log \frac{b^N}{a^N} \neq \log_b^M - \log_b^N$ لیکل غلط دي.

$$2. \log_b^{(M+N)} \neq \log_b^M + \log_b^N$$

دا ځکه چې د بنې طرف نه چې طرف لاسته نه راځي.

ثبوت:

په بنې طرف د لوگاریتم خواص تطبیقوو، گورو که چېرې طرف ترلاسه راغی صحیح ده او که نه، نو غلط ده.

نوټ: جمع په ضرب بدلېږي:

$$\log_b^M + \log_b^N = \log_b^{(M.N)}$$

نو ثبوت شوه چې $\log_b^{(M+N)} \neq \log_b^M + \log_b^N$ لیکل غلط دي.

$$3. (\log_b^x)^2 \neq \log_b^{x^2}$$

دا ځکه چې د بنې طرف نه چې طرف لاسته نه راځي، د لوگاریتم د خواصو په تطبیقولو سره، اوس چېرې طرف د لوگاریتم خواص تطبیقوو، که چېرې چېرې

طرف ترې لاسته راغ، نو صحیح ده او که رانه غی، نو غلطه ده.

$$\log_b^{x^2} = 2 \cdot \log_b^x$$

نو ثبوت شوه چې:

$$(\log_b^x)^2 \neq \log_b^{x^2}$$

لاندې سوالونه څلور ځوابونه لري، تاسې په کې صحیح ځواب په لاس راوړئ؟

1. $\log_{10}^{0.0001} = ?$

- a). -4 b). 4 c). -3 d). 3

2. $\log_{\frac{1}{2}}^{8^{-3}} = ?$

- a). 3 b). -3 c). 9 d). 3

3. $\log_{10}^{(1000)^{\frac{2}{3}}} = ?$

- a). 3 b). -3 c). 5 d). -5

4. $\log_{\frac{1}{5}}^{(625)^{-4}} = ?$

- a). 4 b). $\frac{1}{5}$ c). -4 d). $-\frac{1}{5}$

5. $\log_b^{(y^2 \cdot b)} - \log_b^{y^2} = ?$

- a). 2 b). 1 c). -2 d). -1

6. $\log_{\frac{1}{76}}^8 = ?$

- a). $-\frac{3}{2}$ b). $\frac{1}{2}$ c). $\frac{3}{2}$ d). 3

7. $\log_{\frac{1}{36}}^{216} = ?$

- a). $\frac{3}{2}$ b). $-\frac{3}{2}$ c). 3 d). 2

د لوگاریتم د خواصو په اساس انکشاف ورکړئ؟

1. $\log_b^{u^2 v^7}$

2. $\log_b^{\frac{u}{vw}}$

3. $\log_b^{\sqrt[3]{x^2 - y^2}}$

4. $\log_4 \sqrt{\frac{x^2 y^3}{\sqrt{z}}}$

5. $\log_b^{n^{\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{1}{3}}}$

6. $\log_b \sqrt{n^2+1}$

7. $\log_b \sqrt[3]{\left(\frac{x}{y^2 \cdot z^3}\right)^3}$

8. $\log_b n^{\frac{\frac{2}{m}}{\frac{1}{n}}}$

9. $\log_b \frac{1}{a^2}$

10. $\log \frac{\sqrt[3]{n}}{p^2 q^3}$

11. $\log_b \frac{m^3}{n^3}$

12. $\log_2 \frac{1}{x^2}$

13. $\log_a \frac{m^3 n^3}{\sqrt{p}}$

پرلاندې مثالونو د حل شوي مثال په څېر عملیه اجرا کړئ؟
مثال:

$$\log_b^{u^2} - \log_b^v = \log_b^{\left(\frac{u^2}{v}\right)}$$

1. $2\log_b^x - \log_b^y = ?$

2. $\log_a^m - \log_a^n - \log_a^p = ?$

3. $9.\log_a^x + 2\log_a^y - \frac{1}{4}\log_a^z = ?$

4. $5.\left(\frac{1}{2}\log_b^m - 2\log_b^n\right) = ?$

5. $\frac{1}{8}(2.\log_b^x + 3\log_b^y) = ?$

6. $\log_b^w + \log_b^x - \log_b^y = ?$

7. $\frac{1}{3}\log_b^w - 3\log_b^x - 5.\log_b^y = ?$

8. $7(4\log_b^m + \frac{1}{3}\log_b^n) = ?$

9. $\frac{1}{3}(4\log_b^x - 2\log_b^y) = ?$

د لوگاریتم اقسام

Kind of Logarithm

۱. اعشاري يا برگس لوگاریتم:

هغه لوگاریتم ته وايي، چې قاعده يې لس (10) وي، د اعشاري لوگاریتم جدول په 1931 م کال د هانبریکس امريکايي رياضي دان له خوا ترتيب شوی دی، څرنگه چې د دغه لوگاریتم قاعده (10) ده، نو لیکلو ته ضرورت نه شته.

$$\log_{10}^x = \log x$$

۲. معمولي لوگاریتم:

هغه لوگاریتم ته وايي، چې قاعده يې يو کيفي عدد وي، دا چې کيفي هر عدد کېدای شي، نو په هر سوال کې مربوطه قاعده لیکل ضرور ده.

$$\log_a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

۳. طبيعي لوگاریتم يا نيپرين لوگاریتم:

هغه لوگاریتم ته وايي، چې قاعده (e) وي، دغه لوگاریتم په (1614) م کال د نيپرين انگلیسي رياضي دان له خوا کشف شوی، دغه لوگاریتم په لاندې ډول لیکل کېږي.

$$\log_e^x = \ln x$$

e يو غير نسبي عدد دی، چې د نيپرين عدد په نوم هم يادېږي، او تقريبي

قیمت یې په لاندې ډول سره دی.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.718281824$$

استعمال ځایونه:

د طبیعي لوگاریتم نه په عالي ریاضیاتو، ساینس، انجینري، تخنیک او طبابت کې ډېره ځای ته اخیستل کېږي. د اعشاري لوگاریتم او معمولي لوگاریتم څخه په بانکي، مالي، د راکټ په فیر، د اوازونو د سرعت په معلومولو، د زلزلې په اندازه او د محاسباتو په ساده کولو کې ډېره ځای ته اخیستل کېږي.

Table of Logarithm

Common Logarithm	Natural Logarithm
$\log x, y = \log x + \log y$	$\ln xy = \ln x + \ln y$
$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$	$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\log x^y = y \cdot \log x$	$\ln x^y = y \cdot \ln x$
$\log \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \log x$	$\ln \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \ln x$
$\log x = \log y \text{ if } x = y$	$\ln y = \ln x \text{ if } x = y$

د $\ln x$ او $\log x$ ترمینځ رابطه

د $\ln$ او $\log$ یو د بل له جنسه پیدا کول:

مخکې ثبوت شو، چې $\log_a^x = \log_b^x \cdot \log_a^b$ اوس که چېرې a او b مثبت عددونه او a, b خلاف د یو وي، که چېرې $a=10$ او $b=e$ وضع کړو، نو لرو چې:

دا چې وي، $e = 2,71828281$ نو:

$$\log_{10}^x = \log_e^x \cdot \log_{10}^e \Rightarrow \log x = \ln x \cdot \log e$$

فورمول:

$$\Rightarrow \log x = 0,4343 \cdot \ln x$$

نو:

او یا که د مساوات دواړه خواوې په 0,4343 تقسیم کړو، نو:

$$\log x = 0,4343 \ln x \Rightarrow \frac{1}{0,4343} \cdot \log x = \frac{0,4343}{0,4343} \ln x$$

$$\Rightarrow 2,3026 \log x = \ln x$$

فورمول:

$$\Rightarrow \ln x = 2,3026 \log x$$

د ذکر شوو فورمولونو په واسطه کولی شو، چې د لسو د قاعدې د یو عدد لوگاریتم د e قاعدې ته او د e قاعدې د یو عدد لوگاریتم د لسو قاعدې ته تبدیل کړو.

مثال: $\ln 4,69 = 0,6712$ پیدا کریں، داسی چپ $\log 4,69 = 0,6712$
 حل: د $\ln x = 2,3026 \log x$ فورمول خنہ استفادہ کوو.

$$\ln 4,69 = 2,3026 \log 4,69 \Rightarrow$$

$$\ln 4,69 = 2,3026 \cdot 0,6712$$

$$\ln 4,69 = 1,5455$$

مثال: $\ln 8910$ پیدا کریں؟

$$\ln x = 2,3026 \log x \quad \ln 8910 = 2,3026 \cdot \log 8910$$

$$\Rightarrow \ln 8910 = 2,3026 \cdot \log 8,91 \cdot 10^3 \Rightarrow \ln 8910 = 2,3026 \cdot \log 8,91 + \log 10^3$$

$$\ln 8910 = 2,3026 (\log 8,91 + 3 \log 10) \Rightarrow 2,3026 (0,9499 + 3) = 9,095$$

مثال: تاسی $\ln 70,9 = 1,8506$ پیدا کریں، پھہ صورت کی چپ $\log 70,9 = 1,8506$
 وی؟

$$\ln 70,9 = 2,3026 \cdot \log 70,9 \Rightarrow 2,3026 \cdot 1,8506 = 4,25981$$

$$\ln 70,9 = 4,25981$$

مثال: تاسی $\ln 15$ پیدا کریں، داسی چپ $\log 15 = 1,17609$

$$\ln 15 = 2,3026 \cdot \log 15 = 2,3026 \cdot 1,1709 = 2,69611434$$

$$\ln 15 = 2,69611434$$

مثال: $\ln(\frac{3}{4})$ پیدا کریں، داسی چپ $\log(\frac{3}{4}) = -0,12486$ وی.

$$\ln(\frac{3}{4}) = 2,3026 \cdot \log(\frac{3}{4}) = 2,3026 \cdot (-0,12486) = -0,287502$$

$$\ln(\frac{3}{4}) = -0,287502$$

مثال: کہ $\ln 11 = 2,3978952$ وی، $\log 11 = ?$ پیدا کریں؟

$$\log 11 = 0,4343 \cdot \ln x = 0,4343 \cdot 2,3978952$$

$$\log 11 = 1,04140589$$

مثال: کہ $\log_{10}^1 = 0$ وی، نو $\ln_e^1 = ?$ ده.

$$\ln_e^1 = 2,3026 \cdot \log_{10}^1 = 2,3026 \cdot 0 = 0$$

$$\ln_e^1 = 0$$

مثال: $\ln 10^4 = 9,2104$ ده، نو $\log 10^4 = ?$ پیدا کریں؟

$$\log 10^4 = 0,4343 \cdot \ln 10^4 = 0,4343 \cdot 9,2104 = 4,0007$$

مثال: $\log 10^4 = 4$ ده، نو $\ln 10^4 = ?$ پیدا کریں؟

$$\ln 10^4 = 2,3026. \log 10^4 = 2,3026.4 = 9,2104$$

$$\ln 10^4 = 9,2104$$

تمرین:

۱. د $\log 6,73 - 1,906$ قیمت پیدا کریں، داسی چہ $\ln 6,73 - 1,906$ وی؟

۲. د $\ln 481 = ?$ قیمت پیدا کریں، داسی چہ $\log 481 = 2,6821$ وی؟

۳. د $\ln(48100) = 4,6821$ قیمت پیدا کریں، داسی چہ $\log 48100 = 4,6821$ وی؟

۴. د $\ln 0,0481 = \bar{2},6821$ قیمت پیدا کریں، داسی چہ $\log 0,0481 = \bar{2},6821$ وی؟

انتي لوگاریتم Anti Logarithm

هر عدد د خپل لوگاریتم انتي لوگاریتم دی.

مثلاً؛ $\log 1000 = 3$ دی، نو $\text{Anti} \log 3 = 1000$ دی.

عمومي قاعده:

که چېرې $\log_a x = y$ وي، نو x د y انتي لوگاریتم دی.

$$\log_a x = y \Rightarrow y = \text{Anti} \log x$$

د انتي لوگاریتم پیدا کول:

که د یوه عدد لوگاریتم را کړل شوی وي او وغواړو چې انتي لوگاریتم یې پیدا کړو، نو مانتیس یې په جدول کې پیدا کوو.

هغه عدد چې د مانتیس د ستون او د N په کرښه واقع دی، لیکو او هغه رقمونه چې د مانتیس د کرښې او د N په ستون کې واقع دی، وروسته یې لیکو، په دې ترتیب هغه رقمونه او د هغوی ترتیب پیدا کېږي، چې لوگاریتم یې نیول شوی وي.

بیا کرکترستیک ته گورو، کرکترستیک د انتي لوگاریتم د رقمونو څخه یو کم دی او که کرکترستیک منفي وو، نو د اعشاریې د علامې د دواړو خواوو د صفرونو د شمېر سره مساوي دي، یو صفر د اعشاریې د علامې چې خواته او نورې ښي خواته دي.

مثال: $\text{Anti} \log 4,6590 = ?$

د $0,6590$ یو لوگاریتم په جدول کې پیدا کوو، په ستون کې یې 6 او په کرښه کې یې 45 دی، 6 په یويز مرتبه کې او 45 ورپسې لیکو، چې 456 ورته

جوړېږي.

بیا کرکترستیک ته گورو، کرکترستیک یې 4 دی، نو هغه عدد چې لوگاریتم یې نیول شوی دی، رقمونه یې پنځه دي، نو 456 مخې ته دوه صفرونه لیکو، چې 45600 په لاس راځي.

یعنې: $\text{Antilog } 4,5690 = 45600$ دی.

مثال: $\log 3,3598$ پیدا کړئ؟

حل: 0,3598 په جدول کې پیدا کوو، د 0,3598 په ستون کې 9 او په کرښه کې یې 22 دی، نو 229 هغه رقمونه دي، چې مانتیس 0,3598 دی، بیا کرکترستیک ته گورو، کرکترستیک یې 3- دی، نو عدد اعشاري دی او د اعشاري د علامې دواړو خواوو ته یې 3 صفرونه ږدو، نو:

$$\text{Antilog } 3,3598 = 0,00229$$

مثال: $\text{Antilog}(-5,2628)$ پیدا کړئ؟

حل: د 5- څخه (+1) منفي کوو او د (-0,2628) سره (+1) جمع کوو، په نتیجه کې کرکترستیک (-6) او مانتیس یې 0,7372+ په جدول کې پیدا کوو، په نتیجه کې 549 کېږي، ددې رقمو شاته د اعشاري د علامې دواړو خواوو ته 6 صفرونه ږدو.

$$\text{Antilog}(-5,2628) = 0,00000546$$

مثال: $\log x = 3,9939$ را کړل شوی دی، نو x یې پیدا کړئ؟

حل: ددې عدد کرکترستیک 3 دی، نو x باید څلور رقمي عدد ولرو، څرنگه چې 0,9939 په جدول کې په 9,8 سطر او 6 ستون کې واقع دی، نو:

$$\log x = 3,9939 \Rightarrow x = 9860 \Rightarrow \log 9860 = 3,9939$$

$$\text{Antilog } 3,9939 = 9860$$

مثال: $\log N = 3,82530$ دی، د N قیمت پیدا کړئ؟

حل: څرنگه چې کرکترستیک 3 دی، نو مطلوب عدد باید څلور رقمي وي او د را کړل شوي عدد مانتیس په 668 سطر او 8 ستون کې پروت دی، نو لیکو

چې:

$$\log N = 3,82530 \Rightarrow N = 6688$$

مثال: د 3,8182 انتي لوگاریتم پیدا کړئ؟

حل: د 0,8182 په ستون کې د N په کرښه کې (8) او د 0,8182 په کرښه او د N په ستون کې 6,5 لیکل شوی دی، نو د هغه عدد رقمونه چې لوگاریتم یې نیول شوی 658 دی، بیا کرکترسټیک ته ګوروو کرکترسټیک (3) دی، نو عدد څلور رقمه دی، یعنې $Antilog 3,8182$ عبارت د 6580 څخه دی، نو:

$$Antilog 3,8182 = 6580$$

انتی لوگاریتم یې پیدا کړئ؟

1. $x = antilog 3,3214$
2. $x = antilog 4,5436$
3. $x = antilog 5,7180$
4. $x = antilog 2,4935$
5. $x = antilog \bar{1},4982$
6. $x = antilog 4,8972$
7. $x = antilog \bar{4},4256$
8. $x = antilog 2,23852$
9. $x = antilog 0,5093$
10. $x = antilog (-5,5744)$
11. $x = antilog (-4,3645)$
12. $x = antilog 2,4416$
13. $x = antilog 2,5946$
14. $x = antilog 5,7180$

کرکترستیک او مانتیس

راکړل شوی عدد په عملي ډول (Scientific Notation) لیکو:

مثلاً؛ که x یو مثبت عدد وي، نو $x = S \cdot 10^n$

په پورته مساوات کې $1 \leq S < 10$ او n یو تام عدد دی.

$$\log x = \log(S \cdot 10^n) \Rightarrow \log x = \log S + \log 10^n \Rightarrow \log x = \log S + n \cdot \log 10$$

$$\log x = \log S + n \cdot 1 \Rightarrow \log x = n + \log S$$

په پورته مساوات کې $\log S$ په لاندې ډول پیدا کېږي.

$$\log 1 \leq \log S < \log 10$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$0 \leq \log S < 1$$

لیدل کېږي، چې $\log x$ او n مجموعه ده، د $\log S$ کسري برخه (Mantissa) مانتیس او n یو تام عدد، چې د $\log x$ د صحیح یا مشخصي یا کرکترستیک (Characteristic) په نوم یادېږي.

یا په بل عبارت سره د یوه عدد لوگاریتم دوه برخې لري، یوه برخه یې صحیح او بله برخه یې اعشاري ده، صحیح برخې ته یې کرکترستیک (Characteristic) او اعشاري برخې ته یې مانتیس وايي.

کرکترستیک د محاسبې په واسطه پیدا کېږي او مانتیس د حساب ماشین یا د لوگاریتم د جدول له مخې پیدا کېږي.

$$\log x = \text{کرکترستیک} + \text{مانتیس}$$

د کرکترستیک یا مشخصې ټاکل په اعشاري لوگاریتم:

Finding the Characteristic of a Common Logarithm

د یو عدد د لوگاریتم مشخصه (کرکترستیک) د لاندې دوو قاعدو (اصولو) له مخې ټاکل کېږي.

۱. د هغه عدد کرکترستیک چې د یوه څخه لوی وي، د عدد د صحیح برخې د رقمونو له شمېر څخه یو کم دی، که عدد په صحیح برخه کې n رقمونه ولري، نو کرکترستیک به یې د $(n-1)$ سره مساوي وي.

۲. د هغه عدد کرکترستیک چې له یوه څخه کوچنی د صفر او یو تر مینځ وي، د هغو صفرونو له شمېر څخه یو زیات دی، کوم چې د اعشاري علامې او د اعشاري برخې د کینې خوا د لومړي رقم په مینځ کې وجود لري، خو علامه یې منفي ده، که د نوموړو صفرونو شمېر n وي، نو کرکترستیک یې $-(n+1)$ دی، له صفر څخه کوچنی یعنې د منفي عدد لوگاریتم نه لري.

مثال: که چېرې P یو عدد او n د صحیحو رقمونو شمېر وي، نو:

$$10^{n-1} < P < 10^n$$

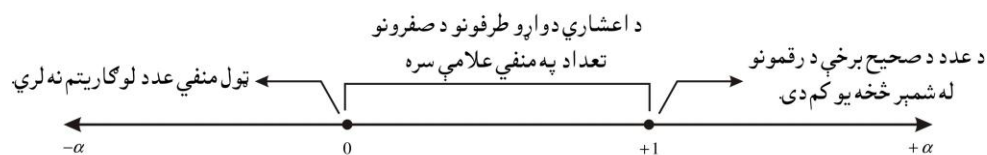
که چېرې د ټولو طرفونو څخه لوگاریتم ونیسو، نو $\log 10^{n-1} < \log P < \log 10^n$

$$n-1 < \log P < n$$

دا چې د n او $(n-1)$ عددونو تر مینځ کوم عدد وجود نه لري، نو لهذا:

$$\log P = n-1 + \text{کسري عدد}$$

له دې څخه دا نتیجه لاس ته راځي، چې P کرکترستیک عدد چې لرونکی د n تامو عددونو عبارت دی، له $(n-1)$ څخه:



مثال: د $\log 814,6$ کرکترستیک (ch) وټاکئ؟

حل: دلته گورو چې د صحیح ارقامو شمېر 3 دی، نو د قاعدې مطابقت

کرکترستیک (Ch) یې $3-1=2$ دی.

مثال: د $\log 0,009$ کرکترستیک (Ch) وټاکئ؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0,009 &= \log 9 \cdot 10^{-3} = \log 9 + \log 10^{-3} \\ &= \log 9 - 3 \cdot \log 10 \Rightarrow \log 9 - 3\end{aligned}$$

نو کرکترستیک یې عبارت دی له 3- څخه.

یا همدا مثال حل په بله وینا سره:

دلته گورو $\log 0,009$ چې عدد د یو څخه کوچنی دی او دغه قسم عددونو کرکترستیک د اعشاري د علامې د بڼې خوا د صفرونو له شمېر څخه د یوه عدد په اندازه زیات دی، خو علامه منفي نیول کېږي.

په یاد مثال کې گورو، چې د اعشاري علامې نه بڼې خواته دوه صفرونه موجود دي، نو د قاعدې له مخې یو ورسره جمع کوو، چې درې عدد لاسته راځي، خو د قاعدې له مخې علامه ورته منفي نیسو، نو د $\log 0,009$ کرکترستیک عبارت دی له 3- څخه.

له تېرو مثالونو څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې عددونو کرکترستیک په لاس راوړو.

1.Ex: $\log 0,27 \Rightarrow \text{Characteristic} = -1$

2.Ex: $\log 0,0783 \Rightarrow Ch = -2$

3.Ex: $\log 0,0008 \Rightarrow Ch = -4$

4.Ex: $0,00005 \Rightarrow Ch = -5$

5.Ex: $\log 0,00000000321 = Ch = -11$

6.Ex: $\log 5 \Rightarrow Ch = 0$

7.Ex: $\log 12 \Rightarrow Ch = 1$

8.Ex: $\log 4,2 \Rightarrow Ch = 0$

9.Ex: $\log 49,7 \Rightarrow Ch = 1$

10.Ex: $\log 547,11 \Rightarrow Ch = 2$

11.Ex: $\log 2134632 = 3$

$$12.Ex: \log 10000000 \Rightarrow Ch = 6$$

$$13.Ex: \log 93,41 \Rightarrow ch = 1$$

$$14.Ex: \log 1,42305 \Rightarrow ch = 0$$

$$15.Ex: \log 0,010002 \Rightarrow ch = -2$$

$$16.Ex: \log 0,00004 \Rightarrow ch = -5$$

$$17.Ex: \log 8 \Rightarrow ch = 0$$

$$18.Ex: \log 3466 \Rightarrow ch = 3$$

$$19.Ex: \log 0,8 \Rightarrow ch = -1$$

$$20.Ex: \log 0,00008 \Rightarrow ch = -5$$

$$21.Ex: \log 33,02 \Rightarrow ch = 1$$

د مانتیس ټاکل:

مانتیس همېشه مثبت وي او د لوگاریتم په ټولو جدولونو کې مثبت حفظ او ترتیب شوی دی، که چېرې کوم مانتیس منفي په لاس راشي، نو ددې لپاره چې مانتیس مثبت شي، نو مانتیس سره یو جمع او له کرکترستیک سره یو تفریق کوو.

$$Ex: \log = -2,6198$$

دا چې مانتیس او کرکترستیک دواړه منفي دي، نو ددې لپاره چې مانتیس مثبت شي؛ لرو چې:

$$\log = -2,6198 \Rightarrow -0,6198 + (-2) \Rightarrow (-0,6198 + 1) + (-2 + 1)$$

$$\log x = 0,3802 - 3 \Rightarrow \bar{3},3802$$

نو اوس په دې ځای کرکترستیک منفي او مانتیس یې مثبت دی.

پاملرنه:

کرکترستیک کله مثبت او کله منفي وي، مگر مانتیس همېشه لپاره مثبت وي، خو کله چې په سوال کې منفي راکړل شوی وي، باید مثبت ته یې د پورته

طریقې په شان مثبت ته واړوو.

د اعدادو د لوگاریتمونو مشخصه یا کرکترستیک په خپله د عدد څخه په لاس راځي، حال دا چې اعشاري برخه د ترتیب شوو جدولونو له مخې چې څلور رقمي او پینځه رقمي ... دي په لاس راځي. د عددونو د لیکلو د علمي روش (طریقې) او د لوگاریتم د قوانینو څخه په استفادې سره هم کولای شو، د عددونو لوگاریتم لاس ته راوړو.

$$1). \log 0,035 = \log(3,5 \cdot 10^{-2}) \Rightarrow \log 3,5 + \log_{10}^{-2} = 0,5441 + (-2) \Rightarrow \bar{2},5441$$

$$2). \log 85300 \Rightarrow \log(8,33 \cdot 10^4) = \log 8,33 + \log 10^4 \Rightarrow 0,7657 + 4 \Rightarrow 4,7657$$

$$3). \log 0,00024 \Rightarrow \log(2,4 \cdot 10^{-4}) = \log 2,4 + \log 10^{-4} \Rightarrow 0,3802 + (-4) \Rightarrow \bar{4},3802$$

$$4). \log 0,000428 \Rightarrow \log(9,28 \cdot 10^{-5}) \Rightarrow \log 9,28 + \log 10^{-5} \Rightarrow 0,9675 + (-5) \Rightarrow \bar{5},9675$$

مثال: په هغه صورت کې چې $\log 9,28 = 0,9675$ وي، نو د لاندې عددونو لوگاریتم پیدا کړئ، البته د عملي روش نه ګټه پورته کړئ؟

$$a). \log 92800$$

$$b). \log 92,800$$

$$c). \log 0,00928$$

$$d). \log 0,0000928$$

حل:

د (a) جز حل:

$$a). \log 92800 \Rightarrow \log(9,28 \cdot 10^4) \Rightarrow \log 9,28 + \log 10^4 \Rightarrow 0,9675 + 4 \Rightarrow 4,9675$$

د (b) جز حل:

$$b). \log 92,800 \Rightarrow \log(9,28 \cdot 10) \Rightarrow \log 9,28 + \log 10 \Rightarrow 0,9675 + 1 \Rightarrow 1,9675$$

د (c) جز حل:

$$c). \log(9,28 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow \log 9,28 + \log 10^{-3} \Rightarrow 0,9675 + (-3) \Rightarrow \bar{3},9675 = -2,0325$$

د (d) جز حل:

$$d). \log 0,0000928 \Rightarrow \log(9,28 \cdot 10^{-5}) = \log 9,28 + \log 10^{-5} \\ \Rightarrow 0,9675 + (-5) \Rightarrow \bar{5},9675 \Rightarrow -4,0325$$

لاندې عددونه په علمي روش ولیکئ؟

- 1.) 789000
- 2.) 0.00521
- 3.) 6753102
- 4.) 405
- 5.) 8600000
- 6.) 0.00052
- 7.) 0,780905
- 8.) 0,00081202
- 9.) 0,00001111
- 10.) 10000

د لوگاریتم د جدول ترتیب

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots \quad (I)$$

په پورته رابطه کې د x پرځای $(-x)$ لیکو.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + \frac{(-x)^5}{5} - \frac{(-x)^6}{6} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots \quad (II)$$

اوس د (I) رابطې نه دویم (II) رابطه منفي کوو.

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots - (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \dots)$$

$$\ln \frac{(1+x)}{(1-x)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$\ln \frac{(1+x)}{(1-x)} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \dots$$

$$\ln \frac{(1+x)}{(1-x)} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots) \quad (III)$$

په (III) رابطه کې د x پرځای $\frac{1}{2n+1}$ وضع کوو.

$$\ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \frac{1}{7(2n+1)^7} + \dots \right) \quad (IV)$$

اوس نو که په (IV) رابطه کې د n پرځای (1) وضع کړو، نو $\ln 2$ کېږي.

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right)$$

$$\ln 2 = 0,693147180$$

اوس د $\ln 2$ د کمیت څخه $\log 2$ هم پیدا کولی شو.

$$\log 2 = 0,434294 \cdot \ln 2$$

$$\log 2 = 0,30103$$

که چپري د $n=2$ وضع کړو، نو $\ln 3$ لاسته راځي.

$$\ln \frac{1 + \frac{1}{2.2+1}}{1 - \frac{1}{2.2+1}} = 2 \left(\frac{1}{2.2+1} + \frac{1}{3(2.2+1)^3} + \frac{1}{5(2.2+1)^5} + \frac{1}{7(2.2+1)^7} + \dots \right)$$

$$\ln \frac{6}{5} = 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \dots \right)$$

$$\ln \frac{6}{4} = 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} + \dots \right)$$

$$\ln \frac{3}{2} = 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} + \dots \right)$$

$$\ln 3 - \ln 2 = 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} \right)$$

$$\ln 3 = \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} \right)$$

$$\ln 3 = 1,0986122$$

اوس $\log 3$ هم پيدا کولى شو.

$$\log 3 = 0,434294 \cdot \ln 3$$

$$\log 3 = 0,434294 \cdot 1,0986122 \Rightarrow \log 3 = 0,47712$$

اوس نو $\log 4$ د $\log 2$ څخه په اسانه پيدا کولى شو.

$$\log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot \log 2 = 2 \cdot 0,30103 = 0,60206$$

$$\log 4 = 0,60206$$

د $\log 5$ پيدا کولو لپاره $n=4$ وضع کوو، په (IV) رابطه کې.

$$\ln \frac{1 + \frac{1}{2.4+1}}{1 - \frac{1}{2.4+1}} = 2 \left(\frac{1}{2.4+1} + \frac{1}{3(2.3+1)^3} + \frac{1}{5(2.4+1)^5} + \frac{1}{7(2.4+1)^7} \right)$$

$$\ln \frac{10}{9} = 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \frac{1}{7.9^7} + \frac{1}{9.9^9} \right)$$

$$\ln 5 - \ln 4 = 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + \frac{1}{9 \cdot 9^9} \right)$$

$$\ln 5 = \ln 4 + 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + \frac{1}{9 \cdot 9^9} \right)$$

$$\ln 5 = 2 \cdot \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + \frac{1}{9 \cdot 9^9} \right)$$

$$\ln 5 = 2.0,693147180 + 2(0,11156)$$

$$\ln 5 = 1,386254360 + 0,22312$$

$$\ln 5 = 1,609414360 \Rightarrow \log 5 = 0434294.1,60941436 = 0,698466$$

$$\log 5 = 0,69896676$$

Log6 هم په اسانه د $\log 2$ او $\log 3$ نه پیدا کېږي.

$$\log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3$$

$$= 0,30103 + 047712$$

$$\log 6 = 0,77815$$

د $\log 7$ پیدا کولو لپاره په (IV) رابطه د n پر ځای 6 لیکو.

$$\ln \frac{6+1}{6} = 2 \left\{ \frac{1}{13} + \frac{1}{3 \cdot 13^3} + \frac{1}{5 \cdot 13^5} + \frac{1}{7 \cdot 13^7} + \frac{1}{9 \cdot 13^9} \right\}$$

$$\ln \frac{7}{6} = 2 \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3 \cdot 13^3} + \frac{1}{5 \cdot 13^5} + \frac{1}{7 \cdot 13^7} + \frac{1}{9 \cdot 13^9} \right)$$

$$\ln 7 - \ln 6 = 2 \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3 \cdot 13^3} + \frac{1}{5 \cdot 13^5} + \frac{1}{7 \cdot 13^7} + \frac{1}{9 \cdot 13^9} \right)$$

$$\ln 7 = \ln 6 + 2 \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3 \cdot 13^3} + \frac{1}{5 \cdot 13^5} + \frac{1}{7 \cdot 13^7} + \frac{1}{9 \cdot 13^9} \right)$$

$$\ln 7 = 0,84510$$

اوس نو $\log 7$ لاسته راوړو، له $\ln 7$ څخه.

$$\log 7 = 0,434294. \ln 7 = 0,434294.0,84510$$

$$\log 7 = 0,36702186$$

Log8 هم د $\log 2$ له جنسه په اسانه پیدا کولی شو.

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 = 3 \cdot 0,30103 = 0,90309$$

$$\log 8 = 0,90309$$

Log9 د $\log 3$ له جنسه اسانه پیدا کولی شو.

$$\log 9 = \log 3^2 = 2 \cdot \log 3 = 2 \cdot 0,47712 = 0,95424$$

$$\log 9 = 0,95424$$

Log10 د $\log 2$ او $\log 5$ له جنسه په اسانه پیدا کولی شو.

$$\log 10 = \log 2 \cdot 5 = \log 2 + \log 5 = 0,30103 + 0,69896676$$

$$\log 10 = 0,9999676 \sim 1$$

$$\log 10 = 1$$

معلومه شوه چې $\log 10 = 1$ دی.

په هم دې ترتیب د ټولو عددونو لوگاریتم پیدا کولی شو.

د لوگاریتم د جدول استعمال

د اعشاري لوگاریتم (برکس لوگاریتم) مانتیسونه محاسبه او په جدول کې لیکل شوي دي، ځینې جدولونه تر اوو، ځینې تر پینځو، ځینې تر څلورو او درېو اعشاري مرتبو پورې مانتیسونه لري، چې د همدې مرتبو له مخې جدولونه اووه رقمیز، پینځه رقمیز او داسې نور نومول کېږي، هغه جدول چې له ټولو نه زیات استعمالېږي، څلور رقمیز جدول دی.

۱. د پینځه رقمیز جدول د استعمال طریقه:

په دې جدول کې د یوه څلور رقمي عدد مانتیس د پیدا کولو لپاره د هغه د چې خوا درې رقمونه د عددونو په ستون (N) کې پیدا کوو او ورپسې څلورم رقم د جدول په سر (لومړي کرښه) کې پیدا کوو. هغه عدد چې په دې کرښه او نوموړي ستون کې واقع دي، د راکړل شوي عدد مانتیس دی.

مثال: د $\log 7545$ پیدا کولو لپاره د پینځه رقمیز جدول څخه استفاده کوو؟
حل: د راکړل شوي عدد کرکترسټیک 3 دی او مانتیس یې په جدول کې د 5 تر ستون لاندې په 754 کرښه کې 0,87766 دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\log 7545 = 3 + 0,87766$$

مثال: $\log 0,008743$ په لاس راوړئ؟

حل: د دې عدد کرکترسټیک 3- او مانتیس یې په 874 کرښه کې د 3 تر ستون لاندې 0,94166 دی، نو:

$$\log 0,0038743 = 0,94166 + (-3) = \bar{3},94166$$

۲. د خلور رقمیز جدول د استعمال طریقه:

په دې جدول کې د یوه درې رقمي عدد مانتیس د پیدا کولو لپاره د هغه د چپې خوا دوه رقمونه د (N) په ستون او درېم رقم یې د (N) په سطر کې پیدا کوو، چې ددې سطر او ستون تقاطع د را کړل شوي عدد مانتیس دی.

مثال: $\log 431$ په لاس راوړئ؟

حل: د دې عدد کرکترسټریک 2 دی او مانتیس یې په 41 کرښه کې د 3 ستون لاندې 0,1660 دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\log 431 = 2,6160$$

مثال: $\log 0,0452$ پیدا کړئ.

حل: ددې کرکترسټریک (-2) دی او مانتیس یې د جدول د 45 کرښه کې د 2 ستون لاندې (0,6551) دی، نو:

$$\log 0,0452 = \bar{2},6551$$

مثلاً د 386 لوگاریتم په لاس راوړو.

$$386 = 3,86 \cdot 10^2$$

$$\log 386 = \log(3,86 \cdot 10^2)$$

$$\Rightarrow \log 3,86 + \log 10^2$$

$$= \log 3,86 + 2$$

اوس $\log 3,86$ په جدول کې گورو او داسې یې په لاس راوړو.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,5	5563	5575	5587	5599	5611		5835		5658	
3,6						5623		5658		5670
3,7										
3,8	5789	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3,9										
40										

د چپ خوا دوه رقمه یعنې 3,8 د N په سطر کې او د (6) عدد د N په ستون

کې پیدا کوو.

هغه عدد چې د 3,8 د کرښې او د (6) ستون د تقاطع په ځای کې واقع وي، د 3,86 عدد لوگاریتم د مانتیس څخه عبارت دی، (لکه چې په جدول کې لیدل کېږي)، یعنې:

$$\log 3,86 = 0,5866$$

$$\log 386 = \log 3,86 + 2$$

$$\log 386 = 0,5866 + 2$$

$$\log 386 = 2,5866$$

لوگاریتمی افاده

Logarithmic Expressions

هره الجبري افاده او يا عدد چې له دې سره ($\log$) موجود وي، نود لوگاریتمی افادې په نوم یادېږي. د دې د ساده کولو لپاره د لوگاریتم د مربوطو قضیو څخه استفاده کېږي. د لوگاریتمی افادې د حل کولو لپاره باید کونښنوشي، چې وروستی نتیجه یې $\log_a a = 1$ شي، چې له دې څخه آخري ځواب لاسته راځي.

پاملرنه:

افاده (Expression): د حدونو د جمع او تفریق حالاتونو ته افاده وايي.

لکه؛ $\log_{12}^{36} + \log_{12}^4 - \log_5^5 = ?$ لوگاریتمی افاده

Logarithmic Expression

اسانه مثالونه

- 1). $\log_{10}^{100} = 2$
- 2). $\log_3^{81} = 4 \Rightarrow 3^4 = 81$
- 3). $\log_7^{49} = 2 \Rightarrow 7^2 = 49$
- 4). $\log_5^{25} = 2 \Rightarrow 5^2 = 25$
- 5). $\log_2^4 = 2 \Rightarrow 2^2 = 4$
- 6). $\log_{12}^{144} = 2 \Rightarrow 12^2 = 144$

$$7). \log_5^1 = 0 \Rightarrow 5^0 = 1$$

$$8). \log_5^{\frac{1}{5}} = -1 \Rightarrow \frac{1}{5} = 5^{-1}$$

$$9). \log_2^{0,002} = -3 \Rightarrow 0,002 = 2^{-3}$$

$$10). \log_{\sqrt{2}}^1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}^0 = 1$$

$$11). \log_{100}^{100} = 1 \Rightarrow 100 = 100^1$$

- 1). $\log_e^1 = 0$
- 2). $\log_e^{e^{2x+2}} = 2x + 2$
- 3). $e^{\log_e x^2 + 1} = x^2 + 1$
- 4). $\log_e^{e^{m+n}} = m + n$
- 5). $e^{\log_e(x^4 + 1)} = x^4 + 1$
- 6). $\log_b \frac{mn}{p^q} = \log_b^{mn} - \log_b^{pq} = \log_b^m + \log_b^n - (\log_b^p + \log_b^q)$
- 7). $\log_b^{(m,n)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} \log_b^{(m,n)} = \frac{2}{3} (\log_b^m + \log_b^n)$

Logarithm Expressions

- 1). $Ex : \log_{\frac{1}{5}}^{625^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{625}} = \log_{\frac{1}{5}}^{\left(\frac{1}{5}\right)^4} = 4 \cdot \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} = 4$
- 2). $Ex : \log_3^{(9 \cdot 27)} \Rightarrow \log_3^9 + \log_3^{27} \Rightarrow \log_3^{3^2} + \log_3^{3^3} \Rightarrow 2\log_3^3 + 3\log_3^3 \Rightarrow 2 + 3 = 5$
- 3). $Ex : \log_{10}^{(20x^2z)} - \log_{10}^{\left(\frac{1}{5}x^2z\right)} \Rightarrow \log_{10}^{\left(\frac{20x^2z}{\frac{1}{5}x^2z}\right)} \Rightarrow \log_{10}^{\frac{20}{\frac{1}{5}}} \Rightarrow \log_{10}^{100} = 8$
- 4). $Ex : \log_5^{(10y^2x)} - \log_5^{(2xy^2)} \Rightarrow \log_{50}^{\left(\frac{10y^2x}{2xy^2}\right)} = \log_5^5 = 1$
- 5). $Ex : \log_2^{8^{\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{3} \cdot \log_2^{2^3} = -\frac{1}{3} \cdot 3\log_2^2 = -1$
- 6). $Ex : \log_4^{\sqrt{256}} \Rightarrow \log_4^{(256)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_4^{4^4} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \log_4^4 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$
- 7). $Ex : \log_9^{27} \Rightarrow \frac{\log_3^{27}}{\log_3^9} = \frac{\log_3^3}{\log_3^{3^2}} = \frac{3 \cdot \log_3^3}{2 \cdot \log_3^3} = \frac{3}{2} = 1,5$
- 8). $Ex : \log_{10}^{(0,1)^5} \Rightarrow \log_{10}^{\left(\frac{1}{10}\right)^5} \Rightarrow \log_{10}^{10^{-5}} \Rightarrow 5 \cdot -1\log_{10}^{10} = -5$
- 9). $Ex : \log 0,0001 \Rightarrow \log_{10}^{\left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow \log_{10}^{-4} = -4$
- 10). $Ex : \log \frac{1}{1000} \Rightarrow \log \frac{1}{10^3} \Rightarrow \log 10^{-3} = -3$
- 11). $Ex : \ln(e, e, e) \Rightarrow \ln e + \ln e + \ln e = 1 + 1 + 1 = 3$
- 12). $Ex : \ln\left(\frac{1}{e \cdot e}\right) \Rightarrow \ln \frac{1}{e^2} \Rightarrow \ln e^{-2} = -2$
- 13). $Ex : \log \frac{1}{10^{-2}} \Rightarrow \log 10^2 = 2$
- 14). $Ex : \log 0,01 = \log 10^{-2} = -2$
- 15). $Ex : \log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$
- 16). $Ex : \log_{10}^{100} + \log_{10}^{\frac{1}{10}} \Rightarrow \log_{10}^{\frac{100}{10}} = \log_{10}^{10} = 1$
- 17). $Ex : \log_{10}^5 + \log_{10}^{20} \Rightarrow \log_{10}^{5 \cdot 20} = \log_{10}^{100} = \log_{10}^{10^2} = 2$
- 18). $Ex : \log_{12}^{36} + \log_{12}^4 \Rightarrow \log_{12}^{36 \cdot 4} = \log_{12}^{144} \Rightarrow \log_{12}^{(12)^2} = 2$
- 19). $Ex : \log_a^{ax^2} - \log_a^{x^2} \Rightarrow \log_a^{\frac{ax^2}{x^2}} \Rightarrow \log_a^a = 1$
- 20). $Ex : \log_{10}^{0,001} \Rightarrow \log_{10}^{0,00110^3} \Rightarrow \log_{10}^{1 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \log_{10}^1 + \log_{10}^{-3} = 0 - 3 = -3$
- 21). $Ex : \log_{\frac{1}{2}}^{8^3} \Rightarrow -1 \cdot \log_2^{8^3} \Rightarrow -1 \cdot \log_2^{(2^3)^3} \Rightarrow -1 \cdot \log_2^{2^9} \Rightarrow -1 \cdot 9 \cdot \log_2^2 = -9$

$$22). Ex : \log_{\frac{1}{5}}^{625^4} = \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{625}} = \log_{\frac{1}{5}}^{\left(\frac{1}{5}\right)^4} = 4.1 = 4$$

$$23). Ex : \log_{16}^{32} = \log_{2^4}^{2^5} = \frac{5}{4} \log_2^2 = \frac{5}{2}$$

$$24). Ex : \log_3^{81} = \log_3^{3^4} = 4. \log_3^3 = 4$$

$$25). Ex : \log_{0.01}^{0.001} = \log_{10^{-2}}^{10^{-3}} = \frac{-4}{-2} \log_{10}^{10} = 2$$

$$26). Ex : 10^{\log_{10}^{10} + \log_{10}^{\frac{9}{10}}} \Rightarrow 10^{\log_{10}^{\frac{9}{10}}} \Rightarrow 10^{\log_{10}^{\frac{90}{10}}} \Rightarrow 10^{\log_{10}^{\frac{45}{2}}} = \frac{45}{2} = 22,5$$

$$27). Ex : 5^{\log_5^7} = 7$$

$$28). Ex : 3,2^{\log_{3,2}^{100}} = 100$$

$$29). Ex : \log_3^{\frac{1}{9}} = \log_3^{3^{-2}} = -2$$

$$30). Ex : \log_8^{\sqrt[5]{8}} \Rightarrow \log_8^{8^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{5} \log_8^8 = \frac{1}{5}$$

$$31). \log_{\sqrt{5}}^{25} \Rightarrow \log_{5^{\frac{1}{2}}}^{5^2} = 2. \log_{5^{\frac{1}{2}}}^5 = 2. \frac{1}{\frac{1}{2}}. \log_5^5 = 2.2.1 = 4$$

- 1). $\log_{10}^{1000^{\frac{4}{3}}} = \log_{10}^{(10^3)^{\frac{4}{3}}} = \log_{10}^{10^4} = 4 \cdot \log_{10}^{10} = 4 \cdot 1 = 4$
- 2). $\log_2^{16} = \log_2^{2^4} = 4 \cdot \log_2^2 = 4 \cdot 1 = 4$
- 3). $\log_3^{81} = \log_3^{3^4} = 4 \cdot \log_3^3 = 4 \cdot 1 = 4$
- 4). $\log_5^{625} = \log_5^{5^4} = 4 \cdot \log_5^5 = 4 \cdot 1 = 4$
- 5). $\log_4^{256} = \log_4^{4^4} = 4 \cdot \log_4^4 = 4 \cdot 1 = 4$
- 6). $\log_3^{27} = \log_3^{3^3} = 3 \cdot \log_3^3 = 3 \cdot 1 = 3$
- 7). $\log_5^{125} = \log_5^{5^3} = 3 \cdot \log_5^5 = 3 \cdot 1 = 3$
- 8). $\log_2^8 = \log_2^{2^3} = 3 \cdot \log_2^2 = 3 \cdot 1 = 3$
- 9). $\log_{10}^{(100)^{\frac{3}{2}}} = \log_{10}^{(10^2)^{\frac{3}{2}}} = \log_{10}^{10^3} = 3 \cdot \log_{10}^{10} = 3 \cdot 1 = 3$
- 10). $\log_4^{64} = \log_4^{4^3} = 3 \cdot \log_4^4 = 3 \cdot 1 = 3$
- 11). $\log_2^4 = \log_2^{2^2} = 2 \cdot \log_2^2 = 2 \cdot 1 = 2$
- 12). $\log_5^{25} = \log_5^{5^2} = 2 \cdot \log_5^5 = 2 \cdot 1 = 2$
- 13). $\log_3^9 = \log_3^{3^2} = 2 \cdot \log_3^3 = 2 \cdot 1 = 2$
- 14). $\log_{216}^{1296} = \log_{6^3}^{6^4} = 4 \cdot \frac{1}{3} \log_6^6 = \frac{4}{3} \log_6^6 = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$
- 15). $\log_{\frac{1}{16}}^8 = \log_{\frac{1}{2^4}}^{2^3} = \log_{2^{-4}}^{2^3} = 2 \cdot -\frac{1}{2} \log_2^2 = -\frac{3}{2} \cdot \log_2^2 = \frac{-3}{2} \cdot 1 = \frac{-3}{2}$
- 16). $\log_{\frac{1}{36}}^{216} = \log_{6^{-2}}^{6^3} = -\frac{3}{2} \log_6^6 = \frac{-3}{2} \cdot 1 = \frac{-3}{2}$
- 17). $\log_{49}^7 = \log_{7^2}^7 = \frac{1}{2} \log_7^7 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
- 18). $\log_{84}^4 = \log_{4^3}^4 = \frac{1}{3} \log_4^4 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$
- 19). $\log_{64}^2 = \log_{2^6}^2 = \frac{1}{6} \log_2^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$
- 20). $\log_{10000}^{10} = \log_{10^4}^{10} = \frac{1}{4} \cdot \log_{10}^{10} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$
- 21). $\log_{125}^5 = \log_{5^3}^5 = \frac{1}{3} \log_5^5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$
- 22). $\log_3^{(9 \cdot 27)} = \log_3^{3^2} + \log_3^{3^3} = 2 \cdot \log_3^3 + 3 \cdot \log_3^3 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$
- 23). $\log_2^{\frac{1}{16}} = \log_2^{2^{-4}} = -4 \cdot \log_2^2 = -4 \cdot 1 = -4$
- 24). $\log_{10}^{\frac{1}{10^8}} = \log_{10}^{10^{-8}} = -8 \cdot \log_{10}^{10} = -8 \cdot 1 = -8$

$$25). \log_2^8 = \log_2^{2^3} = 3.\log_2^2 = 3.1 = 3$$

$$26). 2^{\log 4^x} \Rightarrow 2^{\log 2^{2x}} = 2^x$$

$$27). \log_4^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \log_{2^2}^{4^{-1}} = \frac{1}{2} \log_2^{2^{-2}} = \frac{-2}{2} \log_2^2 = -1$$

$$28). \log_7^8 - \log_7^2 + \log_7^3 \Rightarrow \log_7^{\frac{8}{2}} + \log_7^3 = \log_7^4 + \log_7^3 \Rightarrow \log_7^{4.3}$$

حل شوي مثالونه:

1). $\log_{10}^{0.001} = ?$

حل:

$$\log_{10}^{0.00110^3 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \log_{10}^{1 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \log_{10}^1 + \log_{10}^{10^{-3}} = 0 - 3\log_{10}^{10} \\ \Rightarrow 0 - 3 \cdot 1 = -3$$

2). $\log_3^{81} = ?$

حل:

$$\log_3^{81} \Rightarrow \log_3^{3^4} \Rightarrow 4 \cdot \log_3^3 \Rightarrow 4 \cdot 1 = 4$$

3). $\log_{0.01}^{0.001} = ?$

حل:

$$\log_{0.01}^{0.001} \Rightarrow \log_{10^{-2}}^{10^{-3}} \Rightarrow -3 \cdot \frac{1}{-2} \log_{10}^{10} \Rightarrow \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

4). $\log_{10}^{(100)^{\frac{3}{2}}} = ?$

حل:

$$\log_{10}^{(100)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \log_{10}^{(10^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \log_{10}^{10^3} \Rightarrow 3 \cdot \log_{10}^{10} \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3$$

5). $\log_{64}^{16} = ?$

حل:

$$\log_{64}^{16} = 2 \cdot \frac{1}{3} \log_4^4 \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \log_4^4 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

6). $\log_a^{ax^2} - \log_a^{x^2} = ?$

حل:

$$\log_a^{\frac{ax^2}{x^2}} \Rightarrow \log_a^a = 1$$

7). $\log_7^{\frac{63}{49}} = ?$

حل:

$$\begin{aligned}\log_7^{63} - \log_7^{49} &\Rightarrow \log_7^{7 \cdot 9} - \log_7^{7^2} \Rightarrow \log_7^7 + \log_7^9 - 2\log_7^7 \\ &\Rightarrow 1 + \log_7^9 - 2 \Rightarrow -1 + \log_7^9 \Rightarrow \log_7^9 - 1\end{aligned}$$

8). $\log_{\frac{1}{5}}^{(625)^{-1}} = ?$

حل:

$$\log_{\frac{1}{5}}^{\left(\frac{1}{5}\right)^4} \Rightarrow 4 \cdot \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} \Rightarrow 4 \cdot 1 = 4$$

9). $\log_{\frac{1}{2}}^{8^{-3}} = ?$

حل:

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}}^{(2^3)^{-3}} &\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{2^{-9}} \Rightarrow \log_{2^{-1}}^{2^{-9}} \Rightarrow -1\log_2^{2^{-9}} \Rightarrow -1 \cdot -9\log_2^2 \\ &\Rightarrow +9\log_2^2 \Rightarrow 9 \cdot 1 = 9\end{aligned}$$

10). $\log_{10}^{100} + \log_{10}^{\frac{1}{10}} = ?$

حل:

$$\log_{10}^{100} + \log_{10}^{\frac{1}{10}} \Rightarrow \log_{10}^{100 \cdot \frac{1}{10}} \Rightarrow \log_{10}^{\frac{100}{10}} = \log_{10}^{10} = 1$$

11). $\log_{10}^5 + \log_{10}^{20} = ?$

حل:

$$\log_{10}^{5 \cdot 20} \Rightarrow \log_{10}^{100} \Rightarrow \log_{10}^{10^2} \Rightarrow 2 \cdot \log_{10}^{10} = 2 \cdot 1 = 2$$

12). $\log_{12}^{6^2} + \log_{12}^{2^2} - \log_5^5 = ?$

حل:

$$\log_{12}^{6^2} + \log_{12}^{2^2} - \log_5^5 \Rightarrow 2 \cdot \log_{12}^6 + 2 \cdot \log_{12}^2 - \log_5^5 \Rightarrow 2(\log_{12}^6 + \log_{12}^2) - \log_5^5$$

$$\Rightarrow 2(\log_{12}^{6.2}) - 1 \Rightarrow 2(\log_{12}^{12}) - 1 \Rightarrow 2(1) - 1 \Rightarrow 2.1 - 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1$$

$$13). \log_5^{5x^2} = ?$$

حل:

$$\log_5^{5x^2} \Rightarrow \log_5^5 + \log_5^{x^2} \Rightarrow 1 + 2\log_5^x$$

$$14). -\log_n^{mp} + \log_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{mp}} = ?$$

حل:

$$-\log_n^{mp} + \log_{n^{-1}}^{(mp)^{-1}} \Rightarrow -\log_n^{mp} + -1. -1\log_n^{mp}$$

$$-\log_n^{mp} + \log_n^{mp} \Rightarrow 0$$

$$15). \log_{27}^{3c} = ?$$

حل: که $\log_3^c = 0,2$ Note: if

$$\log_{27}^{3c} \Rightarrow \log_{27}^3 + \log_{27}^c \Rightarrow \log_3^{3^1} + \log_{3^3}^c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\log_3^3 + \frac{1}{3}\log_3^c \Rightarrow \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{3}.0,2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{0,2}{3} \Rightarrow \frac{1+0,2}{3} \Rightarrow \frac{1,2}{3}$$

$$16). 9^{2\log_9^8} = ?$$

حل:

$$9^{2\log_9^8} \Rightarrow 9^{\log_9^{8^2}} \Rightarrow 8^2 = 64$$

$$17). \log_{27}^{(\frac{1}{3})^{18}} = ?$$

حل:

$$\log_{27}^{(3^{-1})^{18}} \Rightarrow \log_{3^3}^{3^{-18}} \Rightarrow -18. \frac{1}{3}\log_3^3 \Rightarrow \frac{-18}{3}.1 = -6$$

$$18). \log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10^0} = ?$$

حل:

$$\log_{10^{-1}}^{10^{-10}} \Rightarrow -10. -1\log_{10}^{10} \Rightarrow +10.1 = 10$$

$$19). \frac{\log_5^{125} + \log_{12}^{144}}{\log_{1000}^{10^6}} = ?$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{\log_5^{5^3} + \log_{12}^{12^2}}{\log_{10^3}^{10^6}} &\Rightarrow \frac{3.\log_5^5 + 3.\log_{12}^{12}}{6.\frac{1}{3}\log_{10}^{10}} = \frac{3.1 + 2.1}{\frac{6}{3}.1} \\ &\Rightarrow \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$20). \log_2^8 + \log_4^{16} + \log_3^{27} = ?$$

حل:

$$\begin{aligned} \log_2^{2^3} + \log_4^{4^2} + \log_3^{3^3} &\Rightarrow 3.\log_2^2 + 2.\log_4^4 + 3.\log_3^3 \\ &\Rightarrow 3.1 + 2.1 + 3.1 \Rightarrow 3 + 2 + 3 \Rightarrow 8 \end{aligned}$$

$$21). 1 + \log_n^{\frac{1}{n}} = ?$$

حل:

$$1 + \log_n^{\frac{1}{n}} \Rightarrow 1 + \log_n^{n^{-1}} \Rightarrow 1 - 1\log_n^n \Rightarrow 1 - 1.1 \Rightarrow 0$$

$$22). \log_{p^2}^{p^3} + \log_{\frac{1}{m}}^{\frac{m^2}{m}} = ?$$

حل:

$$\begin{aligned} \log_{p^2}^{p^3} + \log_{\frac{1}{m}}^{\frac{m^2}{m}} &\Rightarrow \frac{1}{2}.3\log_p^p + \log_{m^{-1}}^{m^1} \\ &\Rightarrow \frac{3}{2}.1 + -1.2 \Rightarrow \frac{3}{2} - 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

23). $\log_n^{n^2} + \log_m^{m^3} = ?$

حل:

$$\log_n^{n^2} + \log_m^{m^3} \Rightarrow 2.\log_n^n + 3.\log_m^m \Rightarrow 2.1 + 3.1 \Rightarrow 2 + 3 = 5$$

24). $a^{\frac{1}{2}\log_a^{16}} = ?$

حل:

$$a^{\frac{1}{2}\log_a^{16}} \Rightarrow a^{\log_a^{16} \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} \Rightarrow 4$$

25). $2^{1-\log_2^5} = ?$

حل:

$$\begin{aligned} 2^{1-\log_2^5} &\Rightarrow 2^1 - 2^{\log_2^5} \Rightarrow 2^1 \cdot \frac{1}{2^{\log_2^5}} \\ &\Rightarrow \frac{2}{2^{\log_2^5}} \Rightarrow \frac{2}{5} \end{aligned}$$

لاندې افادې ثبوت کړئ؟

$$Ex: \log_3^7 \cdot \log_5^3 \cdot \log_7^5 = ?$$

$$Solve: \log_3^7 \cdot \log_5^3 \cdot \log_7^5 = \log_3^7 \cdot \frac{\log_3^3 \cdot \log_3^5}{\log_3^5 \cdot \log_3^7} = \log_3^3 = 1$$

$$Ex: \log_{0,1}^{\sqrt{2}} \cdot \log_{\sqrt{3}}^{0,1} \cdot \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = ?$$

$$Solve: \log_{0,1}^{\sqrt{2}} \cdot \frac{\log_{0,1}^{0,1} \cdot \log_{0,1}^{\sqrt{3}}}{\log_{0,1}^{\sqrt{3}} \cdot \log_{0,1}^{\sqrt{2}}} = \log_{0,1}^{0,1} = 1$$

$$Ex: \log_b^a \cdot \log_c^b \cdot \log_a^c = ?$$

$$Solve: \log_b^a \cdot \frac{\log_b^b \cdot \log_b^c}{\log_b^c \cdot \log_b^a} = \log_b^b = 1$$

مثال: کہ $\log 2 = 0,3010$ او $\log 6 = 0,7782$ وي، $\log 12$ پیدا کړئ؟

$$\log 12 = \log 2.6 = \log 2 + \log 6 = 0,3010 + 0,7782$$

$$\log 12 = 1,0792$$

مثال: کہ $\log 6 = 0,7782$ او $\log 5 = 0,6990$ وي، نو $\log 30$ به څو وي؟

$$\log 30 = \log 6.5 = \log 6 + \log 5 = 0,7782 + 0,6990$$

$$\log 30 = 1,4772$$

مثال: کہ $\log 7 = 0,367021$ او $\log 4 = 0,60206$ وي، نو $\log \frac{4}{7}$ به څو وي؟

$$\log \frac{7}{4} = \log 7 - \log 4 = 0,367021 - 0,60206$$

$$\log \left(\frac{7}{4}\right) = -0,235039$$

مثال: کہ $\log 31 = 1,4914$ او $\log 17 = 1,2305$ وي، نو $\log \frac{31}{17}$ پیدا کړئ؟

$$\log \frac{31}{17} = \log 31 - \log 17 = 1,4914 - 1,2305 = 0,2609$$

$$\log \frac{31}{17} = 0,2609$$

مثال: کہ $\log_e^3 = 1,10$ او $\log_e^7 = 1,95$ کمیت ولري، نو د لاندې افادو کمیتونه پیدا کړئ؟

$$\text{find: } (A) \log_e^{\left(\frac{7}{3}\right)}$$

$$\text{Solution: } \log_e^{\left(\frac{7}{3}\right)} = \log_e^7 - \log_e^3 = 1,95 - 1,10 = 0,85$$

$$\text{find: } \log_e^{\sqrt[3]{21}} = \log_e^{(21)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \log_e^{(3,7)} = \frac{1}{3} (\log_e^3 + \log_e^7)$$

$$= \frac{1}{3} (1,95 + 1,10) = 1,02$$

مثال: کہ $\log_e^5 = 1,609$ او $\log_e^8 = 2,079$ کمیت ولري، نو تاسې د لاندې افادې

کمیتونه پیدا کړئ؟

$$\text{find: } \log_e^{\left(\frac{5^{10}}{8}\right)} = ?$$

$$\text{Solution: } \log_e^{\left(\frac{5^{10}}{8}\right)} = \log_e^{5^{10}} - \log_e^8 = 10 \cdot \log_e^5 - \log_e^8$$

$$= 10,1609 - 2,079 \Rightarrow 14,011$$

مثال: کہ $\log_e^5 = 1,609$ او $\log_e^8 = 2,079$ کمیت ولری، نو تاسی د لاندی افادی کمیت پیدا کری؟

$$\text{find: } \log_e^{\sqrt[5]{8}} = ?$$

$$\begin{aligned} \text{Solution: } \log_e^{\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{1}{5}}} &= \frac{1}{4} \cdot \log_e^{\left(\frac{8}{5}\right)} = \frac{1}{4} (\log_e^8 - \log_e^5) \\ &= \frac{1}{4} (2,079 - 1,609) = \frac{1}{4} (0,47) \Rightarrow 0,1175 \end{aligned}$$

مثال: لاندی مثال محاسبه کری؟

$$\text{Ex: } \log 5000 - \log \frac{1}{0,01} - \log_2^5 = ?$$

په داسی حال کې چې $\log 2 = 0,3010$ او $\log 5 = 0,6990$ وي.

$$\begin{aligned} \text{Solve: } \log 5 \cdot 10^3 - \log \frac{1}{10^{-2}} - \log_2^5 \\ \Rightarrow \log 5 + \log 10^3 - \log 10^2 - \frac{\log 5}{\log 2} = 0,6990 + 3 - 2 - \frac{0,6990}{0,3010} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0,6990 + 1 - 2,32 = -0,621$$

مثال: کہ $\log 5 = 0,6990$ وي، نو تاسی د $\log 25 + \log \sqrt{5} - \log 125$ پیدا کری؟

$$\begin{aligned} \text{Solve: } \log 5^2 - \log 5^{\frac{1}{2}} - \log 5^3 &= 2 \cdot \log 5 + \frac{1}{2} \cdot \log 5 - 3 \cdot \log 5 \\ \Rightarrow 2 \cdot 0,6990 + \frac{1}{2} \cdot 0,6990 - 3 \cdot 0,6990 &\Rightarrow 1,398 + 0,3495 - 2,097 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1,7475 - 2,097$$

$$\Rightarrow -0,3495$$

مثال: کہ $\log 3 = 0,4771$ او $\log 5 = 0,6990$ وي، نو $\log 16875$ محاسبه کری؟

$$\text{Solve: } \log 16875 = \log (27 \cdot 625) = \log 27 + \log 625$$

$$\Rightarrow \log 3^3 + \log 5^4 = 3 \cdot \log 3 + 4 \cdot \log 5$$

$$\Rightarrow 3(0,4771) + 4(0,6990) = 1,4313 + 2,796$$

$$\log 16875 = 4,495$$

که چهرې $\log_b^2 = 0,69$ او $\log_b^3 = 1,10$ او $\log_b^5 = 1,61$ وي، نوتاسې دلاندې افادو کمیتونه د دوی له مخې پیدا کړئ؟

- 1). $\log_b^{30} = ?$
- 2). $\log_b^{16} = ?$
- 3). $\log_b^{16} = ?$
- 4). $\log_b^{\sqrt[3]{2}} = ?$
- 5). $\log_b^{\sqrt{3}} = ?$
- 6). $\log_b^{\left(\frac{2}{5}\right)} = ?$
- 7). $\log_b^{\left(\frac{5}{3}\right)} = ?$
- 8). $\log_b^{\sqrt{0,9}} = ?$
- 9). $\log_b^{27} = ?$
- 10). $\log_b^{\sqrt[3]{1,5}} = ?$

کہ چہرے $\log 2 = 0,3010$ ، $\log 5 = 0,6990$ وي، نوتاسی دلاندي افادو
لوگاریتم محاسبہ کریں؟

1). $\log \frac{410}{16} - \log 41 = ?$

2). $3.\log 5 - \log 64 = ?$

3). $\log 27 = ?$

مثال:

$$\ln(e.e.e) = \ln e + \ln e + \ln e = 1 + 1 + 1 = 3$$

پورته مثال په لاندې طریقه هم حلولی شو:

$$\ln(e.e.e) = \ln e^3 = 3.\ln e = 3.1 = 3$$

مثال:

$$\ln \frac{1}{e.e} = ?$$

$$\ln \frac{1}{e.e} = \ln \frac{1}{e} + \ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} + \ln e^{-1} = -1.\ln e + (-1).\ln e$$

$$\Rightarrow -1.1 + (-1).1 = -1 - 1 = -2$$

پورته مثال په لاندې طریقه هم حلولی شو:

$$\ln \frac{1}{e.e} = \ln \frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2.\ln e = -2.1 = -2$$

مثال:

$$\ln 12e = ?$$

$$\ln 12e = \ln 12 + \ln e = \ln 12 + 1$$

$$\Rightarrow 1 + \ln 12$$

مثال:

$$\ln \frac{30}{e} = ?$$

$$\ln \frac{30}{e} = \ln 30 - \ln e = \ln 6.5 + 1$$

$$\Rightarrow \ln 6 + \ln 5 + 1$$

د لوگاریتمی افادو تمرینات

لاندې لوگاریتمی افاده محاسبه کړئ؟

- 1). $\log 30 + 1 - \log \sqrt[3]{100} = ?$
- 2). $\log \frac{7100}{64} - \log 71 = ?$
- 3). $\log_3^{\sqrt[3]{243}} - \log 100 + 2 = ?$
- 4). $\log_3^{\frac{1}{81}} + 5 = ?$
- 5). $(\log 4 + \log 8 - \log 16) - \log 2 = ?$
- 6). $\log_{10}^3 + \log_{10}^2 + \log_{10}^4 = ?$
- 7). $\log_2^6 + \log_2^5 - \log_2^{10} = ?$
- 8). $\log_4^3 + \log_4^2 = ?$
- 9). $\log_5^{250} - \log_5^2 = ?$
- 10). $\log_4^{32} + \log_4^2 = ?$
- 11). $\log_7^2 + \log_4^2 = ?$
- 12). $4 \cdot \log_5^2 - \log_5^8 = ?$
- 13). $\log_3^{405} - \log_3^5 = ?$
- 14). $\log_{25}^3 - \log_3^5 = ?$
- 15). $\log_7^8 - \log_7^2 + \log_7^3 = ?$
- 16). $\log_5^{24} - \log_5^{50} = ?$
- 17). $\log_8^2 + \log_8^4 = ?$
- 18). $\log_2^{25} - \log_2^5 = ?$

19). $5\log_3^2 - \log_3^4 + 2\log_3^5 = ?$

20). $\log 7 - \log 4 + \log 2 = ?$

21). $2\log_4^6 + \log_4^9 - 3\log_4^3$

22). $\log_8^2 + \log_8^4 + \log_8^1 = ?$

23). $2\log_7^4 - \log_7^4 = ?$

24). $4\log_2^3 - \log_2^9 + \log_2^7 = ?$

25). $6\log_3^2 + \log_3^4 - 3\log_3^2 = ?$

26). $\log_8^5 + \log_8^3 + \log_8^6 = ?$

27). $2\log 9 - \log 4 = ?$

28). $\log 11 + 4\log 8 = ?$

29). $\log 4 + \log 6 + \log 5 = ?$

30). $5\log_3^2 - \log_3^4 + \log_3^5 = ?$

31). $\log_3^{\sqrt{5}} = 5$

32). $\log 0,1 = -1$

33). $\log_{16}^{64} = \frac{3}{2}$

34). $\log_8^2 = \frac{1}{3}$

تمرین:

لاندې لوگاریتمی افادې سادہ کری؟

35). $\log 30 + 1 - \log \sqrt[5]{1000} = ?$

36). $(\log 4 + \log 8 - \log 16) - \log 2 = ?$

37). $\log_3^{\frac{1}{81}+5} = ?$

38). $\log \frac{4100}{64} - \log 71 = ?$

39). $\log_3^{\sqrt[2]{43}} - \log 100 + 2 = ?$

40). $\log 210(\log 32) - \log 21 = ?$

تمرین:

د لوگاریتم قوانین پرې تطبیق کړئ؟

$$1). \ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$$

$$2). \ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$$

$$3). \ln(\sqrt{e})^3$$

$$4). \ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$$

$$5). \ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$$

$$6). \log \frac{x^2 \cdot \sqrt{y}}{\sqrt{x^5} \cdot y^3}$$

$$7). \log_3 \sqrt[3]{\frac{xy^2}{m \cdot n}}$$

$$8). \log 8 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot y \cdot \sqrt[4]{x} \cdot p^2}$$

$$9). \log \frac{x^2 y^3}{p^2}$$

$$10). \frac{1}{5} \cdot \log(x+y) + \frac{1}{5} \log(x-y)^{-1}$$

$$11). \log x - \frac{1}{8} \log p + \frac{5}{2} \log y$$

$$12). \log x + m \cdot \log(x+y) + m \cdot \log(x-y)$$

$$13). \frac{1}{4} \log(x^2 - y^2) - \frac{1}{2} \log(x-y) - \frac{1}{2} \log(x+y)$$

$$14). \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - \frac{1}{3} \{ \log(x-y) + \log(x+y) \}$$

$$15). (\log x + 3 \log y)^{\frac{1}{3}} - (4 \log y - 2 \log p)^{\frac{1}{2}}$$

انترپولېشن

Interpolation

انترپولېشن په لغت کې پر بل عبارت اړولو ته وايي.

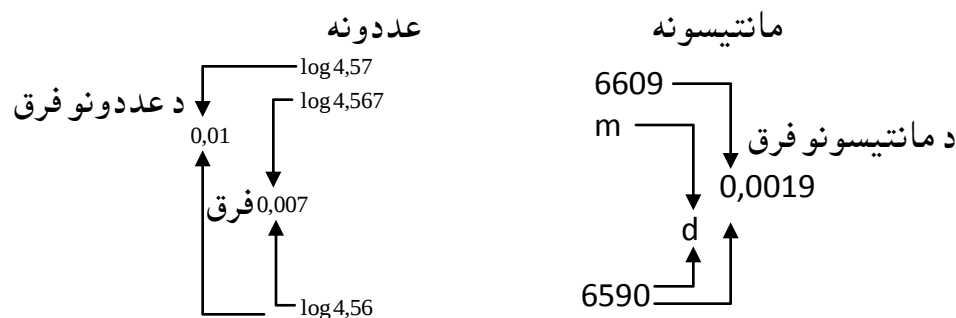
او په اصطلاح کې انترپولېشن د هغه طریقي نوم دی، چې د هغه اعدادو مانتیس پیدا کوي، کوم چې جدول یې ترتیب شوی نه وي. یاد یو عدد انټی لوگاریتم د پیدا کولو لپاره چې په لوگاریتمي جدول کې موجود نه وي، د انترپولېشن څخه کار اخلو.

طریقه:

د انترپولېشن په واسطه د یوه عدد د مانتیس پیدا کولو لپاره په جدول کې دوه پرلپسې عددونه چې یو عدد در کړل شوی عدد څخه زیات او بل ورڅخه کوچنی وي پیدا کوو.

بیاد دې دوو عددونو مانتیسونه له جدول څخه لاسته راوړو، بیاد عددونو او د هغوی د مانتیسونو له فرق څخه یو تناسب جوړوو، له دې تناسب څخه مجهول فرق پیدا کوو او د کوچني عدد له مانتیس سره یې جمع کوو، دغې د جمعې حاصل ته د را کړل شوي عدد مانتیس وايي.

د $\log 4567$ لوگاریتم مانتیس پیدا کړئ، په داسې حال کې چې ددې لوگاریتم مانتیس په جدول کې وجود نه لري.



$$\frac{0,007}{0,01} = \frac{d}{0,0019} \Rightarrow d = \frac{0,007 \cdot 0,0019}{0,01}$$

$$\Rightarrow d = \frac{7.19}{100000} \Rightarrow \frac{133}{100000} \Rightarrow d = 0,00133$$

$$m = 0,6590 + 0,0013 \Rightarrow m = 0,6603 \text{ مربوط مانتیس}$$

$$\log 4567 = 3,6603$$

مثال: $\log 2245,8$ مانتیس پیدا کریں، پہ داسی حال کی چپ ددی عدد مانتیس پہ جدول کی وجود نہ لری؟



$$\frac{x}{0,00019} = \frac{0,8}{1}$$

$$x = (0,8 \cdot 0,00019) \Rightarrow x = 0,000152$$

اوس د x قیمت د کوچنی عدد له مانتیس سره جمع کوو او یا یی د لوی عدد له مانتیس څخه تفریقوو.

$$m = 0,35122 + 0,000152 \Rightarrow 0,351372 \text{ دغه مانتیس دی}$$

$$\log 2245,8 = 4,351372$$

مانتیس + کرکترستیک = لوگاریتم

مثال: $\log 0,0007957$ پیدا کریں؟

$$\log 0,0007957 \Rightarrow \log 7,957 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \log 7,957 + \log 10^{-4}$$

$$\Rightarrow m - 4$$

دا چي $7,95 < 7,957 < 7,96$ نو m د لاندي جدول په استفادي سره پیدا کوو.

عددونه	مانتیسونه
t	$\log$
7,96	0,9009
7,957	m
7,95	0,9004
0,007	d

د عددونو فرق 0,01

د مانتیسونو فرق 0,0005

$$\Rightarrow \frac{0,007}{0,01} = \frac{d}{0,0005} \Rightarrow d = \frac{(0,007) \cdot (0,0005)}{0,01}$$

$$\Rightarrow d = 0,00035 \approx 0,0004$$

$$m = 0,9004 + d \Rightarrow 0,9004 + 0,0004 \Rightarrow 0,9008$$

$$\log 0,0007957 \Rightarrow 0,9008$$

$$\log 0,0007957 \Rightarrow 0,9008 - 4 \Rightarrow \bar{4},9008 \Rightarrow -3,0992$$

انټرپولېشن بله طریقه:

مثال: د 7453,27 عدد لوگاریتم غواړو پیدا کړو، کوم جدول په خپله وجود نه لري، د دې عدد نه لوی عدد مانتیس د جدول څخه راځلو او له دې د کوچني عدد مانتیس له جدول څخه راځلو او د عددونو او د دوی د مانتیسونو فرق پیدا کوو.

مانتیسونه	عددونه
0,87239	7454 لوی له 7453,27

0,78233	7453 کوچنی له 7453,27
---------	-----------------------

0,00006 د مانتیسونو فرق	1 د عددونو ترمینځ فرق
-------------------------	-----------------------

x	0,27 د کوچني عدد او خپله اصل عدد فرق
---	--------------------------------------

$$x = \frac{0,27 \cdot 0,00006}{1} \Rightarrow 0,0000162$$

دا چې د عددونو 0,27 دی، نو تفاوت مانتیس 0,0000162 ده، چې دغه د مانتیس تفاوت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو، چې د 7453,27 عدد حاصل په لاس راځي.

$$0,8723 + 0,0000162 \Rightarrow 0,8723462$$

چې دغه مانتیس د 7453,27 عدد دی.

دا چې اولنی عدد چې لوگاریتم یې هدف وو، عبارت دی له 745327 چې شپږ رقمي عدد دی، د دې عدد کرکترسټیک 5 دی، نو له دې ځایه نتیجه کېږي.

$$\log 745327 \Rightarrow 5,872362$$

مثال: $\log 8752,8$ پیدا کریں؟

حل: $8752,8$ عدد تقریباً 8752 او 8753 پہ مینخ کی موجود دی.

$$\begin{array}{r} 8753 \\ 8752 \\ \hline 1 \end{array}$$

$0,8$ د عدد فرق

$$\begin{array}{r} 94216 \\ 94211 \\ \hline 5 \end{array}$$

د مانتیسو نو فرق x

$$x = \frac{5,0,8}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

د 4 عدد د کوچنی عدد له مانتیس سره جمع کوو.

$$94211 + 4 = 94215$$

دا چي په خپله عدد $87,528$ دوه رقمي دی، نو کرکترستیک يي (1) دی،
نو لوگاریتم يي عبارت دی له:

$$\log 87,528 \approx 1,94215$$

که وغواړو چي د خلور رقمه عدد لوگاریتم پیدا کړو، نو دریم رقم
لوگاریتمی جدول په پام کې نیسو.

مثال: 3275 لوگاریتم په لاس راوړو.

پوهېږو چي:

$$3270 < 3275 < 3280$$

خرنگه چي د لوگاریتم په جدول کې 327 او 328 موجود دی، نو لیکو:

$$\left. \begin{array}{l} \log 3270 \\ \log 3275 \\ \log 3280 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \\ 10 \end{array} \left. \begin{array}{l} = 3,5145 \\ = x \\ = 3,5159 \end{array} \right\} \begin{array}{l} d \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} 0,0014$$

یعني لرو چي:

$$3275 - 3270 = 5$$

$$3280 - 3270 = 10$$

او:

$$3,5159 - 3,5145 = 0,0014$$

$$x - 3,5145 = d$$

او له دې ځايه لیکو چې:

$$\frac{5}{10} = \frac{d}{0,0014} \Rightarrow d = \frac{5}{10} \cdot 0,0014 = 0,0007$$

اوس که 0,0014 , 3,5145 سره جمع شي، په لاس راځي.

$$3,5145 + 0,0007 = 3,5152$$

يعنې د 3275 لوگاریتم عبارت دی له 3,5152

$$\log 3275 = 3,5152$$

مثال: د 31,76 عدد لوگاریتم په لاس راوړو.

لیکلی شو چې:

$$3170 < 3176 < 3180$$

$$\left. \begin{array}{l} \log 3,170 \\ \log 31,76 \\ \log 31,90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 \\ 10 \end{array} \left. \begin{array}{l} = 1,5011 \\ = x \\ = 1,5024 \end{array} \right\} d \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 0,0013$$

يعنې:

$$\frac{6}{10} = \frac{d}{0,0013} \Rightarrow d = \frac{6}{10} \cdot 0,0013$$

نو:

$$1,5011 + 0,0008 = 1,5019$$

او په دې ډول لرو:

$$\log 31,76 = 1,5019$$

که وغواړو چې د پینځه رقمي عدد لوگاریتم په لاس راوړو، نو د څلور رقمي لوگاریتمي جدول څخه استفاده کوو.

مثال: د 51826 لوگاریتم محاسبه کړئ؟

حل: گورو چې:

$$51800 < 51826 < 51900$$

دی او څرگنده ده، چې:

$$\left. \begin{array}{l} \log 51800 \\ \log 51826 \\ \log 51900 \end{array} \right\} 26 \left\{ \begin{array}{l} = 4,7143 \\ = x \\ = 4,7152 \end{array} \right\} d \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 0,0009$$

په دې ډول لرو چې:

$$\frac{26}{100} = \frac{d}{0,0009} \Rightarrow d = \frac{26}{100} \cdot 0,0009$$

اوس که 0,0002 د 4,7143 سره جمع کړو، په لاس راوړو.

$$4,7143 + 0,0002 = 4,7145$$

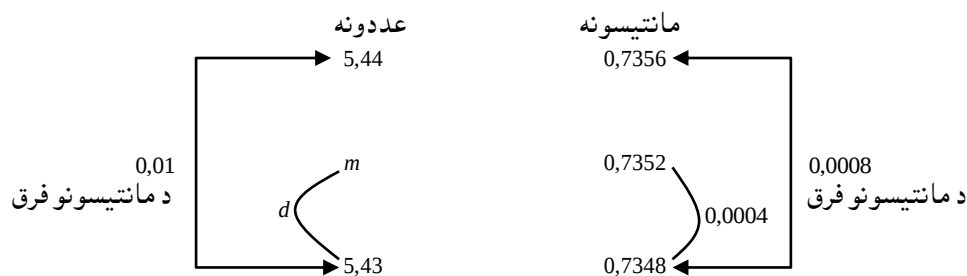
نو د ورکړل شوي عدد لوگاریتم دا دی:

$$\log 51826 = 4,7145$$

د انټرپولېشن په واسطه د انټي لوگاریتم پیدا کول

د انټي لوگاریتم د پیدا کولو لپاره مانتیس په جدول کې لټوو، که مانتیس په جدول کې نه وو، نو د دغه مانتیس انټي لوگاریتم په یوه حرف ښیو، د مانتیس نه ښکته او پورته مانتیسونه په جدول کې پیدا کوو، شپږ عددونه چې یو یې مجهول او نور پینځه یې معلوم دي لاسته راځي، دوه دوه عددونه یوله بل څخه منفي کوو، چې څلور عددونه لاس ته راځي، چې یو یې مجهول او درې یې معلوم دي، د تناسب په واسطه مجهول عدد پیدا کوو، بالاخره د راکړل شوي مانتیس انټي لوگاریتم پیدا کېږي.

مثال: $\text{Anti log} = 3,7352$ پیدا کړئ؟



$$\frac{d}{0,01} = \frac{0,0004}{0,0008} \Rightarrow \frac{d}{0,01} = \frac{4}{8}$$

$$\Rightarrow d = \frac{4 \cdot 0,01}{8} \Rightarrow d = \frac{4}{800} \Rightarrow d = 0,005$$

$$m = 0,005 + 5,43 \Rightarrow 5,435$$

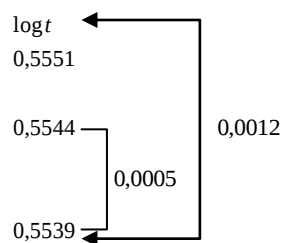
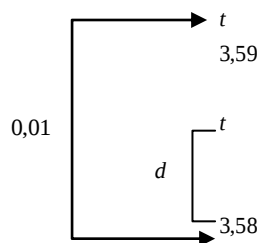
$$\text{Anti log } 3,7352 = 5,435$$

مثال: د 4,5544 عدد انتي لوگاریتم پیدا کړئ؟

$$x = \text{anti log } 4,5544$$

$$\log x = 4,5544 \Rightarrow 0,5544$$

0,5544 په جدول کې نشته، خو 0,5539 او 0,5551 په جدول کې شته، د دغو عددونو انتي لوگاریتم پیدا کوو، د دغه عددونو او انټرپولېشن په مرسته د x قیمت پیدا کوو.



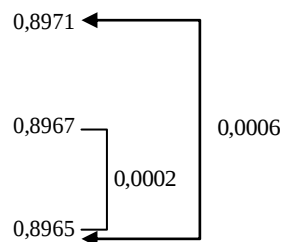
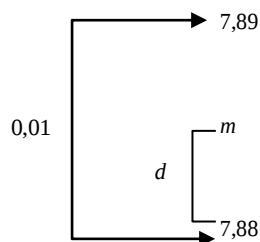
$$\frac{d}{0,01} = \frac{0,0005}{0,0012} \Rightarrow d = 0,0042$$

$$t = 3,58 + d \Rightarrow 3,58 + 0,0042 \Rightarrow 3,5842$$

$$\log x = \log(3,5842 \cdot 10^4) \Rightarrow \log 35842$$

$$x = 35842$$

مثال: $\text{Anti log } 5,8967$ پیدا کړئ؟



$$\frac{d}{0,01} = \frac{0,0002}{0,0006} \Rightarrow \frac{d}{0,01} = \frac{2}{6} \Rightarrow d = \frac{2 \cdot 0,01}{6} = \frac{2}{600} = \frac{1}{300}$$

$$d = 0,03$$

$$m = 0,03 + 7,88 \Rightarrow 7,883$$

دا چې کرکترسټیک (5) دی، نو انتي لوگاریتم صحیح عدد دی او د ارقامو شمېر (6) دی، یعنې

$$\text{Anti log } 5,8967 = 788300$$

مثال: $\log N = 4,4713$ وي، نو N په لاس راوړو.

حل: څرگنده ده، چې په دې مثال کې مانتیس 0,4713 دی، هغه عدد چې په لوگاریتمي جدول کې د 0,4713 سره مطابقت کوي، 296 دی او څرنگه چې مشخصه 4 ده، نو باید ورکړل شوي عدد (5) رقمي وي. یعنې:

$$N = 29600$$

مثال: که $\log N = 2,6459$ وي، نو N په لاس راوړو.

حل: څرنگه چې 0,6459 مستقیم په لوگاریتمي جدول کې وجود نه لري، نو بنکاره ده، چې په جدول کې نوموړی عدد داسې موقعیت لري.

$$6454 < 6459 < 6466$$

نو پوهېږو چې:

$$\left. \begin{array}{l} \log 442 \\ \log N \\ \log 443 \end{array} \right\} \times \left. \begin{array}{l} = 2,6454 \\ = 2,6459 \\ = 2,6464 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 0,0005 \\ \\ \end{array} \right\} 0,001$$

$$\Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{5}{10} \Rightarrow x = 0,5$$

په دې ډول لرو، چې:

$$N = 442 + 0,5 \Rightarrow 442,5$$

مثال: د 1,9358 انتي لوگاریتم په لاس راوړو.
 حل: څرنگه چې 0,9358 مستقیما په جدول کې نشته دی او لیدل کېږي،
 چې:

$$9355 < 9358 < 9360$$

$$\left. \begin{array}{l} \log 862 \\ \log N \\ \log 863 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} =1,9355 \\ =1,9358 \\ =1,9360 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ 0,0003 \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ 0,0005 \end{array} \right\}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = 0,6$$

په دې ډول لرو، چې:

$$N = 862 + 0,6 = 862,6$$

څرنگه چې مشخصه (1) ده، نو باید عدد دوه رقمي وي، یعنې:

$$N = 86,26$$

خطي انټرپولېشن Linear Interpolation

کله چې درې رقمي لوگاریتمي جدول ولرو، نشو کولای چې د څلور رقمي عدد لوگاریتم په مستقیمه توګه ترې په لاس راوړو، خو د انټرپولېشن په مرسته یې لوگاریتم پیدا کولی شو، چې دغه طریقه په لاندې مثالونو کې روښانه کوو.

مثال: $\log_{1,234}$ پیدا کړئ؟

حل: د $1,234$ او $1,24$ لوگاریتمونه په درې رقمي جدول کې شته، د انټرپولېشن په مرسته کولی شو، د نوموړي عدد لوگاریتم پیدا کړو.

$$\log_{1,24} = 0,0934$$

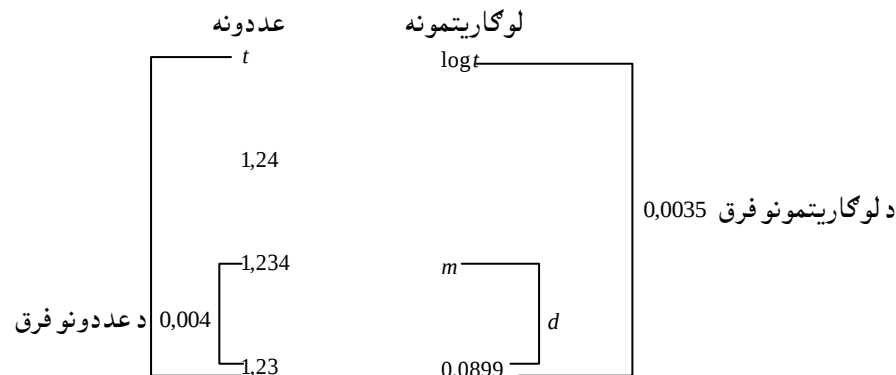
$$\log_{1,23} = 0,0899$$

$$1,23 < 1,234 < 1,24$$

$$\log_{1,23} < \log_{1,234} < \log_{1,24}$$

$$0,0899 < m < 0,0934$$

د m قیمت په لاندې ډول پیدا کوو.



په خطي انټرپولېشن کې فرض شوی، چې دغه څلور عددونه متناسب دي،
یعنې:

$$\frac{d}{0,0035} = \frac{0,004}{0,01}$$

$$d = \frac{(0,0035) \cdot (0,004)}{0,01} = 0,0014$$

$$m = \log 1,234 = 0,899 + d \Rightarrow 0,899 + 0,0014$$

$$\Rightarrow 0,9004$$

په نتیجه کې:

$$m = \log 1,234 = 0,9004$$

لوگاریتمي معادلات

Logarithmic Equations

د لوگاریتمي افادو چې په هغه کې متحول (مجهول) وي، د لوگاریتمي معادلاتو په نوم یادېږي. د لوگاریتمي معادلاتو د حل لپاره باید لومړی معادله د لوگاریتم د قضیو په اساس کار پرې وشي او وروسته پرې د الجبر قوانین تطبیق شي. بعضې وخت ضرورت پیدا کېږي، چې د اکسپوننشیل (نمایی) تابع د خواصو څخه استفاده وشي، نو معادله ساده کېږي او په نتیجه کې د مجهول قیمت لاسته راځي.

په لاندې افادو کې د x ، y و z قیمتونه پیدا کوو:

1). $\log_{10}^{10^6} = y$, $y = ?$

Solution: $\log_{10}^{10^6} = y \Rightarrow 10^{-6} = 10^y \Rightarrow y = -6$

2). $\log_{10}^{100} = x$, $x = ?$

Solution: $\log_{10}^{100} = x \Rightarrow \log_{10}^{10^2} = x \Rightarrow 10^3 = 10^x \Rightarrow x = 3$

3). $\log_8^x = 2$, $x = ?$

Solution: $\log_8^x = 2 \Rightarrow x = 8^2 \Rightarrow x = 64$

4). $\log_x^{36} = 2$, $x = ?$

Solution: $\log_x^{36} = 2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 6^2 \Rightarrow x = 6$

5). $\log_5^{\sqrt[5]{625}} = y$, $y = ?$

Solution: $\log_5^{\sqrt[5]{625}} = y \Rightarrow \sqrt[5]{625} = 5^y \Rightarrow \sqrt[5]{5^4} = 5^y \Rightarrow 5^{\frac{4}{5}} = 5^y \Rightarrow y = \frac{4}{5}$

6). $\log_2^{32} = z$, $z = ?$

Solution: $\log_2^{32} = z \Rightarrow 32 = 2^z \Rightarrow 2^5 = 2^z \Rightarrow z = 5$

7). $\log_y^{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{3}$, $y = ?$

Solution: $\log_y^{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{64} = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \sqrt[3]{4^3} = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 4 = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 4^3 = y \Rightarrow 64 = y$

8). $\log_6^{216} = x$, $x = ?$

Solution: $\log_6^{216} = x \Rightarrow 216 = 6^x \Rightarrow 6^3 = 6^x \Rightarrow x = 3$

9). $\log_{100}^{100} = y \Rightarrow 100 = 100^y \Rightarrow 100^1 = 100^y \Rightarrow y = 1$

10). $\log_{10}^{10^{-3}} = x$, $x = ?$

Solution: $\log_{10}^{10^{-3}} = x \Rightarrow 10^{-3} = 10^x \Rightarrow x = -3$

11). $\log_2^x = 6$, $x = ?$

Solution: $\log_2^x = 6 \Rightarrow x = 2^6 \Rightarrow x = 64$

12). $\log_2^x = 3$

Solution: $\log_2^x = 3 \Rightarrow x = 2^3 \Rightarrow x = 8$

په لاندې مساوات کې د x کمیت پیدا کړئ؟

$$Q2: \log_m^x = \frac{2}{3}\log_m^8 + \frac{1}{2}\log_m^9 - \log_m^6$$

find $m = ?$

$$\text{Solution: } \log_m^x = \frac{2}{3}\log_m^8 + \log_m^{9^{\left(\frac{1}{2}\right)}} - \log_m^6$$

$$= \log_m^{(8)^{\frac{2}{3}}} + \log_m^3 - \log_m^6$$

$$= \log_m^4 + \log_m^3 - \log_m^6$$

$$= \log_m^{(4,3)} - \log_m^6 = \log_m^{12} - \log_m^6$$

$$\log_m^x = \log_m^{\left(\frac{12}{6}\right)} = \log_m^2$$

$$\log_m^x = \log_m^2$$

نود لوگاریتم له خواصو څخه لیکلای شو:

$$m = m \Rightarrow x = 2$$

لوگاریتمی معادلو د حل طریقه

د لوگاریتمی معادلو د حل لپاره د لوگاریتم له خواصو څخه استفاده کوو.

$$1). \text{ Ex: } \log_a^{(x+4)} - \log_a^{(x+2)} = \log_a^x$$

$$\text{Solution: } \log_a^{\left(\frac{x+4}{x+2}\right)} = \log_a^x$$

$$\frac{x+4}{x+2} = x \Rightarrow x^2 + 2x = x + 4 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$2). \text{ Ex: } \frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$$

$$\text{Solution: } \log(35 - x^3) = 3 \cdot \log(5 - x) \Rightarrow \log(35 - x^3) = \log(5 - x)^3$$

$$\Rightarrow 35 - x^3 = (5 - x)^3$$

$$\Rightarrow 35 - x^3 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3$$

$$\Rightarrow 35 = 125 - 75x + 15x^2$$

$$\Rightarrow 15x^2 - 75x + 125 - 35$$

$$\Rightarrow 15x^2 - 75x + 90$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$3). \text{ Ex: } \log_2^{(11x-1)} 5$$

$$\text{Solution: } \log_2^{(11x-1)} = 5 \Rightarrow 2^5 = 11x - 1$$

$$\Rightarrow 32 + 1 = 11x$$

$$\Rightarrow 11x = 33$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$4). \log_3^{2^x-7} = 2$$

$$\text{Solution: } \log_3^{2^x-7} = 2 \Rightarrow 2^x - 7 = 3^2$$

$$\Rightarrow 2^x - 7 = 9$$

$$\Rightarrow 2^x = 9 + 7$$

$$\Rightarrow 2^x = 16$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^4$$

$$\Rightarrow x = 4$$

$$5). \text{ Ex: } \log \sqrt[3]{x^{25}} = 18$$

$$\text{Solution: } \log \sqrt[3]{x^{25}} = 18 \Rightarrow 25 = \sqrt[3]{x^{25}}$$

$$\Rightarrow 25 = x^{\left(\frac{1}{3}\right)^{18}}$$

$$\Rightarrow 25 = x^6$$

$$\Rightarrow 5^2 = (x^3)^2$$

$$\Rightarrow x^3 = 5$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{5}$$

$$6). \text{ Ex: } \log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = \log 2$$

$$\text{Solution: } \log \frac{(x^2 - 1)}{x + 1} = \log 2$$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2 \Rightarrow x^2 - 1 = 2x + 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$7). \quad Ex: x^{\log 10^x} = 10$$

$$Solution: \log x^{\log 10^x} \log 10$$

$$\Rightarrow \log_{10}^x \cdot \log_{10}^x = 1$$

$$\Rightarrow \log_{10}^x = 1$$

$$\Rightarrow x = 10^1$$

$$\Rightarrow x = 10$$

$$8). \quad Ex: \log \sqrt{x} + \log x^{\frac{3}{2}} = \log 100$$

$$\Rightarrow \log \sqrt{x} \sqrt{x^3} = \log 100$$

$$\Rightarrow \log \sqrt{x^4} = \log 100$$

$$\Rightarrow x^2 = 100$$

$$\Rightarrow x = 10$$

$$9). \quad \log_3^{(x+1)} - \log_3^{(x-1)} = 1$$

$$\Rightarrow \log_3^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = 3^1$$

$$\Rightarrow x+1 = 3x-3$$

$$\Rightarrow 3x - x - 3 - 1$$

$$\Rightarrow 2x - 4 = 2x = 4$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$$10). \quad Ex: \log_4^{(3x-3)} = \log_2^3$$

$$\Rightarrow \log_2^{2^{3x-3}} = \log_2^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log_2^{3x-3} = \log_2^3$$

$$\Rightarrow \log_2^{(3x-3)^{\frac{1}{2}}} = \log_2^3$$

$$\Rightarrow \log_2^{\sqrt{3x-3}} = \log_2^3$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3x-3})^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow 3x-3=9$$

$$\Rightarrow 3x=9+3$$

$$\Rightarrow 3x=12$$

$$\Rightarrow x=4$$

$$11). \text{ Ex: } \log \sqrt{x} + \log_x^{\frac{3}{2}} = \log 100$$

$$\text{Solution: } \log \sqrt{x} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \log 100$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot x^{\frac{3}{2}} = 100$$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = 100$$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 100$$

$$\Rightarrow x^{\frac{4}{2}} = 100$$

$$\Rightarrow x^2 = 100$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{100}$$

$$\Rightarrow x_1 = 10, \quad x_2 = -10$$

$$12). \text{ Ex: } \log_3^{(2+\frac{1}{x})} = \log_2^4$$

$$\text{Solution: } \log_3^{(2+\frac{1}{x})} = \log_2^2$$

$$\Rightarrow \log_3^{(2+\frac{1}{x})} = 2 \cdot \log_2^2$$

$$\Rightarrow \log_3^{(2+\frac{1}{x})} = 2 \cdot 1$$

$$\Rightarrow \log_3^{(2+\frac{1}{x})} = 2$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3^2$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 9 - 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 7$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

$$13). \log_a^{\left(1+\log_b \left[1+\log_c (1+\log_p^x)\right]\right)} = 0$$

$$\text{Solution: } 1 + \log_b^{\left[1+\log_c (1+\log_p^x)\right]} = a^0 = 1$$

$$\Rightarrow \log_b^{\left[1+\log_c (1+\log_p^x)\right]} = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \log_c^{\left(1+\log_p^x\right)} = b^0 = 1$$

$$\Rightarrow \log_c^{\left(1+\log_p^x\right)} = 1 - 1 = 0$$

$$1 + \log_p^x = c^0 \Rightarrow 1$$

$$\log_p^x = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \log_p^x = 0$$

$$x = p^0 \Rightarrow x = 1$$

$$14). \text{Ex: } \log_3^3 \cdot \log_2^x = 1$$

$$\text{Solution: } \log_3^3 \cdot \log_2^x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log_3^3 \cdot \log_2^x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log_2^x = 1$$

$$\Rightarrow \log_2^{x^{\frac{1}{2}}} = 1$$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1$$

$$\Rightarrow x = 4$$

$$15). \text{Ex: } \log \cdot \log_2^x = \log 5$$

$$\text{Solution: } \log_2^x = 5$$

$$\Rightarrow x = 2^5$$

$$\Rightarrow x = 32$$

$$16). \text{ Ex: } \log^{3\log 2^{(x-1)}} = 2$$

$$\text{Solution: } \log_2^{(x-1)} = 3^2$$

$$\Rightarrow \log_2^{(x-1)} = 9$$

$$\Rightarrow x - 1 = 2^9$$

$$\Rightarrow x - 1 = 512$$

$$\Rightarrow x = 513$$

$$17). \text{ Ex: } \log x = \frac{\log_3^{12}}{\log_3^{10}}$$

حل: د قاعدې د بدلولو له مخې:

$$\Rightarrow \log x = \frac{\log_3^{12}}{\log_3^{10}}$$

$$\Rightarrow \log x = \log_{10}^{12}$$

$$\Rightarrow x = 12$$

$$18). \text{ Ex: } \log_{10}^x = 1$$

$$\text{Solution: } \log_{10}^x = 1$$

$$\Rightarrow x = 10^1$$

$$\Rightarrow x = 10$$

$$19). \text{ Ex: } \log_x^{\sqrt[5]{625}} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{625} = x^{\frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{625} = \sqrt[5]{x^4}$$

$$\Rightarrow x^4 = 625$$

$$\Rightarrow x^4 = 5^4$$

$$\Rightarrow x = 5$$

$$20). \text{ Ex: } \frac{\log_{\sqrt{2}}^r}{\log_{\sqrt{2}}^5} = \log_x^r$$

$$\Rightarrow \log_5^r = \log_x^r$$

$$\Rightarrow 5 = x$$

$$\Rightarrow x = 5$$

$$21). \text{ Ex: } \sqrt{\log x} + 3 = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{\log x} = 4 - 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{\log x} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\log x}^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow \log x = 1^2$$

$$\Rightarrow \log x = 1$$

$$\Rightarrow x = 10^1$$

$$\Rightarrow x = 10$$

$$22). \text{ Ex: } \log 3 + \log 5 = \log x \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log 3.5 = \log x$$

$$\Rightarrow \log 15 = \log x$$

$$\Rightarrow 15 = x$$

$$23). \text{ Ex: } \log_2^{(x^2-9)} = 4, \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log_2^{(x^2-9)} = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 2^4$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 = 16 + 9$$

$$\Rightarrow x^2 = 25$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{25}$$

$$\Rightarrow x_1 = -5 \quad x_2 = 5$$

$$24). \text{ Ex: } \log_5^{(x-1)} - \log_5^{(x-2)} = \log_5^2 \quad x = ?$$

$$\Rightarrow \log_5^{\frac{x-1}{x-2}} = \log_5^6$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = 2$$

$$\Rightarrow x-1 = 2(x-2)$$

$$\Rightarrow x-1 = 2x-4$$

$$\Rightarrow 2x-x = -1+4$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$25). \text{ Ex: } \frac{7}{\log m + 4} = 1 \quad m = ?$$

$$\text{Solution: } \log m + 4 = 7$$

$$\Rightarrow \log m = 7 - 4$$

$$\Rightarrow \log m = 3$$

$$\Rightarrow m = 10^3$$

$$\Rightarrow m = 1000$$

$$26). \text{ Ex: } \log_x^{\frac{1}{25}} = \frac{-2}{3} \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log_x^{\frac{1}{25}} = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{25} = x^{\frac{-2}{3}}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{5^2}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{-2}{3}} = 5^{-2}$$

$$\Rightarrow x^{\left(\frac{-2}{3}\right)^3} = 5^{(-2)^3}$$

$$\Rightarrow x^{-2} = 5^{-6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{5^6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(5^3)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{125}$$

$$\Rightarrow x = 125$$

27). $Ex : \log x = \log 5 - \log 25$, $x = ?$

Solution: $\log x = \log \frac{5}{25}$

$$\Rightarrow \log x = \log \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

28). $Ex : \log_{\sqrt{5}}^x - \log_{\sqrt{5}}^3 - \log_{\sqrt{5}}^5 + \log_{\sqrt{5}}^4 = 0$, $x = ?$

Solution: $\log_{\sqrt{5}}^x = \log_{\sqrt{5}}^3 + \log_{\sqrt{5}}^5 - \log_{\sqrt{5}}^4$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^x = \log_{\sqrt{5}}^{3.5} - \log_{\sqrt{5}}^4$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^x = \log_{\sqrt{5}}^{15} - \log_{\sqrt{5}}^4$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^x = \log_{\sqrt{5}}^{\frac{15}{4}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{4}$$

29). $Ex : \log x = \log r^2 + \log z^2$, $x = ?$

Solution: $\log x = \log r^2 . z^2$

$$x = r^2 . z^2$$

$$30). \text{ Ex : } \log x^{2\log x} = \log 10x, \quad x = ?$$

$$\Rightarrow \log_x^{2\log x} = \log 10x$$

$$\Rightarrow 2\log x \cdot \log x = \log 10x$$

$$\Rightarrow 2\log x \cdot \log x = \log 10 + \log x$$

$$\Rightarrow 2\log x^2 = 1 + \log x$$

$$\Rightarrow 2y^2 = 1 + y$$

$$\Rightarrow 2y^2 - y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2y^2 - y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)(2y+1) = 0 \quad y = \log x$$

$$\Rightarrow y-1=0 \quad 2y+1=0$$

$$\Rightarrow y_1=1 \quad 2y=-1$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{-1}{2}$$

اوس يي له اصلي مجهول سره گورو.

$$\log x = y$$

$$y_1 = 1$$

$$\log x = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 10^1$$

$$\Rightarrow x = 10$$

$$y_2 = \frac{-1}{2}$$

$$\log_{10}^x = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 10^{\frac{-1}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$31). \text{ Ex : } \sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}} = x \quad x = ?$$

$$\text{Solution : } x = 10^{(2+\frac{1}{2}\log 4^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow 10^{(2+\frac{1}{2} \cdot 2 \log 4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow x = 10^{(2+\log 4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{10^{2+\log 4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{10^{\log 100 + \log 4}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{10^{\log 400}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{10^{\log 400}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{400}$$

$$\Rightarrow x = 20$$

$$32). \quad Ex: \log_4 \{2 \log_3 [\log_2 (1 + 3 \log_2^x)]\} = \frac{1}{2}$$

$$Solution: 2 \log_3 [1 + \log_2 (1 + 3 \log_2^x)] = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow 1 + \log_2^{(1+3 \log_2^x)} = 3^1$$

$$\Rightarrow \log_2^{(1+3 \log_2^x)} = 3 - 1$$

$$\Rightarrow \log_2^{(1+3 \log_2^x)} = 2$$

$$\Rightarrow 1 + 3 \log_2^x = 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow 3 \log_2^x = 4 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow 3 \log_2^x = 3$$

$$\Rightarrow \log_2^x = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$33). \quad Ex: \log_9^{3 \log_2^x} = 1$$

$$Solution: \log_9^{3 \log_2^x} = 1$$

$$\Rightarrow 3 \log_2^x = 9^1$$

$$\Rightarrow \log_2^{x^3} = 9$$

$$\Rightarrow x^3 = 2^9$$

$$\Rightarrow x^3 = (2^3)^3$$

$$\Rightarrow x = 2^3 \Rightarrow x = 8$$

$$34). \text{ Ex: } \log_{(x^2-x+4)}^{(x^2+5x-1)} = 1$$

$$\text{Solution: } \log_{(x^2-x+4)}^{(x^2+5x-1)} = 1$$

$$\Rightarrow (x^2 + 5x - 1) = (x^2 - x + 4)$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 1 = x^2 - x + 4$$

$$\Rightarrow 5x - 1 = -x + 4$$

$$\Rightarrow 5x + x = 4 + 1$$

$$\Rightarrow 6x = 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{6} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

$$35). \text{ Ex: } \log \sqrt{x} = \sqrt{\log x} \quad , \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log x = \sqrt{\log x}$$

$$\Rightarrow \log x = 2\sqrt{\log x}$$

$$\Rightarrow \log x^2 = (2\sqrt{\log x})^2$$

$$\Rightarrow \log 2x = 4 \log x$$

$$\Rightarrow \log 2x - 4 \log x = 0$$

$$\Rightarrow \log x (\log x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \log x = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 10^0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\Rightarrow \log x = 4 \Rightarrow x_2 = 10^4$$

د 100 عدد طبیعی لوگاریتم محاسبہ کریں۔

$$\ln 100 = 2,3026 \cdot \log 100$$

$$\ln 100 = 2,3026 \cdot 2 = 4,6052$$

$$36). \text{ Ex: } \log_2 \{2 + \log_3 (x + 3)\} = 0$$

$$2 + \log_3(x+3) = 2^0 = 1$$

$$\log_3(x+3) = -1 \Rightarrow x+3 = 3^{-1}$$

$$x = \frac{1}{3} + 3 \Rightarrow x = \frac{10}{3} = \frac{-8}{3}$$

$$37). \text{ Ex: } \log_b^x = \log_b^{30} + \frac{1}{5} \log_b^{32} - \frac{2}{3} \log_b^8$$

$$\log_b^x = \log_b^{30} + \log_b^{32^{\frac{1}{5}}} - \log_b^{8^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \log_b^{30} + \log_b^{(2^3)^{\frac{1}{5}}} - \log_b^{(2^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \log_b^{30} + \log_b^2 - \log_b^{2^2}$$

$$= \log_b^{30} + \log_b^2 - 2\log_b^2 = \log_b^{30} - \log_b^2$$

$$\log_b^x = \log_b^{\frac{30}{2}} \Rightarrow x = 15$$

$$38). \text{ Ex: } \log_5^{2x} = 3 \quad x = ?$$

$$\Rightarrow \log_5^{2x} = 3$$

$$\Rightarrow 2x = 5^3$$

$$\Rightarrow 2x = 125$$

$$\Rightarrow x = \frac{125}{2}$$

$$\Rightarrow x = 62,2$$

$$39). \text{ Ex: } x = \log_2^{128} + \log_{16}^{256} \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } x = \log_2^{2^7} + \log_{16}^{16^2}$$

$$\Rightarrow x = 7 \cdot \log_2^2 + 2 \cdot \log_{16}^{16}$$

$$\Rightarrow x = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 1$$

$$\Rightarrow 7 + 2 = 9$$

$$40). \text{ Ex: } \log_x^{16} = 4$$

$$\text{Solution: } \log_x^{16} = 4$$

$$\Rightarrow 16 = x^4$$

$$\Rightarrow 2^4 = x^4$$

$$\Rightarrow 2 = x$$

$$41). \text{ Ex: } \log x + \log 10 = 2 \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log x \cdot 10 = 2$$

$$\Rightarrow \log 10x = 2$$

$$\Rightarrow 10x = 10^2$$

$$\Rightarrow 10x = 100$$

$$\Rightarrow x = 10$$

$$42). \text{ Ex: } \log_2^{4 \cdot 3^x - 6} - \log_2^{9^x - 6} = 1 \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log_2^{\frac{4 \cdot 3^x - 6}{9^x - 6}} = 1$$

$$\Rightarrow \log_2^{\frac{4 \cdot 3^x - 6}{9^x - 6}} = \log_2^2$$

له $\log 2$ خخه صرف نظر کوو.

$$\Rightarrow \frac{4 \cdot 3^x - 6}{9^x - 6} = 2$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 3^x - 6 = 2 \cdot 9^x - 6 \cdot 2$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 3^x - 6 = 2 \cdot 3^{2x} - 12$$

$$\Rightarrow 4 \cdot y = 2 \cdot y^2 - 12 + 6$$

$$3^x = y$$

$$\Rightarrow 2y^2 - 4y - 12 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2y^2 - 4y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 3)(y + 1) = 0$$

$$y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 3$$

$$y + 1 = 0 \Rightarrow y_2 = -1$$

اوس یې له اصلي مجهول سره پرتله کوو.
۱ جز:

$$3^x = y \Rightarrow 3^x = 3^1$$

$$3 = 3$$

$$x = 1$$

۲ جز:

$$3^x = y \Rightarrow 3^x = -1$$

دویم جز نه شي صحيح کېدلی، ځکه چې ۱- له ۳ سره نه شي مساوي کېدلی، نو لهذا دا کمیت په کې صدق هم نه کوي.
امتحان:

$$\log_2^{4 \cdot 3^x - 6} - \log_2^{a^x - 6} = 1$$

$y = 3$ وضع کوو.

$$\log_2^{4 \cdot 3^3 - 6} - \log_2^{9^1} = 1 \Rightarrow \log_2^{12 - 6} - \log_2^3 = 1$$

$$\log_b^x = \log_b^{\frac{30}{2}} \Rightarrow x = 15$$

$$43). \text{ Ex: } \log_3^{(2x-7)} = 2 \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log_3^{(2x-7)} = 2$$

$$\Rightarrow 2x - 7 = 3^2$$

$$\Rightarrow 2x - 7 = 9$$

$$\Rightarrow 2x = 9 + 7$$

$$\Rightarrow 2x = 16$$

$$\Rightarrow x = \frac{16}{2} \Rightarrow x = 8$$

$$44). \text{ Ex: } \log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = \log 2 \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \log 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = 2$$

$$\Rightarrow x - 1 = 2$$

$$\Rightarrow x = 2 + 1 \Rightarrow x = 3$$

45). $Ex : \log_3^{(x+1)} - \log_3^{(x-3)} = 1 \quad x = ?$

Solution: $\log \frac{x+1}{x-3} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-3} = 3^1$$

$$\Rightarrow x+1 = 3(x-3)$$

$$\Rightarrow x+1 = 3x-9$$

$$\Rightarrow x = 3x-9-1$$

$$\Rightarrow 3x-x-10=0$$

$$\Rightarrow 2x-10=0$$

$$\Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$$

46). $Ex : \log_2^{(11x-1)} = 5 \quad x = ?$

Solution: $\log_2^{(11x-1)} = 5$

$$\Rightarrow 11x-1 = 2^5$$

$$\Rightarrow 11x-1 = 32$$

$$\Rightarrow 11x = 32+1$$

$$\Rightarrow 11x = 33$$

$$\Rightarrow x = 3$$

47). $Ex : \log_3^{(2^x-7)} = 2 \quad x = ?$

Solution: $\log_3^{2^x-7} = 2$

$$\Rightarrow 2^x - 7 = 3^2$$

$$\Rightarrow 2^x - 7 = 9$$

$$\Rightarrow 2^x = 9 + 7$$

$$\Rightarrow 2^x = 16$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^4$$

$$\Rightarrow x = 4$$

$$48). \text{ Ex: } \log_{\sqrt{x}}^{25} = 18 \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log_{\sqrt{x}}^{25} = 18$$

$$\Rightarrow 25 = (\sqrt{x})^{18}$$

$$\Rightarrow 25 = x^3$$

$$\Rightarrow 5^2 = (x^3)^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{5}$$

$$49). \text{ Ex: } \log x = \frac{\log_3^{12}}{\log_3^{10}} \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log x = \frac{\log_3^{12}}{\log_3^{10}}$$

$$\Rightarrow \log x = \log_{10}^{12}$$

$$\Rightarrow \log x = \log 12$$

$$\Rightarrow x = 12$$

$$50). \text{ Ex: } 3^{\log_4^{16}} = 27^x \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } 3^{\log_4^{16}} = 27^x$$

$$\Rightarrow 3^{\log_4^{16}} = (3^3)^x$$

$$\Rightarrow 3^{2\log_4^{16}} = 3^{3x}$$

$$\Rightarrow 3^{2.1} = 3^{3x}$$

$$\Rightarrow 3^2 = 3^{3x}$$

$$\Rightarrow 2 = 3x$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$51). \text{ Ex: } \log_4^{(3x-3)} = \log_2^3 \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log_{2^2}^{(3x-3)} = \log_2^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log_2^{(3x-3)} = \log_2^3$$

$$\Rightarrow \log_2^{(3x-3)^{\frac{1}{2}}} = \log_2^3$$

$$\Rightarrow \log_2^{\sqrt{3x-3}} = \log_2^3$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x-3} = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x-3}^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow 3x-3 = 9$$

$$\Rightarrow 3x = 9+3$$

$$\Rightarrow 3x = 12$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{3}$$

$$\Rightarrow x = 4$$

$$52). \text{ Ex: } \log_3^{\log_2^{(x-1)}} = 2 \quad x = ?$$

$$\text{Solution: } \log_3^{\log_2^{(x-1)}} = 2$$

$$\Rightarrow \log_2^{(x-1)} = 3^2$$

$$\Rightarrow \log_2^{(x-1)} 9$$

$$\Rightarrow x-1 = 2^9$$

$$\Rightarrow x-1 = 512$$

$$\Rightarrow x = 512+1$$

$$\Rightarrow x = 513$$

$$53). \quad Ex: \log_{x^2-x+4}^{(x^2+5x-1)} = 1 \quad x = ?$$

$$Solution: \log_3^{\log_2^{(x-1)}} = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 1 = x^2 - x + 4$$

$$\Rightarrow 5x - 1 + x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 6x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 6x = 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

په لاندې مساوات کې د x کمیت پیدا کړئ؟

$$\log_b^x = \frac{2}{3} \cdot \log_b^{27} + 2 \cdot \log_b^2 - \log_b^3$$

$$find \quad x = ?$$

$$Solution: \log_b^x = \frac{2}{3} \log_b^{27} + 2 \log_b^2 - \log_b^3$$

$$= \log_b^{(27)^{\frac{2}{3}}} + \log_b^{2^2} - \log_b^3$$

$$= \log_b^9 + \log_b^4 - \log_b^3$$

$$= \log_b^{(9 \cdot 4)} - \log_b^3$$

$$\log_b^x = \log_b^{\frac{9 \cdot 4}{3}} = \log_b^{(\frac{36}{3})} = \log_b^{12}$$

$$\log_b^x = \log_b^{12}$$

پاملرنه:

دا چې قاعدې د لوگاریتم سره مساوي دي، نو:

$$x = 12$$

د لوگاریتمی معادلاتو سیستم

د لوگاریتم معادلاتو د سیستم د حل کولو لپاره د لوگاریتم له قوانینو څخه ګټه اخلو.

مثال: لاندې لوگاریتمی معادلاتو سیستم حل کړئ؟

$$\begin{cases} \log x + 2 \log y = 0 \\ \log x - \log y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x + \log y^2 = 0 \\ \log x - \log y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log(x \cdot y^2) = 0 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y^2 = 10^0 \\ \frac{x}{y} = 10^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y^2 = 1 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \cdot y^2 = 1 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x \cdot x^2 = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = y = 1$$

مثال: لاندې لوگاریتمی معادلاتو سیستم حل کړئ؟

$$1). \begin{cases} \log_2^{(x^2+y^2)} = 5 \\ \log_2^x + \log_2^x = 4 \end{cases} \quad \text{find } x = ? \quad \text{find } y = ?$$

$$2). \begin{cases} 3 \cdot \log x + \log y^2 = 5 \\ \log x^2 - 2 \log y = 0 \end{cases} \quad \text{find } x = ? \quad \text{find } y = ?$$

لوگاریتمی غیر مساوات

د لوگاریتمی غیر مساوات د حل کولو لپاره په لومړي قدم کې غیر مساوات د لوگاریتم څخه خلاصوو، له دې رووسته د غیر مساوات له خواصو څخه استفاده کوو، د دې په نتیجه کې د مجهول د حل ساحه لاسته راځي. مثال: د $\log_2^{(x+2)} > -1$ غیر مساوات د حل ساحه معلومه کړئ؟

$$\log_2^{(x+2)} > -1$$

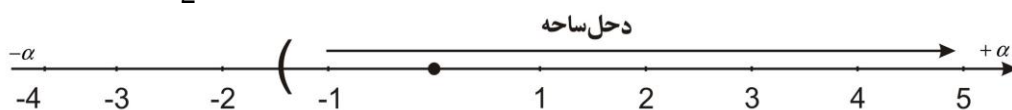
$$\Rightarrow (x+2) = 2^{-1}$$

$$\Rightarrow x+2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} - 2$$

$$\Rightarrow x > \frac{1-4}{2}$$

$$\Rightarrow x > \frac{-3}{2}$$



مثال: د لاندې غیر مساواتونو د حل ساحه معلومه کړئ؟

$$1). \log_{\frac{1}{2}}^{(3x+1)} > 0$$

$$2). \log_{\frac{1}{2}}^{(x^2-5x+6)} > -1$$

$$3). x^2 - 5x + 4 = 0$$

د لوگاریتمی معادلو تمرین

تمرین:

لاندې لوگاریتمی معادلې حل کړئ؟

1). $\log 2 + \log 8 = \log x$ $x = ?$

2). $\log 6 + \log 12 - \log 5 - \log x = 0$ $x = ?$

3). $\log_4 \frac{1}{32} = x$ $x = ?$

4). $\log_x 4 = \frac{2}{3}$ $x = ?$

5). $\log_4^{(2x-5)} = \log_4^{16}$ $x = ?$

6). $\log_2^{(\log_5 (2x-5))} = 2$ $x = ?$

7). $\frac{\log y}{\log y - 3} = 2$ $y = ?$

8). $\log_2^{(x^2-5x+22)} = 4$ $x = ?$

9). $\log_{\sqrt{2}}^x - \log_{\sqrt{2}}^8 - \log_{\sqrt{2}}^7 + \log_{\sqrt{2}}^5 = 0$ $x = ?$

10). $\log_{125}^{25} = x$ $x = ?$

11). $\log_3^{(x+3)} - \log_3^{(x-4)} = \log_3^4$ $x = ?$

12). $3^{\log x} = 3x$

13). $x^{\log x} = 100x$

14). $\ln(\ln x) = 1$

15). $\log(\log x) = 1$

$$16). (\log x)^3 = \log x^4$$

$$17). (\ln x)^3 = \ln x^4$$

$$18). \ln x = \ln(2x - 1) - \ln(x - 2)$$

$$19). \log(2x + 1) = 1 - \log(x - 1)$$

$$20). \ln(x + 1) = \ln(3x + 1) - \ln x$$

$$21). \log(6x + 5) - \log 3 = \log 2 - \log x$$

$$22). \log(2x + 1) = 1 + \log(x - 2)$$

$$23). \log(x - 0) + \log 100x = 3$$

$$24). \ln(2x + 1) - \ln(x - 1) = \ln x$$

$$25). \ln(\log x) = 1$$

$$26). (\ln x)^3 = \ln x^9$$

$$27). (\log x)^3 = \log x^9$$

$$28). \ln(2x - 1) = \ln(x + 3)$$

$$29). \log(x^2 - 3) = 2 \cdot \log(x - 1)$$

$$30). \log_x^9 = 2$$

$$31). 10^{\log_{10}^x} = 44$$

$$32). \log x + \log(x + 15) = 2$$

$$33). \ln(x + 4) - \ln(x - 4) = 2 \cdot \ln 3$$

$$34). \log_9^x = -\frac{3}{2}$$

$$35). \log(\ln x) = -1$$

$$36). \ln(2x^2 + 2) = 2 \ln(2x - 4)$$

$$37). e^{\ln x} = 2,5$$

$$38). \log_x^{e^x} = s$$

$$39). \log_{\frac{1}{4}}^{16} = x$$

$$40). \log_{16}^x = \frac{3}{2}$$

- 41). $\log_5^{5x} = 2$
- 42). $\log_5^{(x-2)} + 2\log_5^{(x^3-2)} + \log_5^{(x-5)} = 4$
- 43). $\log_{10}^x = 1$
- 44). $\log(x-3) + \log(x+6) = \log 2 + \log 5$
- 45). $\log_2^{\left(\frac{8}{x}-1\right)} = x-2$
- 46). $x(1-\log 5) = \log 4^x - 12$
- 47). $\log_7^{15} - \log_2^3 = \log_7^n \quad n = ?$
- 48). $\log x = \log 4 - \log 20$
- 49). $\log(\sqrt{2})^n = \log(\sqrt{2})^3 + \log(\sqrt{2})^6$
- 50). $\log_8^2 - \log_2^x - 2 = 0$
- 51). $\log_5^{(x-1)} - \log_5^{(x-2)} = \log_5^2$
- 52). $\log_2^{(10x+4)} = \log_2^8$
- 53). $\log_2^{(x+5)} = 2\log_2^3$
- 54). $2.\log_5^x = \log_5^{(x^2-6x+2)}$
- 55). $\log_e^{(x+8)} - \log_e^x = 3\log_e^2$
- 56). $2.\log_3^x = \log_3^2 + \log_3^{(4-x)}$
- 57). $3.\log_b^2 + \frac{1}{2}\log_b^{25} - \log_b^{20} = \log_b^x$
- 58). $\log_{10}^{(5-x)} = 3\log_{10}^2$
- 59). $\log_{10}^{(x^2-2x-2)} = 2\log_{10}^{(x-2)}$
- 60). $\log_7^{4x} - \log_7^{(x+2)} = \frac{1}{2}\log_7^4$
- 61). $\log_4^x + \log_4^{(x+2)} = \frac{1}{2}\log_4^9$
- 62). $\frac{3}{2}.\log_b^4 - \frac{2}{3}\log_b^8 + 2\log_b^2 = \log_b^x$
- 63). $\log_{\frac{1}{2}}^x = \log_{\frac{1}{2}}^2 + \log_{\frac{1}{2}}^3 + \log_{\frac{1}{2}}^5$
- 64). $\log_4^x - \log_4^{(x-1)} = 2\log_4^3$
- 65). $\log|x+1| - \log|x-1| - \log 5 + \log 2 = 0$

$$66). \log(3x-1) + \log 2 - \log 3 = 0$$

$$67). \log_2 \left| \frac{x+2}{x-1} \right| = 2$$

$$68). \log_2^{(x^2)} + 2\log_2^x + 1 = 0$$

$$69). \log x^2 - 3\log x - 4 = 0$$

$$70). \log_{\frac{1}{2}}^x = \log_{\frac{1}{2}}^2 + \log_{\frac{1}{2}}^3 + \log_{\frac{1}{2}}^5$$

$$71). \log_7^{15} - \log_7^3 = \log_7^x$$

$$72). \log_3^5 + \log_3^6 = \log_3^x$$

$$73). \log_3^5 + \log_3^6 = \log_3^x$$

$$74). \frac{7}{\log y + 4} = 1$$

$$75). 2\log_3^{\sqrt{x}} = 5$$

$$76). \log m + \log 25 = \log 5$$

$$77). \frac{\log_5^{125}}{\log_5^{25}} = \log_{25}^x$$

$$78). \log x = \log 4 - \log 20$$

$$79). \log_5^{(x-1)} - \log_5^{(x-2)} = \log_5^2$$

$$80). 2\log_3^{\sqrt{x}} = 5$$

$$81). \frac{\log_7^{343}}{\log_7^{49}} = \log_x^{343}$$

$$82). \log x = \log 4 - \log 20$$

$$83). \log_7^{(2x-3)^2} = 2$$

$$84). \log_x^3 + \log_x^{(2x+9)} = 2$$

$$85). \sqrt{(\sqrt{x})^{\log x}} = x$$

$$86). \sqrt{x \cdot \log \sqrt{x}} = 10$$

$$87). \log_3^5 + \log_3^6 = \log_3^x$$

$$88). \ln x + \ln(x+1) = 2$$

$$89). \frac{3}{2} \log_2^4 - \frac{1}{2} \log_2^x = 3$$

$$90). \log_4^{(x^2-17)} = 3$$

$$91). \ln(2x+3) = 8$$

$$92). \log x = \log(2x^2) - 2$$

$$93). \log[\log 3(x-2)] = 0$$

$$94). \frac{\log_7^{343}}{\log_7^{49}} = \log_x^{243}$$

$$95). \log x^{\frac{3}{2}} - \log \sqrt{3} = 5$$

$$96). \log \sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2} \log x$$

$$97). \ln x - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln(x+4)$$

$$98). \log(5x-1) - \log(x-3) = 2$$

$$99). \log_7^{(2x-1)} = \log_x^{(x+3)}$$

$$100). x(1 - \log 5) - \log(4^x - 12)$$

$$101). \log 2^{\left(\frac{8}{2^x} - 1\right)} = x - 2$$

$$102). 3, 2^{\log_5^{(3x-2)}} + 2, 3^{\log_5^{(3x-2)}} = 5, 6^{\log_5^{(3x-2)}}$$

$$103). 2 \log_3^{(x-2)} + \log_3^{(x-4)^2} = 0$$

$$104). \frac{\log_5^{125}}{\log_5^{25}} = \log_{25}^x$$

$$105). 2 \ln x + 3 \ln 2 = 5$$

$$106). \ln(2x-1)^2 = 7$$

$$107). \ln(3x+5)^2 = 4$$

$$108). \log_a \left(\frac{x^2 y}{z^3} \right) = ?$$

$$109). \log_a \left(x^3 \sqrt{\frac{y^2}{z^4}} \right) = ?$$

$$110). \log_3 \sqrt[3]{x^2 \cdot y \cdot \sqrt{z}} = ?$$

$$111). \log_3 [7(2x-3)^2] = ?$$

$$112). \log \left(3 \sqrt{\frac{x^2}{y \cdot z^2}} \right) = ?$$

$$113). \log \sqrt{x \cdot \sqrt{yz^3}} = ?$$

$$114). \log_a \left(\frac{\sqrt{x} \cdot z^2}{y^4} \right) = ?$$

$$115). \log_3^{(6x^4 y^{-2} - z^2)} = ?$$

د لوگاریتم د استعمال ځینې ځایونه

استعمال:

محاسبه اسانوي، یعنې هره عملیه له هغې څخه پر اسانه عملیه بدلوي.

$$1). \quad x = (2,05) \cdot (0,74) = ?$$

حل: د ضرب له مخې ځواب:

$$\begin{array}{r} 2,05 \\ \times 0,74 \\ \hline 820 \\ + 1435 \\ 000 \\ \hline 1,5170 \end{array}$$

$$x = (2,05)(0,74) = 1,517$$

همدا سوال یعنې $x = (2,05)(0,74)$ د لوگاریتم په طریقه اوس حل کوو.
چې ضرب یې په جمع بدلوي او د جمعې عملیه نظر ضرب ته اسانه ده.

$$x = (2,05)(0,74)$$

$$\log x = \log[(2,05)(0,74)]$$

$$\log x = \log 2,05 + \log 0,74$$

د جدول څخه په استفادې نو اوس یې وضع کوو.

$$\log 2,05 = 0,3118 \quad \text{او} \quad \log 0,74 = 1,869$$

$$\Rightarrow \log x = \log 2,05 + \log 0,74$$

$$\log x = 0,3118 + 1,8692$$

$$\log x = 2,181$$

$$x = \text{antilog } 2,181$$

$$x = 1,517$$

۲ مثال: تقسیم او د ضرب محاسبه په اسانه طریقی سره:

$$3). \text{ Ex: } x = \frac{48,3}{(83,8)(3,14)} = ?$$

د پورته سوال محاسبه د تقسیم او ضرب څخه جوړ شوی دی، داسې حل کوو، د تقسیم او ضرب په واسطه د پروخت او مشکلات لري، خود لوگاریتم په واسطه یې محاسبه اسانه او ژر کېږي.

$$\log x = \log \frac{48,3}{(83,8)(3,14)}$$

$$\Rightarrow \log x = \log y_{48,3} - (\log(8,38)(3,14))$$

$$\log x = \log 48,3 - (\log 83,8 + \log 3,14)$$

$$\log x = 1,6875 - (1,9232 + 0,4969)$$

$$\Rightarrow 1,6875 - 2,4201$$

$$\log x = -0,7326 = \bar{1},2674$$

$$\text{antilog}(\log x) = \text{antilog}(\bar{1},2674)$$

$$x = 0,1851$$

$$4). \text{ Ex: } \frac{(780,6)^2 \cdot \sqrt{3}}{4,000} = ?$$

$$\text{Solution: } \log x = \log \frac{(780,6)^2 \cdot \sqrt{3}}{4,000}$$

$$\log x = \log(780,6)^2 + \log \sqrt{3} - \log 4,000$$

$$\log x = 2 \log(780,6) + \frac{1}{2} \log 3 - \log 4,000$$

$$\log x = 2.(2,8924) + \frac{1}{2}(0,4771) - 0,6021$$

$$\log x = 5,7848 + 0,2386 - 0,6021$$

$$\log x = 5,4213$$

$$\text{anti log}(\log x) = \text{anti log} 5,4213$$

$$x = 263800$$

استعمال:

د لوگاریتم په ذریعہ د توان لرونکي عدد محاسبه کول.

$(1,05)^6$ محاسبه کړئ؟

$$\log(1,05)^6 = 6 \cdot \log 1,05 = 6(0,212) = 0,1272$$

$$\text{anti log} 0,1272 = 1,340 \text{ دې.}$$

یعنې $(1,05)^6$ دا داسې عددونو محاسبه کول پرته له لوگاریتم نه مشکل او د وخت ضایع کېدل دي، خو داسې مثالونه د لوگاریتم په ذریعہ په ډېر کم وخت او مطمئن ځواب لاسته راځي، یعنې $(1,05)^6 = 1,340$ سره دی.

استعمال:

د عددونو د n ام جذر موندلو لپاره استعمالېږي.

$$1). \text{ Ex: } \sqrt[3]{2187} = ?$$

حل: د داسې ډېرو عددونو جذر پیدا کول ډېر وخت او په پیدا کولو کې یې زیات مشکل وي، مګر د لوگاریتم له طریقه په اسانه دقیق او کم وخت کې حل کېږي.

د جذر له طریقي څخه صرف نظر کوو او د لوگاریتم په طریقه یې حل کوو.

گورو چې:

$$x = \sqrt[3]{2187}$$

$$\Rightarrow \log x = \log(2187)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \log x = \frac{1}{3} \log 2187 = 0,4771$$

0,4771 له جدول څخه اخیستل شوی.

$$\log x = 0,4771$$

$$\Rightarrow x = \text{antilog} 0,4771 = 3$$

$$\sqrt[3]{2187} = 3$$

$$2). \quad Ex: x = \sqrt[6]{2500,12}$$

$$\Rightarrow \log x = \log \sqrt[6]{2500,12}$$

$$\Rightarrow \log(2500,12)^{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \log 2500,12$$

$$\log x = 0,39969$$

$$\Rightarrow x = \text{antilog} 0,39969 \Rightarrow 2,5101$$

$$x = \sqrt[6]{2500,12} = 2,5101$$

مثال: $\frac{1}{\sqrt[3]{(0,34)^3}}$ عملیہ د لوگاریتم نہ پہ استفادہ محاسبہ کریں؟

ددی عدد لوگاریتم د لوگاریتم د قوانینو نہ پہ استفادہ پہ اسانی سرہ حل کپری، خو کولای شو، ہغہ داسی ہم محاسبہ کرو.

$$\log 0,34 = \bar{1},5315$$

اوس $\bar{1},5315$ پہ 3 کی ضربو.

$$\bar{1},5315 \cdot 3 = \bar{2},5945$$

اوس ددی لپارہ چپی نتیجہ پہ (5) تقسیم کرو، پر ہغی ہم 3 زیاتو او ہم 3 ورخنی کمو، حکمہ ($\bar{2}$) پہ (5) نہ تقسیم پری.

$$\bar{2},5945 = (3 + \bar{3}) + \bar{2},5945$$

$$= \bar{5} + 0,5945 + 3$$

$$= \bar{5} + 3,5945$$

کولای شود ا عدد پر (5) تقسیم کرو.

$$\bar{2},5945 \div 5 = (\bar{5} + 3,5945) \div 5$$

$$= \bar{1} + 0,7189 = \bar{1},7189$$

په حقیقت کې لرو چې:

$$\log \sqrt[5]{(0,34)^3} = \bar{1},7189$$

څرنگه چې اصلي عدد $\frac{1}{\sqrt[5]{(0,34)^3}}$ دی، نو لیکو:

$$\log \frac{1}{\sqrt[5]{(0,34)^3}} = \log 1 - \log \sqrt[5]{(0,34)^3}$$

د جدول نه په لاس راوړ، چې:

$$\log 1 = 0,0000 = \bar{1} + 1,0000$$

دا د بني خوا د عددونو د تفریق حاصل دی.

$$1,0000 - \bar{1},7189 = 0,2811 + \bar{1}$$

په دې ډول لرو، چې:

$$\log x = 0,2811 + \bar{1}$$

په نتیجه کې کولای شو، له جدول څخه په لاس راوړو.

$$\frac{1}{\sqrt[5]{(0,34)^3}} = 0,911 \text{ یعنی } x = 0,911$$

استعمال:

د نمایی تابع گانو د حل لپاره استعمالېږي.

هغه محاسبات (سوالونه) چې په نمایی (اکسپوننشیل) شکل را کړل شوي وي، دغه ډول سوالونو حل په نورو طریقو ډېر مشکلات لري، زیات وخت نیسي، ځواب دومره زیات دقیق نه وي، خو همدغه سوالونه د لوگاریتم په واسطه په لږ وخت، په دقیق ډول سره صورت نیسي.

$$\text{Ex: } x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \text{ نمایی تابع}$$

حل:

له دواړو خواوو څخه log نیسو:

$$\log x^{\sqrt{x}} = \log (\sqrt{x})^x$$

$$\sqrt{x} \log x = x \cdot \log \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} \cdot \log x = x \log x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{x} \cdot \log = \frac{1}{2} \cdot x \log x$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2} x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x})^2 = \left(\frac{1}{2} x\right)^2$$

$$x = \frac{1}{4} x^2$$

$$\Rightarrow 4x = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{x} = \frac{x^2}{x}$$

$$\Rightarrow x = 4$$

د لاندې مثالونو محاسبات د لوگاریتم له لارې وکړئ.

1). $(0,34) \cdot (15,7) = ?$

2). $(13,17) \cdot (4,2) = ?$

3). $(27,1) \cdot (6,231) \div (6,30) = ?$

4). $\frac{8,5}{(3,7) \cdot (7,3)} = ?$

5). $\frac{12,5}{(5,2) \cdot (3,2)} = ?$

6). $\frac{87,1}{(6,5) \cdot (2,4)} = ?$

7). $\sqrt[8]{250,7}$

8). $\sqrt[8]{2465}$

9). $\sqrt[12]{75,39}$

استعمال:

د عددونو د رقمو شمېر پرې معلومېږي.

مثال: که چېرې $\log 5 = 0,6990$ وي، نو معلوم چې 5^8 به څو رقمي عدد وي.

$$\log 5^8 = 8 \cdot \log 5 = 8 \cdot 0,6990 = 5,592$$

نتیجه: دا چې 5 عدد کرکترستییک دی، نو غوښتل شوی عدد $(5+1)=6$ دی، یعنې دا عدد (6) رقمي دی.

مثال: که چېرې $\log 2 = 0,3010$ وي، نو 2^5 عدد به څو رقمي وي؟

$$\log 2^5 = 5 \cdot \log 2 = 5(0,3010) = 1,505$$

نتیجه:

دا چې (۱) عدد کرکترستییک دی، نو غوښتل شوی عدد $1+1=2$ ده، یعنې اوس گورو چې $2^5 = 32$ کېږي، چې دوه رقمه لري.

مثال: که چېرې $\log 5 = 0,6990$ وي، نو 5^4 عدد به څو رقمي وي؟

$$\log 5^4 = 4 \cdot \log 5 = 4(0,6990) = 2,766$$

اوس گورو چې ایا 5^8 رښتیا هم 6 عدد لري.

$$5^8 = 5^4 \cdot 5^4 = 625 \cdot 625$$

$$\Rightarrow 390625$$

نتیجه:

دا چې (2) عدد کرکترستییک دی، نو غوښتل شوی عدد $2+1=3$ دی، نو ثبوت شوه چې دا عدد (3) رقمي ده، ځکه چې $5^4 = 625$ کېږي او 625 هم درې رقمي ده.

مثال: که $\log 2 = 0,3010$ وي، نو 2^{30} عدد څو رقمي وي؟

$$\log 2^{30} = 30 \cdot \log 2 = 30(0,3010) = 9,030$$

نتیجه: دا چې (9) عدد کرکترستییک دی، نو غوښتل شوی عدد $(9+1)=10$ دی.

تمرین:

که چہرې $\log 5 = 0,6690$ او $\log 3 = 0,4771$ او $\log 31 = 1,4914$ وي؟

نود لاندې عددونو د رقمونو شمېر پیدا کړئ؟

(۱). نود $(5^3 \cdot 31^2)$ عدد به څو رقمي وي؟

(۲). 2^6 عدد به څو رقمي وي؟

(۳). $(31)^{12}$ عدد به څو رقمي وي؟

(۴). $(\frac{5^3}{2^5})$ عدد به څو رقمي وي؟

(۵). 2^{30} عدد به څو رقمي وي؟

استعمال:

د بانکدارۍ په حسابونو کې مهم رول لري.
 مثال: احمد 100000 افغانۍ د 9% ربحې له قراره په بانک کې ذخیره
 کړې، د 20 کالو وروسته به د نوموړې سرمایه خو افغانی شوې وي.
 حل:

$$C = C_0(1+r)^{20}$$

$$C = 100000(1+9\%)^{20}$$

$$C = 100000(1+0,009)^{20}$$

$$C = 100000(1,09)^{20}$$

$$\log C = \log 100000 + \log(1,09)^{20}$$

$$= 5 + 20\log(1,09)^{20}$$

$$= 5 + 20(0,0374) = 5 + 0,7480$$

$$\log C = 5,7480$$

$$C = \text{antilog } 5,7480$$

$$C = 560000$$

استعمال:

د زلزلې په معمولو کې مهم رول لري.
 د ریکتر مقیاس (معیار):
 چارلس ریکتر امریکایي زلزله پېژندونکی (۱۹۰۰ متولد) د زلزلې د
 سنجش لپاره یو معیار رامنځته کړ، چې د هغه په نوم یادېږي او د لاندې
 فورمول له مخې سنجول کېږي.

$$R = \log\left(\frac{a}{T}\right) + B$$

چې د لته a د اهتزاز لمن (دامنه) د مایکرون له جنسه T د موج پریود په
 ثانیه او د B د تجربې ثابت دی، چې زلزلې د مرکز نه د اخذې تر ماشین پورې

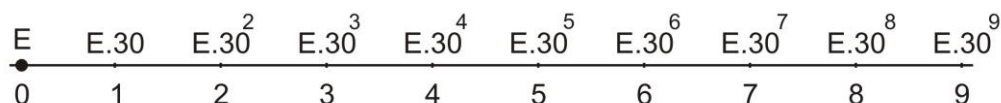
جدا قیمتونه لري.

د مثال په ډول د زلزلې مرکز د اخذې څخه 1000km فاصله لري، چې د B قیمت 6,8 کېږي، که د زلزلې د نوسان د امنه $a=10\text{Mm}$ ثبت شوې وي او $T=1\text{sec}$ وي د زلزلې قدرت د ریکتر له مخې څو دی؟

$$R = \log\left(\frac{10}{1}\right) + 6,8$$

$$R = 7,8$$

د ساینس له نظره د یوې زلزلې تېزوالی او لوړوالی د یو مقدار انرژي څخه عبارت دی، کوم چې د زلزلې په مرکز کې پیدا کېږي، د زلزلې د اندازه کولو واحد ریکتر (ریشر) (Richter) ده.



مثال: په 1995 د مکسیکو په ښار کې د زلزلې ټکان تقریقا 8,0 درجې وه او په 2001 کال په واشنگتن ښار کې د زلزلې ټکان 6,8 درجې وه، د دې دواړو زلزلو ترمنځ د ټکان تفاوت عبارت دی له:

$$= \frac{E_1}{E_2} = \frac{(30)^{8,0}}{(30)^{6,8}} = (30)^{8,0-6,8} = (30)^{1,2} \approx 59,2$$

نو معلومه شوه، کومه زلزله چې په مکسیکو کې شوې وه، تقریبا 59,2 ځلې زیاته وه، د هغې زلزلې له انرژي څخه کوم چې په واشنگتن کې شوې وه.

استعمال:

د زلزلې شدت (د زلزلې د انرژي اندازه):

د زلزلو په واسطه په ډېره زیاته اندازه د انرژي منځته راتګ امکان لري، چې دغه انرژي په ژول (Joule) ښودل کېږي، چې تقریبا د کوچنۍ زلزلې په واسطه (100000000000) 100 بلیونه په اندازه انرژي تولید شوې ده، 150

کاله پخواه ډېر خلکو د انرژي شدت په مختلفو طریقو اندازه کړې دیو په (1935) م کال کې یو زلزله شناس چې (Charles Richter) نومېږي، په کیلیفورنیا کې یو لوگاریتمي معیار یا اندازه چې د (Richter Scale) په نامه یادېږي اختراع کړ، چې لاندې ذکر شوی دی.

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0} \text{ Richter Scale}$$

په فارمول کې E هغه انرژي ده، چې د زلزلې په واسطه مینځته راغلې وي او په (Joule) سره اندازه کېږي او E_0 هغه انرژي ده، چې ترټولو کمه او لږه وي او د یوې زلزلې په واسطه پېژندل شوی دی، چې عبارت ده له ($E_0 = 10^{4.410}$ Joule) چې د E_0 معیاري قیمت دی.

مثال: په فرانسیسکو ایالت کې یوې زلزلې تقریبا (5.96×10^{16} Joule) انرژي مینځته راوړې ده، نو د (Richter Scale) یا معیار د فارمول له مخې یې اندازه پیدا کړئ، محاسبه تر دوه عدد اعشاري پورې کار وکړئ؟

$$\begin{aligned} M &= \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0} \\ &= \frac{2}{3} \log \frac{5.96 \times 10^{16}}{10^{4.40}} \\ &\Rightarrow \frac{2}{3} \log(5.96 \times 10^{11.6}) \\ &\Rightarrow \frac{2}{3} (\log 5.96 + \log 10^{11.6}) \\ &= \frac{2}{3} (0.775 + 11.6) = 8.25 \end{aligned}$$

$$M = 8.25$$

مثال: که یوه زلزله (1000) چنده له بلې زلزلې څخه لویه وي، نو د (Richter Scale) له مخې یې رابطه معلومه کړئ.

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{2}{3} \log \frac{E_1}{E_0} \text{ او } M_2 = \frac{2}{3} \log \frac{E_2}{E_0} \\ E_2 &= 1,000 E_1 \\ M_2 &= \frac{2}{3} \log \frac{1,000 E_1}{E_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}(\log 10^3 + \log \frac{E_1}{E_0})$$

$$M_1 = \frac{2}{3} \log \frac{E_1}{E_0} \text{ له مخې لیکو:}$$

$$= \frac{2}{3}(3) + \frac{2}{3} \log \frac{E_1}{E_2}$$

$$\Rightarrow 2 + M_1$$

استعمال:

په کیمیاوي محاسبو کې مهم رول لري.

مثال: په یو محلول کې د $[OH^-]$ ایون غلظت 0,0004 دی، د محلول PoH لوگاریتم محاسبه کړئ.
حل:

$$[OH^-] = 0,0004 \Rightarrow 4 \cdot 10^{-4}$$

$$PoH = -\log[OH^-]$$

$$\Rightarrow -\log 4 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow -(\log 4 + \log 10^{-4})$$

$$\Rightarrow -(\log 4 - 4)$$

$$\Rightarrow -\log 4 + 4$$

$$\Rightarrow -0,7321 + 4$$

$-\log 4 = -0,7321$ قیمت له جدول څخه اخیستل شوی.

پاملرنه:

دا چې مانتیس منفي دی، نو باید مثبت یې کړو.

$$\Rightarrow -0,7321 + 1 + 4 - 1$$

$$\Rightarrow 1 - 0,7321 + 3$$

$$\Rightarrow 0,2679 + 3$$

$$\Rightarrow 3,2679$$

$$\Rightarrow PoH = 3,2679$$

مثال: په یو محلول کې د $[H^+]$ ایون غلظت $3,2 \cdot 10^{-4}$ دی، د محلول PH پیدا کړئ.

$$PH = -\log[H^+]$$

$$PH = -\log[3,2 \cdot 10^{-4}] = -\{\log 3,2 + \log 10^{-4}\}$$

$$PH = -\{\log 3,2 - 4 \cdot \log 10\} = -\{\log 3,2 - 4\}$$

$$PH = -\log 3,2 + 4 = 4 - \log 3,2 = 4 - (0,5050) \approx 3,5$$

$$PH = 3,5$$

په عمومي ډول په ساینس او خاصه کیمیا پوهان د معمولي لوگاریتم څخه ډېره استفاده کوي.

مثال: د لیمو جوس PH 2,3 او د شیدو PH 6,6 دی، په دواړو کې د هایدروجن ایونونه معلوم کړئ.
د لیمو جوس:

$$PH = -\log[H^+]$$

$$2,3 = -\log[H^+]$$

$$\log[H^+] = -2,3$$

$$[H^+] = (10)^{-2,3}$$

$$[H^+] \approx 5 \cdot 10^{-3}$$

د شیدو جوس:

$$PH = -\log[H^+]$$

$$6,6 = -\log[H^+]$$

$$\log[H^+] = -6,6$$

$$[H^+] = (10)^{-6,6}$$

$$[H^+] \approx 10^{-7}$$

لیدل کېږي، چې د لیمو په جوس کې د هایدروجن د ایونو نسبت د شیدو د هایدروجن ایونو ته زیاته ده.

استعمال:

سرعت پرې معلومېږي.

مثال: که هوایي جهاز سرعت $7,7 \frac{Km}{Sec}$ وي، کولای شئ چې $300Km$ د ځمکې څخه اوچت پرواز وکړي. د یو راکټ اعظمي سرعت عبارت دی له:

$$V = -0,0098t + c \cdot \ln R$$

که داسې فرض کړو، چې یو راکټ په (25) نسبتي کتلې باندې حرکت وکړي، هوایي جهاز په حرکت شروع کوي، هر کله چې تاخیري سرعت $2,8 \frac{Km}{Sec}$ وي، آیا په $100Sec$ وخت کولای شي، چې په هوا کې په (300) کیلو متری کې له ځمکې اوچت پرواز وکړي؟

حل: پوهېږو چې $t = 100Sec$ ، $C = 2,8 \frac{Km}{Sec}$ او $R = 25$ ده.

پس:

$$V = -0,0098t + c \cdot \ln R \text{ سرعت}$$

$$V = -0,0098 \cdot 100 + 2,8 \ln 25$$

د حساب ماشین څخه استفاده کوو، نو ځواب:

$$V = 0,98 + 2,8(3,219) \approx 8,0 \frac{Km}{Sec}$$

لاسته راغلی سرعت نسبت د $7,7 \frac{Km}{Sec}$ څخه زیات دی، پس هوایي جهاز د ځمکې څخه $300Km$ اوچت پرواز کوي.

استعمال:

د راکټ الوتنه یا د راکټ الوتلو تیوري:

راکټ الوتنه په عالي ریاضیاتو او فزیک پورې اړه لري، موږ د لوگاریتم له مخې یو فارمول لرو، چې د راکټ سرعت معلوموي.

$$(V = c \ln \frac{W_t}{W_b} = \text{Rocket Equation})$$

پورته فارمول د (Rocket Equation) په نامه یادېږي. پورته فارمول کې C د انجن پورې متعلق سرعت څرگندوي، W_t د راکټ د پورته کېدو په وخت کې وزن او اندازه ده او W_b هغه اندازه ده، چې کله یو راکټ په هوا کې هغه وزن ولري، چې د هغه تېل او نور سونگ مواد ختم وي، د ځمکې جاذبې قوه عبارت ده له $9,0 \frac{Km}{Sec}$ څخه.

$$\text{مثال: که د یو راکټ د وزنونو نسبت } \frac{W_t}{W_b} \text{ مساوي وي له } 18,7 \text{ له}$$

$$\text{او } C = 2,38 \frac{Km}{Sec} \text{ وي، نو آیا دا راکټ به د } 9,0 \frac{Km}{Sec} \text{ سرعت ته ورسېږي.}$$

$$\begin{aligned} V &= C \ln \frac{W_t}{W_b} \\ &= 2.38 \ln 18,7 \\ &= 6,97 \frac{Km}{Sec} \end{aligned}$$

استعمال:

د اواز شدت (اوز د انرژۍ اندازه) د یو انسان غوږ کولای شي، چې اواز په ډېر شدت سره واوري، که د اواز شدت (1) ترلین (1000,000,000,000) هم وي، نویو صحتمند غوږ کولای شي چې په اسانۍ سره یې واوري. نویو عدد چې ډېر لوی وي، هغه محاسبه کول ډېر مغلق او پېچلی کار دی، نو موږ کولای شو، چې د لوگاریتم څخه کار واخلو، چې قاعده یې د (1) څخه زیاته وي، لوگاریتم اکثره د دې لپاره استعمالېږي، چې ډېر آرام او هوسا معیار جوړ کړي، د (Decibel) په نامه یو اندازه یا معیار لرو، چې د ایوېښه مثال دی د اندازه گیرۍ چې د اواز د شدت یا انرژۍ اندازه معلوموي. کله چې د ټیلیفون مخترع (Alexandler Caraham) دغه لاندې فارمول کشف کړ، نو په (decibel) یې ونوماوه.

$$D = 10 \log \frac{1}{10} \Rightarrow \text{Decibel Scale}$$

D عبارت د Decibel څخه ده، چې د اواز شدت لیول معلوموي او 1 د اواز شدت چې اندازه یې $\frac{W}{m^2}$ ده واحد دی او 0 چې د اواز تر ټولو کمه اندازه رشوت بنایي او عبارت دی له:

$$I_0 = 10^{-12} W/m^2$$

مثال: که د اواز د شدت اندازه 5.20×10^{-10} وات پر متر مربع یعنې $\frac{W}{m^2}$ وي، نو تاسو د Decibel معیاري واحد محاسبه او عدد یې پیدا کړئ، نو 2 عدد اعشاري پورې کار وکړئ.

$$\begin{aligned} D &= 10 \log \frac{1}{10} \\ &= 10 \log \frac{5.2 \times 10^{-10}}{10^{-12}} \\ &= 10 \log (5.2 \times 10^2) \\ &= 10 (\log 5.2 + \log 10^2) \\ &= \log 5.2 = 0,716 \\ &= 10(0,716 + 2) \\ &= 27,16 \text{ Decibels} \\ D &= 27,16 \end{aligned}$$

د (Scientific Calculator) په مرسته د

لوگاریتم پیدا کول

مهمه یادونه:

د حساب ماشین (Scientific Calculator) په مرسته هم کولای شو، چې د لوگاریتم (طبیعی او اعشاري لوگاریتمونو) محاسبه په ډېره اسانه او لږ وخت کې ترسره کړو.

د حساب ماشین په مرسته د لوگاریتم د محاسبه کولو طریقه:

مثال: د $\log_{10} 3,184$ عدد (Scientific Calculator) په مرسته وکړئ؟

حل: لومړی به په ماشین کې 3,184 داخل کړو، ورپسې به په ماشین کې د (log) په نوم توکمه (بټنه) باندې به فشار راوړو، نو په اتومات ډول به 3,502973 عدد راشي، چې دا عدد $\log_{10} 3,184 = 3,502973$ کمیت په لنډ ډول:

Enter	Press	Display
3,184	log	3,502973

مثال: $\ln 0,000349$ پیدا کړئ؟

Enter in Calculator	Press Botton	Display
0,000349	ln	-7,960439

مثال: د $\log(-3,24)$ عدد لوگاریتم (Scientific Calculator) حساب ماشین په مرسته پیدا کړئ؟

حل: د حساب ماشین دغه قسم عددونو لوگاریتم نه شي پیدا کولی، دا ځکه چې $(-3,24)$ د لوگاریتمي تابع په دویمین کې وجود نه لري.

مثال: $n = \frac{\log^2}{\log^{1,1}}$ د n کمیت (Scientific Calculator) په مرسته پیدا کړئ؟

حل: طریقه په لاندې ډول عملي کوو.

لومړۍ به د 2 عدد په ماشین کې کېکارو، بیا ورپسې د $\log$ بټنې ته فشار ورکوو، بیا د $(\div)$ تقسیم بټنه کېکارو، بیا د 1,1 عدد لیکو، بیا ورپسې د $\log$ بټنه Click کوو او په آخر کې د = علامه Click کوو، نو دا 7,273 ځواب به راکړي.

$$\ln = \frac{\log 2}{\log 1,1} = 7,273$$

$$n = 7,273$$

Enter	Press	Press	Enter	Press	Display
2	log	$\div$	1,1	=	7,273

مثال: د $n = \frac{\ln 3}{\ln 1,08}$ کمیت (Scientific Calculator) حساب ماشین په

مرسته پیدا کړئ.

حل: په لاندې ډول عمل کوو.

$$n = \frac{\ln 3}{\ln 1,08}$$

Enter	Press	Press	Enter	Press	Display
3	ln	$\div$	1,08	=	14,275

تمرین:

لاندې لوگاریتمي کمیتونه (Scientific Calculator) په مرسته پیدا کړئ؟

1). $Ex: \log 0,013529 = ?$

2). $Ex: \log 0,1202 = ?$

3). $Ex: \log 28,693 = ?$

4). $Ex: \ln 21,69 = ?$

5). $Ex: \ln(-0,439) = ?$

6). $Ex: \log(-0,215) = ?$

7). $Ex: \log(-1,101) = ?$

8). $Ex: n = \frac{\ln 2}{\ln 1,1} \quad , \quad n = ?$

9). $Ex: n = \frac{\log 3}{\log 1,03} \quad , \quad n = ?$

10). $Ex: n = \frac{\log 2}{\log 3} \quad , \quad m = ?$

11). $m = \frac{\ln 9}{\ln 2,2} \quad , \quad m = ?$

ماخذونه

۱. عمومی ریاضی، پوهاند عبدالحق ایمل.
۲. ریاضی عمومی، پوهنوال دکتور محمد انور غوري.
۳. ریاضی لارښود، پوهیالی حمید الله شیرزی وردگ.
۴. ریاضی عالی [۱]، تورن فیضان الله صدیقی.
۵. عمومی ریاضی، استاد عبد الرشید رشید.
۶. عمومی ریاضی، استاد شماس خان باورزی.
۷. ریاضی عمومی، استاد محمد طاهر.
۸. معادلات، استاد شماس خان باورزی.
۹. عالی ریاضیات، انجینر امداد الله.
۱۰. شمېر پوهنه، ډاکتر ماخان مېړی شینواری.
۱۱. ریاضی برای همه، استاد محمد عظیم خاموش.
۱۲. کانکور ویاړ، استاد جانداد ویاړ.
۱۳. یوولسم ټولګي ریاضي [نوی نصاب].
۱۴. د ۱۳۸۵ تر ۱۳۹۱ لمریز کال پورې د کانکور د فورمونو حل.
۱۵. د ریاضي د تمرینونو حل، استاد شماس خان باورزی.
16. College Algebra.
Raymond A,Barmett.
Michael Ziegteg
17. Algebra XI Z.R Bhatti
M,K Chouri
18. Valemied Mathematics
K, Velsker

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library