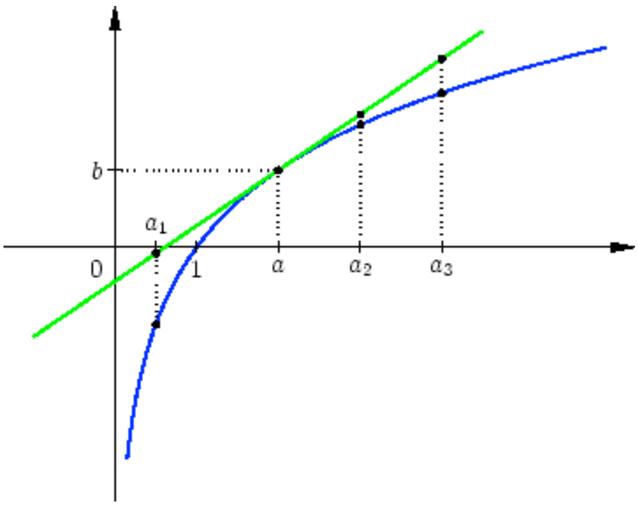
فنکشنل انالیزې

Funktionalanalysis



Ketabton.com

ډاکتر ماخان میرزي شینواری

دلوي څښتن په نامه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسي لږ ونده اخستې وي.

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: فنکشنتیوري

لیکونکی:

ژباړی : ډاکتر ماخان،، میری،، شینواری

د خپریدو لړی ....

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

د ژباړي برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

چاپ چارې

چاپ ته یې د هر چمتو هیوادوال مرسته په سترګو منل کیږي

.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

نیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

متريکي فضاوې ۱
د اويکليد يا اقليدس متريک ۲
د هامينګ واټن ۲
په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه ۳
په متريکي فضا کې د کوشي پرلپسې(ترادف) ۴
د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی ۴
نورم ۵
د يوې نورمي وکتور فضا متريک ۶
ايپسيلون- جال ۹
په متريکي فضاوو کې کومپاکټ(سره نښتی) ۱۰
په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع ۱۱
ازماېښتي توابع ۱۱
کمزوري يا ضعيف مشتقونه ۱۲
توپولوژيکي وکتور فضاوې ۱۳
د بانخ فضا ۱۴
په يوه کومپاکټ ډېريو باندې ناپرېکيدونکي توابع ۱۴
په کومپاکټ ډېريو باندې مشتقوړ توابع ۱۴
p -انتيګرالوړ توابع ۱۵
محدود توابع ۱۶
د موزونو اريتميتيکي او هندسي منځ ترمنځ .. ۱۶
د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه ۱۸
د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناوساوات ۱۹
د سوبوليف فضاوې ۲۱
د سوبوليو په کې خونديوني جمله ۲۵
د بانخ ځای په ځای ټکي جمله ۲۷

سکالار ضرب ۲۸
هيلبرټ – فضا ۲۹

مربع جمعه کيدونکي پرلپسې ۳۰

مربع انتيګراوړ توابع ۳۰
د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا ۳۲
د هاردي-ليبسک فضا ۳۳
پوره اورتونورمالسيستم **۳۴**

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هيلبرت٠فضا كې فورى-پروجكشن (پرېوستون) ۳۴
په هيلبرت- فضا باندې د كونوكسو ۳۶
په هيلبرت-فضا كې اورتوگونال كومپليمنت ۳۸
په هيلبرت-فضا كې د بيسل-نامساوات ۳۹
په هيلبرت- فضا كې د فورير(فوريې) وديزيينه ۴۰
په هيلبرت – فضا كې د پارزيوال-كتمتوالى ۴۱
ناپرېكيدونكي كربنيز فنكشنال ۴۲
د هان-بانخ د دوام(مخ ته بيونې) جمله ۴۵
دوال- يا دوه گونې فضا ۴۸
بيدوالفضا ۵۰
د p - انتيگراوړ توابعو دوالفضا ۵۰
د ريسڅ د انخورولو جمله ۵۱
كمزوري پولې ته تلنه ۵۳
محدود كربنيز اوپراتورونه ۵۵
انتيگرال اوپراتور ۵۵
د كربنيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه ۵۷
برابرډوله پولې ته تلنه ۵۷
د برابر ډوله محدودوالي اصول ۵۷
د باناخ-شتاينهوز جلمه ۵۸
كومپاكت اوپراتورونه ۶۱
د وازو توابعو په هكله جمله ۶۳
د رابند يا بند گراف جمله ۶۵
په هيلبرت-فضا كې د يوه كربنيز اوپراتور ماتريكس ۶۶
ادجونگيري اوپراتور ۶۹
يونيتار اوپراتور ۷۰
د يوه كربنيز اوپراتور آيگن ارزښتونه ۷۳
د هرميتيكي اوپراتورونو آيگن ارزښتونه ۷۴
د يوه هرميتيكي كومپاكت اوپراتور نورم ۷۵
د كومپاكت هرميتيكي اوپراتورونو سپكترال آنځورون ۷۹
شتورم-ليوويل-پرابلم ۸۱
گړندى لوېدونكى ازمايښت تابع ۸۴
تيمپيريري ديسريبوشنونه ۸۶
د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق ۸۸
ديراک- او هيويزايد – فنكشنال ۸۹
اپروكسيمي كتمتوالى ۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګرندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن ۹۳
د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريې –ترانسفورميش ۹۴
د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې ۹۶
ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه ۹۹
د لاپلاس - اوپراتور بنستيزه اوبيونه(حل) ۱۰۲
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې: ۱۰۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنل انلیزي Fuktionalanalysis

متریکي فضاوې

یوه ډېرې یا سټ M متریکي بلل کیږي، که په M باندې یو فنکشنواټن یا تابع واټن d د لاندې خویونو سره تعریف وي:

M1 زیاتیزوالی یا مثبتوالی $d(x,y) \geq 0$ او $d(x,y) = 0$ تیک هلته، که $x = y$ وي.

M2 سیومتري

$$d(x,y) = d(y,x)$$

M3 درېګوډېز – یا مثلثاتي مساوات

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

د ټولو $x,y,z \in M$ لپاره.

تابع d د M متریک په حیث هم بلل کیږي.

د متریک له لارې په کانونیکي ډول په M باندې یوه توپولوژي هم تعریفیږي. له

$$B(x_0;r) = \{x \in M : d(x,x_0) < r\}$$

سره په x_0 باندې یو واز غونداری د وړانګې r سره هم په نخښه کیږي. یوه برخه ډېرئ $U \subseteq M$ نو له دې امله وازه بلل کیږي، که هر یوه $x \in U$ ته یوه وړانګه $r > 0$ شتون ولري، داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$B(x;r) \subseteq U$

دی.
ليکونکي: اٍيپ او هوليګ

د اويکليد يا اقليدس متريک **Euklidische Metrik**

په $\mathbb{R}^n$ کي د اويکليد واټن

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

يو متريک دی.
مثبتوالی او سيومتري سملاسي ليدل کيږي او درپګوډي مساوات سيده د لاندې
مينکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$$d_2(x,y) =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k|^2}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هامينګ واټن **Hamming-Abstand**

پای پرلپسي له 0 او 1 د کودکول په تيوري کي (دوه بيز- -Binär) لغاتونه بلل کيږي.

د دوه n -ځايزو لغاتونو x او y د هيمينګ-واټن

$d_H(x,y) =$ د k ګڼون يا تعداد د $x_k \neq y_k$ سره

يو ماتريکس دی په n -ځايزو بينارلغاتونو.
د بيلګې په توګه د $n = 3$ لپاره

$$d(011, 110) = 2$$

او واز غونډاری $B(101;2)$ او $x = 101$ د وړانګې 2 سره توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$001, \quad 111, \quad 100\,.$$

خوندي لري.
توکي چې له 101 په دوه ځایونو کې توپیر لري، په دې پوري اړه نه لري، ځکه واټن باید له دوه کوچنی وي.
مثبتوالی او سیمتري روښانه دي. د درېګوډي نامساوات د ورته واي تعریف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j|\,.$$

لپاره د درېګوډي نامساوات.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په متریکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متریکي فضا M کې یوه پرلپسې (x_n) پولې $x \in M$ ته تلونکي بلل کیږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

توکی x د (x_n) پرلپسې پوله بلل کیږي او یوائنۍ ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که (x_n) د x او y په لور وهڅیږي، نو باور لري

$$d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول n لپاره، او داچې

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$$

دی، باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

$d(x,y)=0$

هم وي او له دې سره $x=y$ باور لري، داپه دې معنا چې پوله ارزښت يواځنی دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په متريکي فضا کې کوشي- پرلپسي(ترادف)
Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

په يوه متريکي فضا M کې يوه پرلپسي (x_n) کوشي – پرلپسي بلل کيږي، که د هر $r>0$ لپاره يوه پيژند نخښه يا ايندکس n_0 شتون ولري، داسې چې د ټول $m,n>n_0$ لپاره

$$d(x_m,x_n)<r$$

باور ولري. په ځانګړې توګه پولې ته تلونکې پرلپسې کوشي-پرلپسي ده.
که په يوه متريکي فضا M کې هره کوشي-پرلپسي په M کې يو پوله ارزښت لري، نو M پوره يا مکمل بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په M کې دې (x_n) يوه پولې ته تلونکې پرلپسي وي د پولې ارزښت $x\in M$ سره. د هر $r>0$ لپاره يو ايندکس n_0 شتون لري، داسې چې د ټولو $n>n_0$ لپاره

$$d(x_n,x)<r/2$$

باور لري. نو د دريګوډي نامساوات له مخې بيا دا لاندې باور لري

$$d(x_m,x_n)\le d(x_m,x)+d(x,x_n)<r/2+r/2=r$$

د ټول $m,n>n_0$ لپاره. د دې په تعقيب په M کې هره پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي – پرلپسي ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی

که د يو متريکي فضا M يو واټن تابع d په يوه پورته ډېرئ $\widetilde{M} \supset M$ تعريف وي، کومه چې په M کې د ټولو کوشي-پرلپسيو پوله رازښتونه خوندي ولري، نو پايونه $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$ نسبت و d ته د M پوره کيدونکې بلل کيږي.

په ټوله توګه کيدی شي د M پوره کيدنه بې له په پورته -ډيرئ کې له خونديونې تعريف شي. له دې سره سرې $\overline{M}$ د پولې ته تلونکو پرلپسيو ورته ټولګې سره په نخښه کوي يا پيژني.
د ډېريو پوره کيدنه د ناپريکيدونکو توابعو په څېرنه کې غوره رول لوبوي.
خويونه، کوم چې په کې باور لري، کيدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې $\overline{M}$ ته يووړل شي. بېّ ځانګړې توګه يو ناپريکيدونکی تابع همدا اوس په M د هغه ارزښتونو له لارې يواځنی ټاکل شوی دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

نورم **Norm**

په حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا V يو نورم يو تابع
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

دی د لاندې خويونو سره:

- Positivität: مثبتوالی(زياتيزوالی)

$$\|v\| > 0$$ د $v \neq 0$ لپاره

- Homogenität: هوموجينيټي

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

- Dreiecksungleichung: درېګوډيز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته u, v په خوښه وکترونه دي او λ يو په خوښه سکالار.

د يوه نورم په مرسته کيدی شي د

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

له لارې د دوه وکوترونو په منځ کې يو واټن تعريف شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ،هيوررنر

د يوې نورمي وکتور فضا متريک
Metrik eines normierten Vektorraumes

په يوه وکتورفضا V د يوه نورم $\|\cdot\|$ دواټنتابع يا واټنفنکشن
$d(u,v) = \|u - v\|$

سره برابر دی. دا ځانګړی متريک دوه ورزيات خويونه لري:

- ترانسليشن اينوارياڼخ يا د د خوژښت يا کښولو سره بې تغيري Translationsinvarianz

$$d(u + w, v + w) = d(u, v)$$

- هوموجينيتيHomogenität

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u, v)$$

د ټولو $u, v, w \in V$ او سکالار λ لپاره.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ

نيم نورم Halbnorm

په يوه حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا V باندې يو نيمنورم يو تابع
$p : V \to \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د لاندې خويونو سره:
HN1(HN د نیم نظم لپاره)
: ناكميزوالی يا نامنفيوالی:
$$p(v) \geq 0$$
HN2
:Homogenität هوموجينوالی
$$p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$$
HN3
:Dreiecksungleichung درېګوډي يا مثلثي نابرابرون
$$p(u + v) \leq p(u) + p(v)$$

د ټولو $u, v \in V$ او λ لپاره.

يو نيم نورم ټيک هلته يو نورم دی، كله چې $p(x) = 0$ فقط د $x = 0$ لپاره باور ولري.

د نيم نورم د تعريف لپاره وروستني دواړه خويونه بسيا كوي. ناكميزوالی كيدی شي له دوي لاس ته راوستل.

ليكونكي: اپپ، هيوليگ

له هوموجينيتي څخه سيده لاس ته راځي
$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0 p(x) = 0$$
او د درېګوډي نامساوات سره
$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) =$$
$$= p(x) + |-1| p(x) = 2p(x) ,$$
دا په دې معنا چې ناكميزوالی يا نامنفيوالی
$$p(x) \geq 0$$

دی، د ټولو $x \in V$ لپاره.
ليكونكي: اپپ، هيوليگ

متريک، چې د نيم نورم څخه رامنځ ته كيږي
Metrik, induziert durch Halbnormen

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه وکتور فضا V د نیمنورم یوې پرلپسي (p_k) لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow v = 0$$

باور ولري، د ټول $v \in V$ لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} \, .$$

نسبت دې متریک ته پرلپسي (v_n) ټیک هلته د v په لور ځي یا هڅیږي، که

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور ولري.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د متریک د اکسیمونو څخه یواځې د درېګوډي نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\frac{p_k(u-w)}{1+p_k(u-w)} = 1 - \frac{1}{1+p_k(u-w)}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+p_k(u-v)+p_k(v-w)}$$

$$\leq \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} + \frac{p_k(v-w)}{1+p_k(v-w)}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u,v) + d(v,w) \, . \, d(u,w)$$

د پولې ته تلنې لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو k شتون لري، داسي چې

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسي (v_{n_j}) شتون لري چې د هغې لپاره تل
$$p_k(v_{n_j}-v)>\varepsilon>0$$
باور لري او له دې امله
$$d(v_{n_j},v)\geq 2^{-k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}>0$$
باور لري، کوم چې مخامخوالی يا تضاد دی.
له بله پلوه دې $\varepsilon>0$ وي او باور دې ولري
$$\lim_{n\to\infty}p_k(v_n-v)=0$$
د ټول k لپاره. نو يو k_0 شتون لري، داسې چې
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}2^{-k}\frac{p_k(v_n-v)}{1+p_k(v_n-v)}<\frac{\varepsilon}{2}$$
باور لري. پسې هم نسبت نيممتريک ته د پولې ته تلنې له امله لاس ته راځي، چې د 1 او k_0 تر منځ دهر k لپاره يو n_k شتون لري، داسې چې د ټولو $n>n_k$ لپاره
$$p_k(v_n-v)<\frac{2^{k-1}}{k_0}\varepsilon$$
باور لري. که کېږدو
$$n_0=\max_{k=1,\dots,k_0}n_k\,,$$
نو د ټولو $n>n_0$ لپاره باور لري
$$d(v_n,v)=$$
$$\sum_{k=1}^{k_0}2^{-k}\frac{p_k(v_n-v)}{1+p_k(v_n-v)}+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}2^{-k}\frac{p_k(v_n-v)}{1+p_k(v_n-v)}$$
$$\sum_{k=1}^{k_0}2^{-k}\,\frac{2^{k-1}}{k_0}\,\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,,$$
$$<$$
څه چې نسبت متريک ته پولې ته تلنه ښايي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایپسیلون- جال **Epsilon-Netz**
د یو متریکي فضا M د یوې برخډېرئ K لپاره یو ε – جال یو پوښوونکی یا پټوونکی دی، چې د پاي ډېرو غونډارو
$B(x_1;\varepsilon),\ldots,B(x_n;\varepsilon)$

جوړ دی. دا مینیمال وړانګه $\varepsilon_n(K)$، چې د n منځټکو x_i په ښه یا اوپټیمال ټاکنې د M پوښوونې ته بسیا کوي، د ε-اینتروپي ε-Entropie (فزیکي لویه چې د تودخئ پروسي خوزښتلور په نخښه کوي)بلل کیږي.
که یوه K ته د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو ε-جال شتون ولري، نو K توتالي محدود یا رابند بلل کیږي.
لیکونکي: ایپ، هیولیګ

په متریکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) او نسبي کومپاکت ډېرئ

د یوه متریکي فضا M کومپاکت برخه ډېرئ K کیدی شي په درې ورته ډولونو خویونیز شي
لومړی: هره وازو ډطریو سره د K پټه ونه یا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري.
دویم : په K کې هره پرلپسې یوه پولې ته ت لونکې برخه پرلپسې په K کې لري.
دریم : K توتالي محدوده او پوره ده.
په پام کې دې وي، چې په $\mathbb{R}^n$ کې باوري د کومپاکت ډېرئ کرکتریزه کونه په دریم کې محدودیت او رابندوالی په ګوته کوي.

د یوه متریکي فضا M یوه برخډېرئ R نسبي کومپاکت بلل کیږي، که د $\overline{R}$ رابندوالی یا راتړلوالی کومپاکت وي، یا دې ته ورته، که په R کې هره پرلپسي یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.
لیکونکي: ایپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه به د حقیقی اعدادو مختلفي برخډېرئ تر څېړنې لاندې ونیول شی.
لومړی : انتروال $[0,1]$ د $\mathbb{R}$ یو کومپاکت (او له دې سره یو ن سبي کومپاکت) برخډېرئ ده، ځکه چې رابنده یا تړلی او محدوده ده.
دویم : انتروال $(0,1]$ د $\mathbb{R}$ کومپامت برخډېرئ نه ده، ځکه چې د بیلګې په توګه ، د، پرلپسي $1/n$ ، $n \in \mathbb{N}$ پوله خوندي نه لري. دا چې $\overline{(0,1]} = [0,1]$ دی، نو دا نیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

واز انتروال نسبي کومپاکت دی. دریم: څلورم: انتروال $[0,\infty)$ د $\mathbb{R}$ کومپاکت برخډېرئ نه ده، ځکه چې په حقیقت کې د وازې ډېرئ $(n-1,n+1)$ ، $n\in\mathbb{N}_0$ څخه پوښ کیږي، مګر دې ته یو پای برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نیم ناپای انتروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بیلګې په توګه د طبیعي اعدادو پرلپسي $1,2,\dots$ پولې ته تلونکي برخه پرلپسي نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

پـه یوه ساحه باندې ناپرېکیدونکي توابع **Stetige Funktionen auf einem Gebiet**

پـه $\mathbb{R}$ باندې د(حقیقي- یا کومپلکس ارزښتیزو) ناپریکیدونکو توابعو په فضا $C(\mathbb{R})$ د نیمنورم

$$|f|_{[-k,k]}=\max_{|x|\le k}|f(x)|$$

له لارې د لاندې سره یو متریک تولیدوي

$$d(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|f-g|_{[-k,k]}}{1+|f-g|_{[-k,k]}}\,.$$

نسبت دې متریک ته پولې ته تلنه په خوښه کومپاکت انتروال باندې برابرډوله پولې ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پورهوالی لاس ته راځي، ځکه چې په برابرډوله پولې ته تلنې سره ناپرېکیدنه خوندي پاتې کیږي.
د تولیزې ساحې $D\subseteq\mathbb{R}$ لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انتروال $[-k,k]$ پـه ځای یوه دا ساحه جوړه وونکي د کومپاکتو ډېریو پرلپسي
$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset D$
کارول کیږي یا استعمالیږي.
د $C_0(D)$ سره پـه D د ناپرېکیدونکو توابعو ډېرئ په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکي(انتقال کوونکي) سره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ازماېښتي توابع **Testfunktionen**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره په D باندې د ناپای ډېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه $C^\infty(D)$ ده.

د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه ډېرئ $K \subset D$ د باندې برته ده ورکیږي، د $C_0^\infty(D)$ سره یا د ازماېښت توابعو $\mathcal{D}$ په نخښه کیږي. دا فضا چې له شوارڅ(Schwartz) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ټوټه انتګرالمساواتو او دیستریبوتیو تیوري مطالعه کې غوره رول لوبوي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

کمزوري یا ضعیف مشتقونه **Schwache Ableitung**

د ټوټه انتیګرال په مرسته کیدی شي کلاسیکي مشتقکلیمې ټولنیزې شي. یو تابع

$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

یو په تعریف ورشو یا ساحه D تعریف شوې تابع f د کمزورې مشتق په نامه یادوو، که

$$\int\limits_D \partial^\alpha f(x) g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_D f(x) \partial^\alpha g(x)\, dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$

د $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$، $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ سره باور ولري. له دې سره و ړاندنیونه ده، چې د ازماېښت توابع g لپاره دواړه انتیګرالونه شتون لري. د بیلګي په توګه دا حالت هلته رامنځ ته کیږي، که $\partial^\alpha f$ او f په هر د D په هر کومپامتبرخه ډېرئ مطلق انتیګرالوړ وي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

توپولوژیکي وکتور فضاوې **Topologischer Vektorraum**

یو توپولوژیکي وکتروفضا V یوه وکتور فضا ده، د وازو ډېریوو یاسټونو په یوه سیستم $\mathcal{U}$ باندې د لاندطخویونو سره ورکړل شوی یا روښانه شوی دی

T1

$\emptyset \in \mathcal{U}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

T2

$$V \in \mathcal{U}$$

T3

د هرو وازو ډېريو یا سټونو $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$$

T4

د په خوښه وازو ډېريو $U_i \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}\,.$$

یوه وازه ډېرئ $U(v) \in \mathcal{U}$ د یوه ټکي $v \in V$ چاپیریال بلل کیږي، که $v \in U(v)$ باور ولري.

د سرچینې یا پیل د چاپیریالونو $U_i(0)$ ډېرئ لوکال بنسټ $\mathcal{B}$ بلل کیږي، که هر چاپیریال $U(0)$ د لوکال بنسټ یو توکی خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0)\,.$$

داسې یو توپولوژیکي جوړښت کیدی شي د بیلګي په توګه د یوه متریک یا نورم له لارې کره وټاکل شي یا کره شي. دا یو پولې ته تلنکلیمه راکوي. یوه پرلپسې (v_n) ټیک هلته یوه کوښي پرلپسي ده، که د ټولو $U_i(0) \in \mathcal{B}$ لپاره یو ایندکس n_0 داسې شتون ولري چې د ټولو $m, n > n_0$ لپاره

$$v_m - v_n \in U_i(0)$$

باور ولري.

که v_∞ د (v_n) پوله ارزښت وي، نو د v_∞ په هر چاپیریال U کې د پرلپسې ټول

(c) ketabton.com: The Digital Library

غړي پراته دي تر د پای ډېرو غړو پورې يعنې پای ډېر غړي کيدی شي له دې چاپېريال دباندې پراته وي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بانخ فضا Banach-Raum

يو نورمي وکتورفضا V د بانخ فضا بلل کيږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متريک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلپسې په V کې يو پوله ارزښت ولري.

هر رابنده لاندې وکتور فضا $U \subset V$ هم د د بانخ فضا ده.
په ځانګړې توګه پای پراخيدونکي يا پای بعدې فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکي توابع
Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپرېکيدونکو(حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيز) توابع په يوه کومپاکت برخه ډېريو $K \subseteq \mathbb{R}^n$ باندې فضا $C(K)$ بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

له لارې تعريف شوي نورم ته. پوره کيدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابرډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.
د تعريف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه يا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکيدونکې توابع بايد نه دی، ماکسيموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع
Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د m -ځله ناپرېکيدونکو مشتقوړ توابعو)(حقيقي – يا کومپلکس ارزختيزې) فضا $C^m(K)$ په يوه کومپاکت برخه ډېرئ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت و

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعریف شوي نورم یو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د ټوټه مشتقونو $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ، $\partial^\alpha f$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع، د برابر ډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.

د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

p -انتیګرالوړ توابع p-integrierbare Funktionen

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $L^p(D)$ ، $1 \le p < \infty$ ، د تابع باناخ-فضا په ګوته کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f|^p\right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکیدونکي له لارې د د کومپاکت وړونکي ډېرئ سره ښپروکسیمي کیږي، دا په دې معناچې د $\|\cdot\|_p$ رابندونه Abschluß ده نسبت و $L^p(D)$ ته ده.
توابع فقط تر کچې صفر پورې په ډېرئ ټکي ډوله تعریف دي. سړی لیکي $f = g$
ن.ه. : نږدې هرچیړته (almost everywhere)
د توابعو لپاره، چې فقط په یو صفرډېرئ یا"فرسټ سره توپیري او داسې توابع راپیژني.
په ټیکه توګه سړی ورته والی یا اکویوالنت تر څیرنې لاندې نیسي، چې د هغوی لپاره f او g ځای نیونکي یا نماینده ګان دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لبسک انیګرال په مرسته کېدی شي $L^p(D)$ په ټولیزه توګه د په خوښه لیبسک-کچوړ ډېرئ لپاره تعریف شي. د اپروکسیمیشن ته کیدی شي، ریمن-انتیګرال ته ورته د زیني توابع کارول کیږي، چې د لیبسک-کچوړ د D په برخه ډېرئ ثابت دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

محدود توابع **Beschränkte Funktionen**

د لیبسک کچوړ توابعو f د $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ساحي یا ورشو لپاره د بانخ فضا د $L^\infty(D)$ سره په نخښه کو، چې په یوه صفرډېرئ محدود دی، دا په دې معنا،چې
$$|f(x)| \leq c < \infty$$
نږدې هر چیرته دی. د c کوچني بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$$
سره په نخښه کوو.
فضا $L^\infty(D)$ د ټول هرچیرته په D محدودو توابعو یوه اصلي برخه ډېرئ ده. دواړه فضاوې کیدی شي نسبت $\|\cdot\|_\infty$ ته د ناپرېکیدونکو توابعو سره جوړې یا تولید کړای شي. دا یو روښانه توپیر دی د p – انتیګرلوړ توابعو $L^p(D)$ ته.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د موزونو اریتمیتیکي او هندسي منځ ترمنځ نابرابرونونه

Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

د زیاتیزو یامثبتو $a_1, \ldots, a_n$ ګنونو لپاره اریمیتیکي منځ نسبت هن**دسي منځ یا وسط ته کوچنی نه دی:**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\,.$$

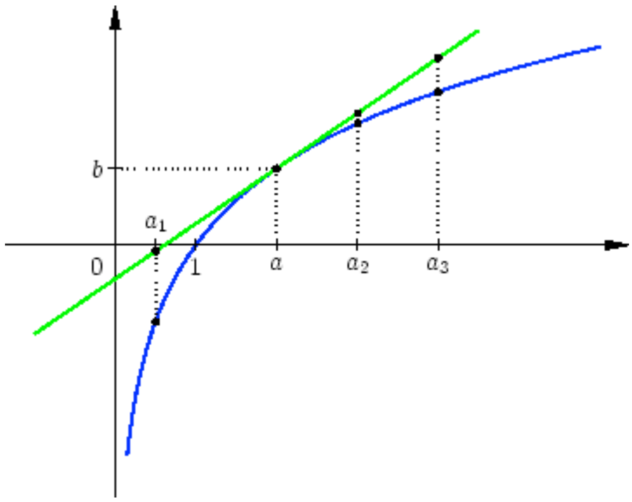
په ټولیزه توګه د مثبت وزن λ_i لپاره د $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ سره باور لري

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}\,.$$

برابروالی ټیک هلته باور لري، که $a_1 = \cdots = a_n$ باور ولري.

سړی د $a = \sum_i \lambda_i a_i$ او $b = \ln a$ سره د لوګاریتم کوني وروسته موَزن نابرابرون یا نامسوات ورته غوښتني لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a\,.$$



که-لکه په مشتق کې چې ښوول شوی- وکارول شي، چې تانجنت

$$g:\ \ y = b + \frac{1}{a}(x - a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د ګراف پورته لور ته پروت دی، نو د $\sum_i \lambda_i = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \le \sum_i \lambda_i \left(b + \frac{1}{a}(a_i - a) \right) = b + \frac{1}{a} \left(\sum_i \lambda_i a_i - a \right) = b$$

لکه چې غوښتل مو.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه
Höldersche Ungleichung für Integrale

وي دې $f \in L^p(D)$ او $g \in L^q(D)$ د $1 < p < \infty$ او د $1/p + 1/q = 1$
سره. نو $fg \in L^1(D)$ باور لري او لاندې د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx \right)^{1/q}.$$

مساوات ټيک هلته باور لري، که د توابعو $|f|^p$ ، $|g|^q$ څخه يو يې نږدې هر چيرته د د بل ډېرواره وي.
د پولې حالت $p = \infty$ ، $q = 1$ (همداسې $p = 1$ ، $q = \infty$ د f او g سره بدليدنې) لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_\infty \int_D |g(x)|\,dx\,.$$

باور لري
د $p = q = 2$ لپاراه دا مساوات د کوشي-شوارځ نامساوات هم بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

فقط دا ناساده حالت $1 < p < \infty$ تر څيړنې لاندې نيسو. داپسې بې له تولیزو بندیزونو کیدی شي ونیول شي یا فرض شي، چې انتیګرال

$$I_1 = \int_D |f(x)|^p dx \quad \text{او} \quad I_2 = \int_D |g(x)|^q dx$$

زیاتیز یامثبت دي. که د بیلګې په توګه $I_1 = 0$ وی،، نو $|f|^p$ او له دې سره به هر f چیرته ورک شي، دا په دې معنا چې، $\int_D |f(x)g(x)|\, dx = 0$ او نا مساوات به په ساده توګه پوره وی. دا چې نامساوات د سکالا کونې $f \to rf$ ، $g \to sg$ په مقابل کې اینواریانت یا بې تغیره دی، کیدی شي برسېره پردې $I_1 = I_2 = 1$ ونیول یا فرض شي.

د موَزنو اریتمیتیکي - او هندسي - یا ځمککچیز منځ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p}(|g|^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q\,.$$

له دې سره $fg \in L^1(D)$ دی او د انتیګرالونې پسې لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)|\, dx \leq \frac{1}{p}I_1 + \frac{1}{q}I_2 = 1\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرال لپاره د مینکوفسکي ناساوات
Minkowskische Ungleichung für Integrale

د دوه توابعو f او g په $L^p(D)$ کې د $1 \leq p < \infty$ سره د مینکوفسکي نامساوات باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

مساوات ټیک هلته باور لري، که د توابعو g ، f څخه یو یې تل هر چیرته د بل ډېرواره یو نامنفي ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا چې حالت $p=1$ ساده دی، په لاندې کې به $p>1$ ونیول یا فرض شي. ورپسې دې همداسې $1/p+1/q=1$ وي او انتیګرال

$$I=\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

دې بې له تولیزو محدودیتونو زایاتیز وي. نو د درېګوډې نا مساوات سره لاس ته راځي

$$I = \int_D |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx$$

$$\le \int_D |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_D |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx.$$

د هولدر نامساوات او $(p-1)q=p$ سره

$$\le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right)I^{1/q}\,.$$

د $I^{1/q}$ سره د وېشنې له لارې سرې د مينکوفسکي نامساوات لاس ته راوړي
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د سوبوليف فضاوې **Sobolev-Räume**

د ورشو $D\subseteq\mathbb{R}^n$ لپاره

$$W^{k,p}(D),\quad k\in\mathbb{N}_0,\quad 1\le p\le\infty,$$

د توابعو باناخ فضا بنايي د $\le k$ نظم د کمزورو مشتقونو سره په $L^p(D)$ او

$$\|f\|_{k,p}=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty$$

کې همداسې

$$\|f\|_{k,\infty}=\max_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha f\|_\infty=\max_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_{x\in D}|\partial^\alpha f(x)|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړونده نورم. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

همداسې

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \operatorname{ess\,sup}_{x\in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
په ځانګړې توګه دی
$$W^{0,p}(D) = L^p(D) \, .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه تابع
$$f(x) = |x|^s, \quad s \ne 0,$$

په n–بعدیزې یا n–پراخیدونې یونګردئ(دایره واحد)
$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$$

تر ځیرنې نیول کیږي. د f لپاره $s > -n$ انتیګرالوړ دی،، خکه چې د ګردئ کواوردیناتونه(پراته ولاړ محرونه) ($r = |x|$) سرې لاس ته راوړي

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s \, dx = c_n \int_0^1 r^s r^{n-1} \, dr \, ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیرته چې c_n دا $n-1$ – بعدیز حجمونو یونفضا (واحد فضا) ده. پسی دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د $s > 1-n$ لپاره د f یو انتیګرالوړ کمزوری مشتق دی، په سرچینه کې د سیګولاریتي سره. په غونډاري کواودینات کې سړی لاس ته رانړي

$$\begin{aligned} \|f\|_{1,2}^2 &= \int_D |f(x)|^2\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} \int_D |\partial_\nu f(x)|^2\,dx \\ &= \text{const.} \int_0^1 \left(r^{2s} + s^2 r^{2s-2}\right) r^{n-1}\,dr \end{aligned}$$

د $r = |x|$ سره. له دې سره $f \in W^{1,2}$ دی د $s > 1-n/2$ لپاره. دا چې د $n > 2$ لپاره کمیز اکسپوننتونه s هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انتیګرالوړ مشتقونه نه اړین محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي څخه ناپرېکیدنه لاس ته راځي.

که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| > 1\}$$

وڅیړل شي، نو f مربع انتیګرالوړدی د $s < -n/2$ لپاره او کمزوري مشتقونه د $s < 1-n/2$ لپاره مربع انتیګرالوړ دي، کوم چې بیرته د غونډاري کواوردینات

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2\,dx = \text{const} \int_1^\infty r^{2s-2} r^{n-1}\,dr$$

سره ښوول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

کمزوري مشتقونه په حقيقت کې ټولګيزه يا کلاسيکي مشتقکليمه ټوليزه کوي، مګر قوي سينګولاريټي اجازه نه لري. د بيلګې په توګه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

راوړو، په n-بعدي يا $n-$ پراخيدوني انتروال

$$D = (-1,1)^n$$

ترڅيرني لاندې نيسو. تابع په هيوپرسطحهHyperebene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

پرېکيدونکي ده او مربع – انتيګرالوړ کمزورى مشتق $g = \partial_1 f \in L^2(D)$ نه لري، دا په دې معنا چې مساوات

$$\int_D g(x)\varphi(x)\,dx = -\int_D f(x)\partial_1\varphi(x)\,dx$$

د هيڅ کوم g لپاره د ټول $\varphi \in C_0^\infty(D)$ لپاره پوره وړ دى. د دې لپاره چې دا وښايو، نو يو ازمايښت تابع

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad \varphi(0) > 0\,,$$

ټاکو او ودې ته د $1 > \varepsilon > 0$ لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n), & x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

له دې سره په پورته مساوات کې د ښي اړخ لپاره راکوي

$$\int_D f(x)\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx \qquad = -\int_{x_1 \geq 0} \partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int\limits_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n$$

$$\int\limits_{n-1} \varphi(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسې حال کې چې په کينه خوا د کوشي-شوارڅ نامساوت

$$\left| \int\limits_D g(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx \right| \leq \|g\|_2 \left(\int\limits_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$\left(\int\limits_D |\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)|^2\, \varepsilon\, dy \right)^{1/2} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

د ε سره د صفر0 په لور ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د سوبوليو په کې خونديوني جمله**Sobolevscher Einbettungssatz**

د يوې ليښشيخ ورشو $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره د سوبوليو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، له کوم سره چې د $q = \infty$ لپاره تيک يوه خونديونه په $W^{l,\infty}(D) \cap C^l(D)$ پسې منځ ته راځي.

د محدودې ورشو لپاره خونديونه کومپاکتده، دا په دې معنا چې محدوده ډېرئ په $W^{k,p}(D)$ کې پولې ته تلونکې پرلپسي په کې $W^{k,p}(D)$ لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګی په توګه خونديونه

$$W^{1,p} \subset W^{0,q} = L^q$$

د تابع

$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0$$

په مټه په n–بعديز يونغونډاري

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$$

څيرل کيږي. تابعه د $s > -n/q$ لپار q –انتيګرالوړ ده، څکه چې د غونډاري کواوردينات ($r = |x|$) سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^q = \int_D |x|^{sq}\, dx = c_n \int_0^1 r^{sq} r^{n-1}\, dr\,,$$

د کوم سره چې c_n د يوونغونډاري $(n-1)$ -بعديز حجم دی. نور پسې دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2} x_\nu$$

د f يو کمزوری مشتق دی، کوم چې د $s > 1 - n/p$ لپاره p – انتيګرالوړ دی. دا بيرته کيدی شي د غونډاري کواوردينات له لارې وازمايل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p \, dx \le |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1} \, dr \,,$$

د کوم سره چط

$$|x_\nu|^p \le \left(\sum_\nu |x_\nu|^2 \right)^{p/2} = r^p$$

کارول شوی. د خونديوني جملې پسې $W^{1,p} \subset W^{0,q}$ دی، که

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسې

$$1 - \frac{n}{p} = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) > n\left(-\frac{1}{q}\right)$$

باور ولري، کوم چې په باندې د پورته شرايطو سره سر خوري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بانخ ځای په ځای ټکي جمله **Banachscher Fixpunktsatz**

که g يو رايوځای کيدونکي تابع وي، کوم چې يوه نه تشه، رابنده ډېرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځيره کړي، دا په دې معنا چې، باور لري

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c < 1$ سره، نو g یو یواځنی ځاپه ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري. که له $x_0 \in D$ راووځو یا مخ ته لاړ شو، نو کیدی شي x_* د اتریشن پرلپسي (د تکرار پرلپسي) له لارې

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسیمیر(په نږدې توګه ټاکل) شي یا نږدې (که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناټیکاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \le \frac{c^k}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې، که د اتریشنپرلپسي یا د تکرار پرلپسي د هر پیل ارزښت لپاره کرښیزه پولې ته لاړه شي.
د ځای په ځاي ټکي جمله په ټولیزه توګه په پوره متریکي فضاو کې باور لري. دا چې د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیتی ته اړتیاپیینه نه شي، کیدی شي سړی $\|x - y\|$ د یوه ټولیز واټن تابع له لارې $d(x,y)$ بدل کړي.
لیکونکي: اپپ، بوسلي، هیولیګ

سکالار ضرب **Skalarprodukt**

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا V یو تابع دی
$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$

د لاندې خویونو سره:

- Positivität: مثبتوالی:

$$\langle v, v\rangle > 0 \quad \text{für} \quad v \neq 0$$

- Schiefsymmetrie: مایلسیمتري

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- کرښیزوالی Linearität:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.
د مایل سیومتري په بسټ یو کومپلکس سکالار ضرب نسبت و دویمې متحولې یا اووښتونې ته کرښیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + \overline{\varrho} \langle u, w \rangle \,.$$

یواځې د حقیقي سکالار لپاره کومپلکس کنجوګیشن بې معنا دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ، کرایخ

هیلبرت - فضاHilbert-Raum

یوه هیبرت – فضا H یوه پوره نورمي (حقیقي یا کومپلکس) وکتور فضا ده، چې په کومه کې نورم د سکالار ضرب له لارې تعریف ده:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \,.$$

په ځانګړې توګه د کوشي – شواذرځ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

همداسې د غبرګ اړخیز-ایدنتیتي یا - - کتمتوالی

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \,.$$

سرې د هیلبرت-فضا Hilbert-Raum سیپارابل Hilbert-Raum بولي، که یوه ګڼلوړ اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \ldots, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} \,,$$

شتون ولري. په دې حالت کې هر $v \in H$ د فوری- ودیزینه-die Fourier Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چي نسبت پورته نورم ته پولي ته تلونکي ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليک

مربع جمعه کيدونکي پرلپسيQuadratsummierbare Folgen

مربع جمعه کيدونکي پرلپسي

$$c_1, c_2, \dots, \quad c_i \in \mathbb{C}$$

هيلبرت-فضا l^2 جوړوي سبت سکالار ضرب ته

$$\langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}\,.$$

فضا l^2 د يوه سيپارابل هيلبرت-فضا H پروتو تويپ دی، ځکه چي هر توکی

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کيدی شي د د اورتوګونال بنسټ د ضريب c_k سره معلومه identifiziert شي. له دې سره باور ل ري

$$\|v\|_H = \|c\|_{l^2}\,,$$

دا په دې معنا، چي فضاوې H او l^2 ايزومورف دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

مربع انتيګراوړ توابع Quadratintegrierbare Funktionen

د يوې ورشو يا سطحې $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره $L^2(D)$ د تابع $f:\ D \to \mathbb{C}$ فضا بنايي د لاندې سر

$$\int_D |f(x)|^2\, dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle f,g\rangle_2 = \int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

له لارې منځ ته راغلی نورم $\|\cdot\|_2$.

په بدیله توګه کیدی شي $L^2(D)$ د ښویي تابع په څیر د رابندېدنې په توګه هم تعریف شي، دا په دې معنا ، چې هر مربع انتیګرالوړ تابع کېدی شي د یوې ناپای پرلپسي په توګه د زیاتځله مشتقوړ تابع f_n له لارې اپروکسیمی یا په نږدې توګه انځور شي شي:

$$\|f-f_n\| \to 0, \quad n\to\infty\,.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د بیلګي په توګه تابع

$$f(x) = |x|^s$$

په پراخیدوني یا - بعدیزې یوونګردی(دایره واحد)

$$D = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$$

تر څیرني لاندې ونیل شي.

د غونداري کواوردینات ($r=|x|$) سره لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)|^2\,dx = c\int_0^1 r^{2s}r^{n-1}\,dr = c\left[\frac{r^{2s+n}}{2s+n}\right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې f د $2s>-n$ لپاره مربع اایګرال وړ دی.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|>1\}\,,$$

تر څیرني لاندې ونیسو، نو بیا هم د غونداري کواوردینات سر لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_{\bar{D}} |x|^{2s}\, dx = c \int\limits_1^{\infty} r^{2s} r^{n-1}\, dr\,,$$

دا په دې معنا، چې f د $2s < -n$ لپاره مربع انتیګرالوړ دی.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د مربع انتیګرالوړ توابعو سوبولیف – فضا
Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

د یوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $H^k(D) = W^{k,2}(D)$ د (حقیقي - یا کومپلکس ارزښتیزو) هیلبرت-فضا په ګوته کوي. توابع د مربع انتیګرالوړ کمزورو ټوټه مشتقونو سره ، چې نظم $\leq k$ لري د سکالار ضرب

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

له لارې

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

منځ ته راغلي نورم $\|\cdot\|_{k,2}$ سره. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha| = k} \int\limits_D |\partial^\alpha f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د فوریر- لړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

په $D = [-\pi, \pi]$ باندې مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty \, ,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx} \overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

دی، د فوريې – بنسټ e^{ikx} د اورتوګوناليټي په اساس.
مشتق

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}k c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty \, ,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} k c_k e^{\mathrm{i}kx} j \overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = -2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 \, .$$

دا چې له دويم شرط لومړی لاس ته راځي، نو $f \in H^1$ د $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty$ لرو لپاره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هاردي-ليبسک فضا**Hardy-Lebesgue-Raum**

د هاردي-ليست – فضا HL د ټولو د يوونکردئ په ټيکلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

څخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f \rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{c_k} < \infty \, .$$

سره.

پوره اورتونورمالسیستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

یو اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ په هیلبرت- فضا کي پوره یا ماسیمال بلل کیږي، که

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

یو اورتونورمال سیستم ټیک هلته د هیلبرت – فضا یو اورتونورمال بنسټدی، کله چط هغه پوره وي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په هیلبرت٠فضا کي فوری-پروجکشن (پرېوستون)
Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen

د یوه وکتور v فوریي –پروجکشن په یوه هیلبرت-فضا H کي د اورتونورمالسیستم $e_1, e_2, \ldots$ ، سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n v = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و v ته ښه اپروکيميشن دی د سکالار ضرب $\langle\cdot,\cdot\rangle$ له لارې ايندوځيرت (منځ ته راغلی) نور م $\|\cdot\|$ سره، دا په دې معناچې

$$\|v - p_n v\| = \min_{q=\sum_{k=1}^{n} d_k e_k} \|v - q\|.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سړی لومړی په پام کې نيسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \le j \le n.$$

دا د $\{e_j\}$ د اورتونورماليتي څخه ترلي لاس ته راځي، ځکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \le j \le n.$$

د يوه په خوښه اپروکسيميشن $q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ لپلره باور لري

$$\|v - q\|^2 = \|v - p_n v + p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n}(c_k - d_k)e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n}(c_k - d_k)e_k}, v - p_n v \rangle + \|p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \|p_n v - q\|^2,$$

داپهدې معنا، چې نتيکاوی مينيمال کيږي، که q د فوری- پروجکشن $p_n v$ وي.

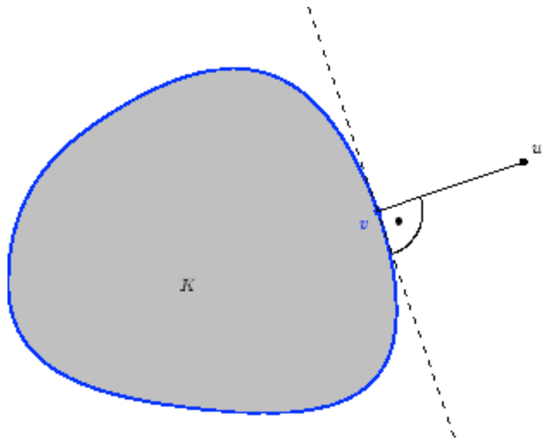
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هیلبرت- فضا باندي د کونوکسو(وتلو) ډېریو خورا ښه اپروکسیمیشن
Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen

د یوه هیلبرت-فضا H د یوه رابند کونوکس برخه ډېرئ K لپاره هر $u \in H$ ته یو یواځنی ځورابنه اپروکسیمیشن شتون لري د دې لاندې سره

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| .$$



خورابنه اپروکسیمیشن یواځنی د

$$\langle u - v, w - v \rangle \leq 0,$$

له لارې د ټولو $w \in K$ لپاره کرکتریزه(خوي تاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د وکتورونو $u - v$ او $w - v$ ترمنځ کونج پڅ دی.

په ځانګړې توګه د رابندو کرښیزو برخه فضاوو U خورا ښه اپروکسیمیشن شتون لري.

په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، داپه دې معنا، چې ناټیکاوی $u - v$ و U ته اورتوګونا دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

که

$$d = \inf_{w \in K} \|u - w\|$$

ځای په ځای کړو

او یوه پرلپسي (u_n) په K د

$$\|u - u_n\| \to d, \quad n \to \infty ,$$

سره کې وټاکو، نو د K کونوکسیټي له امله باور لري

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسې

$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2 .$$

د غبرګ اړخیز-کټمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\|(u - u_n) - (u - u_m)\|^2$$

$$= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \|(u - u_n) + (u - u_m)\|^2$$

$$\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2 .$$

دا چې د کړوړ وړو نوکانو افاده یا وېینه د $4d^2$ په لور هڅیږي، نو

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$

لرو او (u_n) په H کې یوه کوشي -پرلپسي ده، دا په دې معنا، چې یو $v \in K$ شتون لري

د $\lim_{n\to\infty} u_n = v$ او $\|u - v\| = d .$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ارزښت يواځنی دی، ځکه چي که يو بل پوله ارزښت $w \in K$ شتون لرودی د $\|u - w\| = d$ سره، نو پرلپسي $v, w, v, w, \ldots$ به لکه پورته پولې ته تلونکې وی او باید $v = w$ باور ولري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت-فضا کې اورتوګونال کومپليمنت
Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen

د يوې هيبرت-فضا H هرې رابندې لاندې – يا برخه – فضا U ته يو اورتوګونال کومپلمنت ،، دا په دې معنا، چي يوه رابنده لاندې فضا

$$U^{\perp} = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in U\} \ ,$$

شتون لري د

$$H = U \oplus U^{\perp} \ .$$

سره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

دا چي $U^{\perp}$ د H يو لاندې – يا برخه فضا ده، سيده له سکالار ضرب $\langle u, v \rangle$ څخه لاس ته راځي، او د کوښش – شوارڅ مساوات له لارې رابندوالی لاس ته راځي.
د $u \in U$ او $u \in U^{\perp}$ لپاره $\langle u, u \rangle = 0$ باور لري او له دې سره $u = 0$ همداسي

$$U \cap U^{\perp} = \{0\} \ .$$

دا چي U کونوکس ده، نو د $w \in H$ لپاره يو خورا ښه اپروکسيميشن $u \in U$ شتونلري، هغه چي نورم

$$\|w - u\|$$

ميمال کوي. که کيږدو $v = w - u$، نو د ټولو $\tilde{u} \in U$ او ټولو α لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 \leq \|v - \alpha\tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v, \tilde{u}\rangle - \alpha\langle \tilde{u}, v\rangle + \alpha\overline{\alpha}\|\tilde{u}\|^2 .$$

د

$$\overline{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u}, v\rangle}{\|\tilde{u}\|^2} \qquad \alpha = \frac{\langle v, \tilde{u}\rangle}{\|\tilde{u}\|^2},$$

همداسې
.

سره لاس ته راځي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u}, v\rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

او له دې سره

$$\langle \tilde{u}, v\rangle = 0 \qquad v \in U^{\perp} .$$

همداسې
.

$w = u + v$

دا چې دی، نو

$$H = U \oplus U^{\perp}$$

و ښوولشو.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په هیلبرت-فضا کې د بیسل-نامساوات
Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen

په یوه هیلبر-فضا H کې د هر اورتونورمالسیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

د ټولو $v \in H$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ښونه فقط یوه ګڼلوړ اورتونورمال سیسم لپاره مخ ته بیایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي دې $i_1, i_2, \ldots, i_n$ د ايدکشن(پيژند نخښو) يوه په خوښه پرلپسي په I کې. د کومپلکی اعدادو يوهپه خوښه پرلپسي $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ لپاره د e_i له اورتونورماليتي څخهه لاس ته راځي

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^{n} |c_{i_k}|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2 .$$

د $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$ ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \leq \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسې

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \leq \|v\|^2 .$$

دا نامساوات د پولې ته تګ $n \to \infty$ سره هم ساتلی پتې کيږي.
ليکونکې: اېپ، هيوليګ

په هيلبرت- فضا کې د فورير(فوريې) وديزيينه
Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen

په يوه هيلبرت-فضا H کې د يوه پوره اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره سړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = \sum_{i \in I} \langle u, e_i \rangle e_i$$

د u د فوريې – وديزينه بولي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په هيلبرت – فضا کې د پارزيوال-کټمټوالی

Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا H د هر (نه په اړيينه توګه ګڼلوړ) پوره اورتونورمال سيستم
$\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H\,,$$

دا په دې معنا، چې نورم v د بنسټ ضريبونو د l^2 -نورم سره سر خوري.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ښوونه سيپارابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بيول کيږي.

د سکالار ضرب د ناپرېکيدني له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n \to \infty} \left\langle v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle = 0$$

دی،، د ټولو e_j لپاره، دا په دې معنا، چې

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2$$

داپه دي معنا، چې د پارزيوال – کتوټوالی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په يوه حقيقي (کومپلکس) توپولوژيکي وکتورفضا V باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز بنکشنل Λ يو ناپرېکيدونکی کرښيز تا بع دی د V په پسې.($\mathbb{C}$) $\mathbb{R}$.

په يوه نورمي وکتورفضا کې د Λ ناپرېکيدنوالی ورته دی په صفر باندې د يوونغونډاري يا واحدغونډاري د څېرې ته. په دې حالت کې سرې

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

د کرښيز فنکشنل د نورم په حيث تعريفوې يا پېژند ورکوي.

د نورم د هوموجينيتي په بنسټ هم ورته تعريفونه

$$\|\Lambda\| = \sup_{v\neq 0} \frac{|\Lambda v|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\Lambda v|$$

شوني دي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د دې لپاره چې وښايو، چې د ناپرېکيدنې څخه محدودوالی لاس ته راځي، نيسو، چې Λ په نورمي وکتورفضا باندې ناپرېکيدونکې دی، په صفر د يوونغونډاري څېره يا عکس نامحدود دی، دا په دې معنا، چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره په V کې يو v_n شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\|v_n\| \leq 1$ او $|\Lambda v_n| > n\,.$

سره.

که کيږدو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n\,,$$

نو لاس ته راځي

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{n}\,,$$

دا په دې معنا،چې $u_n \to 0$ د $n \to \infty$ لپاره او د فنکشنل د ناپرېکيدني په بنسټ له دې سره لاس ته راځي $\Lambda(u_n) \to \Lambda(0)$. د فنکشنل د کريزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو $v \in V$ لپاره او له دې سره $|\Lambda u_n| \to 0$. له بله اړخه دی

$$|\Lambda u_n| = \frac{1}{n} |\Lambda v_n| > 1\,,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپرېکيدنوالی لاس ته راځي، که سړی ړنيسي، چې

$$|\Lambda u| < c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په صفر د يوونغونداري د ټولو u لپاره. که اوس سړی يوه په V کي په خوښه پرلپسي (v_n) ولري د $v_n \to v$ او $v_n \neq v$ سره د ټولو n لپاره، نو سړی لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left|\Lambda\left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|}\right)\right| \leq \|v_n - v\| c \to 0\,,$$

دا په دې معنا، چې د فنکشال ناپرېکيدنه لرو.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د پيلګې لپاره دا کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول $f \in C[0,1]$ لپاره رانيسو.

د په $C[0,1]$ د ماکسيموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|\,,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |f(1)| \leq \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|f\|_\infty = 1\,,$$

دا به دې معنا، چې فنکشنال ناپرېکيدونکی دی. د تابع (فنکشن) $f(x) = 1$ سره د ټولو $x \in [0,1]$ لپاره د فنکشنال د نورم لپاره راکوي

$$\|\Lambda\| = 1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د دې لپاره په $C[0,1]$ باندې L^2-نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} ,$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1} x^n , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

نوو سړی لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1) x^{2n} \, dx = 1 ,$$

مگر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوړي یا له ټول پولو لوییږي، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکیدونکی دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هان-بانخ د دوام(پسې تلني یا مخ ته بیوني) جمله

Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د یوه نورمي وکتور فضا پ V ه یوه لاندېفضا یا برخه فضا U باندې هر ناپرېکیدونکي کربنیز فنکشنال Λ ته یوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په V یو ناپرېکیدونکی کربنیز فنکشنال $\tilde{\Lambda}$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v \in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u \in U, \|u\|=1} |\Lambda u| .$$

سره

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه د $L^2(-1,1)$ په لاندې فضا

$$U = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

سره کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

رااخلو.

يو تابع يا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له U څخه لاندې نورم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2)^2 \, dx = 2a^2 + \frac{2}{3}\, b^2 + \frac{4}{3}\, ac + \frac{2}{5}\, c^2 \,.$$

له دې سره له Λ څخه په U لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0 \neq f \in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c) \neq (0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2} \,.$$

د ځای په ځای یا کلک a د $b = 0$ ، $c = -\frac{5}{3}\,a$ لپاره مخرج یا ماتلاندې مینیمال کیږي ، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,.$$

په روښنه توګه په L^2 باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکیدونکي ده. د دې لپاره چې د Λ لپاره یو پرمخ بیونه وګټو ، نو ایښوونه

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}_{p(x)} f(x)\, dx$$

کوو او ضریبونه α, β, γ دغوښتو څخه ټاکو، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ سره د U په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وخوري.

$$\Lambda \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma \\ \frac{2}{3}\beta \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \tilde{\Lambda} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} .$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}.$$

د کوشي-شوارڅ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda} f| \leq \|p\|_2 \|f\|_2 ,$$

یعني $\|\tilde{\Lambda}\| \leq \|p\|_2$. ډا چې $p \in U$ نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \geq \frac{|\tilde{\Lambda} p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^{1} |p(x)|^2 \, dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2 .$$

دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3}\,\frac{9}{8}\left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2},$$

دا په دې معنا، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ نورمساتونکی یا - وفادار پر مخ وړنه ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دوال- یا دوه ګوني فضا Dualraum

دیوه نورمي وکتور فضا V دوال- یا دوه ګوني فضا V' په V د ناپرېکېدونکو کرښیزو فنکشالونو Λ لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په V' نخښنه شوی یو بانخ-فضا ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سيده ليدل کيږي، چې V' يوه نورمي وکترفضا ده. د ښوول يې د V' پروه والى دى.

وي دې (Λ_n) يوه کوشي- پرلپسي په V' کې دا په دې معنا دى، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_0 شتون ل ري، داسې چې دټولو $n, m > n_0$ لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر $v \in V$ لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\||v| < \varepsilon |v|$$

داپه دې معنا، چې $(\Lambda_n v)$ يوه سکالار کوشي – پرلپسي ده، نو يو پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ لري. دا د $\Lambda v = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ له لارې تعريف شوى تابع کرښيز او له پورته تخمينونو نورم پرلپسي د ناپرکيدني له لارې د $m \to \infty$ لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \leq \varepsilon |v|$$

د $n > n_0$ لپاره. له دې لاس ته راځي،چې $\Lambda_{n_0} - \Lambda$ او له دې سره هم $\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) - \Lambda_{n_0}$ ناپرېکيدونکي دى، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د $n > n_0$ لپاره باور لري،دا په دې معنا، چې

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \Lambda\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

بيدوالفضا (دوه دوه بيزه فضا) Bidualraum

د يوې نورمي وکتورفضا V بيدوال-يا بيدوه بيزه فضا V'' د V' دوه بيزه فضا ده. دا

چې هر توکی $v \in V$ دې

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

يو ناپريکيدونکی کربنيز فنکشنال په V' جوړ کړي، کيدی شي V د V'' يوې لاندې فضا سره جوړ شي يا منځ ته راشي. باورلري

$$V'' = V\ ,$$

نو V رفلکسيو يا هنداروني ببل کيږي.

رفلکسيو باناخ-فضاوې فضاوې $L^p(D)$، $1 < p < \infty$ دي، همداسې هر پاي بعدي(پراخيدوني) وکتور فضاوې. $L^1(D)$ او $C[0,1]$ د نا-هنداروني بيلګې باناخ - فضا دي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د p - انتيګراوړ توابعو دوالفضا

Dualraum der p-integrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ او $1 \leq p < \infty$ لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس یوائې $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$ اینکلوزیون یا خوندیونه ښوول کېږي.

هر $g \in L^q(D)$ ته د

$$\Lambda : \quad f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x)g(x)\,dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لارې په $L^p(D)$ یو ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال تعریف دی، خکه چې هولدر نامساوت پسې د د انتیګرالونو لپاره دی

$$\left|\int_D f(x)g(x)\,dx\right| \le \int_D |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

د $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p=1} |\Lambda f| \le \|g\|_q .$$

د $f = \mathrm{sign}(g)|g|^{q-1}$ لپاره نامساوات تیره یا تیز دي، دا په دې معنا، چې سږی لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ریسځ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د یوې هیبرت-فضا H او یوه کره یا کلک $v \in H$ لپاره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda : \quad u \mapsto \Lambda u = \langle u, v \rangle, \quad \forall u \in H$$

له لارې يو ناپرېکيدونکی کربنيز تابع په H د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعريف دی.

معکوس هر يو ناپرېکيدونکي کربنيز فنکشنال $\Lambda \in H'$ ته تيک يو $v \in H$ شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بېلګې په توګه د مربعجمعه وړ پرلپسې l^2 رانيسو. وي دې $\Lambda \in (l^2)'$ ، نو تيک يوه پرلپسې په l^2 کې شتنو لري د

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c \in l^2 .$$

سره.

د d څخه و Λ ته ديواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا l^2 د خپل دوال- يا دوه ګونې فضا $(l^2)'$ سره و ښوول شي ياو پيژندل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه مربع انتيګرا لوړ توابع $L^2(D)$ په ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رانيسو. وي دې $\Lambda \in L^2(D)'$ ، نو تيک يو تابع $g \in L^2(D)$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \langle f, g \rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad \forall f \in L^2(D)\,.$$

سره.

له g څخه و Λ ته د يواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا L^2 د خپلې دوال- يادوه ګوني فضا $(L^2)'$ سره وپيژندل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

کمزوري پولې ته تلنه Schwache Konvergenz

په يوه نورمي شوي وکتورفضا V يوه پرلپسې (v_n) کمزېرې پولې v ته ځي، که

$$v_n \rightharpoonup v\,,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \to 0, \quad \forall\,\Lambda \in V'\,.$$

د Λ د ناپرېکيدنې په بنسټ هره پولې ته تلونکې پرلپسې

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\| \to 0$$

هم کمزورې پولې ته تلونکي ده. معکوسوالی يا په ځتوالی په ټوليزه توګه باور نه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د بيلګې په توګه په فضا کې مربع جمعه کيدونکې پرلپسېو l^2 کې پلپسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= (0,0,0,\ldots)$	e
$= (1,0,0,\ldots)$	e^1
$= (0,1,0,\ldots)$	e^2
$\vdots$	

رانیول کیږي. دا چې هر ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال Λ په l^2 د رسسځ(وبینه: ریڅ) د انځوریزې جملې

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

په حیث د کلک یا کره $d \in l^2$ سره لیکل کیږي، نو لاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d \rangle = \overline{d_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ځکه چې d مربعجمعه وړ دی، دا په دې معنا، چې دی

$$e^n \rightharpoonup e, \quad n \to \infty.$$

مگر په ر حالت

$$\|e^n - e\| = 1,$$

داپه دې معنا، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^n \not\to e\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

محدود کرښيز اوپراتورونهBeschränkte lineare Operatoren

د نورمي وکتورونو فضاو تر منځ يو کرښيز تابع

$$L:\quad V \to W$$

محدود کرښيز اوپراتور بلل کيږي، که د اوپراتور نورم

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پای وي. محدودوالی د L د ناپرېکيدنوالي سره په يوه معنا دی.

سړی کرښيز اوپراتور هغه په کرښيز الجبر کي د کرښيز تابع په ځای کاروي، چي داناپای –بعديز Kontext غوره وښايو يا را مخ ته کړو.

د ټولو کرښيزو مخدودو له V څخه د W پسي اوپراتورونو د $\mathcal{L}(V,W)$ سره په نخښه کيږي. دا باناخ-فضا ده، که W يوه باناخ-فضا وی.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

انتيګرال اوپراتور Integraloperatoren

د يوه تابع

$$K:\quad D\times D \ni (x,y) \mapsto K(x,y) \in \mathbb{R},\quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د

$$(Lf)(x) = \int_D K(x,y)f(y)\,dy$$

له لارې يو کرښيز اوپراتو تعريفيږي. د مخته ځيري- يا تابع - او ډځيري فضا(تابع تابع) V او W د داسې په نامه زړي تابع K د خويونو په واک کې دي.

په لاندې کې يوه څو بيلګې او همداسې د اړونده اوپراتور نورمونه ورکړ شوې.

- K په $\overline{D} \times \overline{D}$ ناپرېکيدونکې، D محدود ده.

$$L: \quad C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$$

$$\|L\| = \max_{x\in\overline{D}} \int_D |K(x,y)|\,dy$$

- $K \in L^2(D \times D)$

$$L: \quad L^2(D) \to L^2(D)$$

$$\|L\| \le \left(\int_D \int_D |K(x,y)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}$$

- $D = \mathbb{R}^n$, $K(x,y) = \varphi(x-y)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L:\quad L^p(D)\to L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)|\,dz$$

د کرښيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه Konvergenz linearer Operatoren

د محدودو کرښيزو اوپراتورونو پرلپسيو لپاره لاندې دوه کليمې کارول کيږی.

- تکي ډوله پولې ته تلنهPunktweise Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ تکيډوله د يوه اوپراتور L په لور پولې ته ځي، که

$$L_n v \to Lv,\quad \forall v \in V\,.$$

- برابرډوله پولې ته تلنه Gleichmäßige Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ برابرډوله ديوه اوپراتور L په لور پولې ته تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - Lv\| \to 0\,.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه تکي ډوله پولې ته تلنه راکوي، معکوس په ټوليزه توګه باور نه لری.

د برابر ډوله محدودوالي اصول Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوې باناخ-فضا V په یوه نورمي وکتور فضا W کې د یوې محدودې کرښیز
اوپراتورونو (L_n) پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V\,,$$

،

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty\,,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابرېوله مخدودوالی.

د باناخ-شتاینهوز جلمه Satz von Banach-Steinhaus

وي دې V, W باناخ-فضا او U یوه د V ټینګه یا(غلیضه) برخه دېرئ، نو بیا یوه
پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټیک هلته ټکي دوله و یوه کرښیز محدود اوپراتور L ته ځي،

$$L_n v \to L v\,, \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$\forall u \in U\,, \quad L_n u$$

پولې

$$\sup_n \|L_n\| < \infty\,.$$

(b)

د باناخ شرایط a) او b) دې پوره وي او v دې یو په خوښه وکتور له V څخه وي. دا
جي U په V کې ټینګه یا کیمنډلې ده، نو د $\varepsilon > 0$ لپاره یو $u \in U$ شتون لري،
داسې چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|u-v\| < \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} \,.$$

پرلپسۍ $(L_n u)$ د نیونې یا فقضیي له مخې پولې ته ځي، یعنې یو n_0 ایندکس یا پیژندنخښه شتون لري، داسې چې د $m, n > n_0$ لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \ \leq \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\mathrm{p}\,\|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} = \varepsilon \,,$$

داپه دې معنا، چې $(L_n v)$ په W کې یوه کوشي-پرلپسي ده. دا چې W پوره ده، ن و پوله ارزښت شتون لري، یعني

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv \in W \,.$$

د L محدودوالی او کرښیزوالی ترلی د نورم له ناپرېکیدنې لاس ته راځي.

د معکوسونې لپاره دې فقط شرایط b) و ښوول شي. دا د برابرېدوله محدودوالي له شرایطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، چې $\sup_n \|L_n v\|$ د ټولو v لپاره پای دی.

وي دې

$$s_n f = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتیګرال لپاره نږدېونه

$$sf = \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

که وزنونه $w_{i,n}$ زیاتیز یا مثبت وي او s_n ټیک دی د $< n$ درجې پولینوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$sf = \lim_{n \to \infty} s_n f$$

د $f \in C[0,1]$ لپاره.

ښوونه د باناخ-شتاینهوز له جملې ترلی لاس ته راځي، په کارول شوی په $s_n \in \mathcal{L}(C[0,1], \mathbb{R})$ او د $C[0,1]$ پولینومونو ټینګه برخه فضا باندې. د پولینوم p لپاره د $s_n p$ پولې ته تلنه روښانه دی،، ځکه چې $s_n p = sp$ دی د $n > \mathrm{Grad}\, p$ لپاره.

د دې لپاره چې برابرډوله محدودوالی وښایو، سړی په پام کې نیسي، چې

$$\sum_{j=1}^{n} w_{j,n} = 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې s_n د ثابتو یا د تل همغو توابعو $f(x) = c$ لپاره تېک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |s_n f| = 1.$$

کومپاکت اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر ةنځ یو اوپراتور $L \in \mathcal{L}(V, W)$ کومپاکت دی، که د V په W کې د یوونغونډاري(واحدغونډوسکي یا -کرې) B څېره یا عکس نسبي کومپاکت وي، دا به دېمعنا، چې په B کې د هرې پرلپسي (v_n) لپاره پرلپسي (Lv_n) یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسي ولري.

د بېلګې په توګه په $\mathcal{L}(V, W)$ کې دوه اوپراتورونه د $V = W = l^2$ سره رانیسو.

- اوپراتور Der Operator

$$L: \quad (c_1, c_2, c_3 \ldots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \ldots)$$

کومپاکت نه دی، خکه چې د بیلګې په توګه د پرلپسيو پلرپسي

$= Le_1 = (1, 0, 0, \ldots)$	e_1	
$= Le_2 = (0, 1, 0, \ldots)$	e_2	
$\vdots$	$\vdots$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

په B کې پولې ته تلونکې برخه پرلپسي نه لري.

- Der Operatorکرښيزه تابع

$$L: \quad (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \ldots) = (\tilde{c}_j)\,,$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاکت دی. د دې لپاره دې وي (c_n) یوه په خوښه په B کې د پرلپسیو پرلپسې. نو سړی په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توګه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \ldots)$$

لپاره دا پرلپسي په هر ځاي $c_{n,j}$ کې محدود دي. یعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1\,.$$

که د دې پرلپسی هر فقط د ټولو پرلپسي توکو لومړني ځایونه $(c_{n,1})$ تر ځیرنې لاندې ونیسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ یوه برخپرلپسي $(c_{n_k(1)})$ پیداکړو، د کومو لپاره چې لومړي ځایونه پولې ته ځي. که د دې برخپرلپسیو $(c_{n_k(1)})$ څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځایونه

$$(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}),$$

راونیسو، نو بیرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپرلپسي پیداکولای شو، دکومو لپاره، چط د وه کونتړې پرلپسې یا ورتر پرلپسی

$$(d_k) = (c_{n_k(k)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره نو د هر کره J لپاره د J د لومړني ځايونو وکتور $(d_{k,1},\dots,d_{k,J})$ پولې ته ځي.

د دې لپاره چې وښايو، چې (d_k) غوښتوني برخپرلپسي ده، نو يوه د خوښي $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس K داسې ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلپسي (d_k) د پورته جوړښتاصولو له مخې د لومړنيو K ځايونو لپاره پولې ته ځی، نو يو ايندکس N شتون لري،دا سې، چې د $k,l > N$ لپاره

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د $k,l > N$ لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\overbrace{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}^{\leq 4}}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاو تر منځ يو په باندې(surjektiver) محدود کرښيز اوپراتور L يوه وازه ډيرئ په يوه وازه ډيرئ ځېږه کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که L په کې (injektiv) هم وي، نو محدودوالی له L^{-1} لاس ته راځي. له دې سره د a, b حقیقي عدونه

$$a\|v\| \leq \|Lv\| \leq b\|v\|$$

سره شتون لري د L د مخته ځېرې ځخه د ټولو v لپاره، چېرته چې دویم نامساوات سملاسې د L د محدودوالي ځخه لاس ته راځي.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

صرف نظر نه شي کولای، چې د عملیه یا اوپراتوري کیدنه L د باناخ-فضاو تر منځ ده. د دې ترمنځ کتمتوالی $L \in \mathcal{L}(V,W)$ څیړل کیږي، د کوم سره چې $V = l^1$ د نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښه کیږي او ځېره –فضا W د نورم

$$\|w\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښه کیږي. د

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1$$

له امله کتمتوالی L یو په (bijektiver) محدود کرښیز اوپراتو دی، مګر داچې

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_\infty = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\|_1 = n$$

د $e_1 = (1,0,0,\dots), e_2 = (0,1,0,\dots),\dots$ سره، L^{-1} نامحدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

د رابند یا بند ګراف جمله Satz vom abgeschlossenen Graphen

که د بانخ – فضاو ترمنځ اوپراتور $L : V \to W$ رابند وي، دا په دې معنا،چط له

$$v_n \to v \quad \text{او} \quad w_n = Lv_n \to w$$

لاس ته راځي، چې $w = Lv$ دی، نو L محدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

له دې بیلګې څخه لیدل کیږي، چط سرې د رابند ګراف په جمله کې په نیوني یا فرضیي صرف نطر نه شي کولای، داسې چې L د باناخ-فضاو ترمنځ عمل کوي یا اوپریشن کوي. د دې لپاره دفرنځیال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V,W) \ni L : \quad f \mapsto f'$$

رانیسو، د کوم سره چې $V = C^1[0,1]$ د سوپریموم نورم $\|\cdot\|_\infty$ سره په نخښه شوی دی او $W = C[0,1]$ سره هم سوپریمومنورم دی. L یوو کربنیز اوپراتور دی، ځکه چې د $f(x) = x^n$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|Lf\|_\infty = n$$

باور لري

محدود نه دی. مګر د L ګراف رابند دی، له دې امله چې د یوې پرلپسې (f_n) لپاره
په V کې د $f_n \to f \in V$ ، $Lf_n \to g \in W$ سره باور لري $f_n \to f$ برابر
ډوله دی، $f_n' \to g$, پرابر ډوله دی.

L له دې لاس ته راځي،چې f مشتقوړ دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

په هیلبرت-فضا کې د یوه کرښیز اوپراتور ماتریکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

یو کرښیز اوپراتو

$$L: \quad H \to H$$

په یوه سیپارابل هیلبرت-فضا د اورتوګونال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ سره کیدی شي د
ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_{j,k}): \quad a_{j,k} = \langle Le_k, e_j \rangle$$

له لارې روښانه شي. باور لري

$$w = Lv \leftrightarrow w_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} v_k \,,$$

چیرته چې $u_l = \langle u, e_l \rangle$ د بتسټ ضریبونه ښایي یاپه ګوته کوي.

لیکونکي اپپ، هیولیګ

د فوریر-پروجکشن د پولې ته تلنې او د L کرښیزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j = \langle Lv, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k L e_k, e_j \right\rangle .$$

که پوله او زیاتون یا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سړی د L ماتریک انځورونه لاس ته راوړي.

لیکونکي اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه به د یوه 2π -پریودي یا 2π - تل بیرته راګرځیدوني تابع

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e_k, \quad e_k(x) = e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښیز اوپراتورونه رانیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: ضرب $L : f \to \varphi f$: د فوریر – ضریبونو له مخې د ماتریکس- راوړنو Matrix-Einträge لپاره سړی لاس ته راوړي

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{\mathrm{i}(k-j)x}\, dx = \varphi_{j-k}\,.$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د f ضرب د φ سره د f او φ د فوریي- ضریبونو یو دیسکرت قتونه په ګوته کوي.

دویم قتونه غبرګونه $L : f \to \varphi \star f$: که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) e^{\mathrm{i}(kt-jx)}\, dt\, dx$$

په تعریف کې سړی $y = x - t$ بدل کړي، نو د

$$e^{\mathrm{i}(kt-jx)} = e^{\mathrm{i}((k-j)x)} e^{-\mathrm{i}ky}$$

له امله انتیګرال په y لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k e^{\mathrm{i}(k-j)x}\, dx = 2\pi \varphi_k \delta_{j,k}\,.$$

د قاتوني ماتریکس دوه کونجتړی یا دیاګونال دی، د f د فوریي- ضریبونه د 2π –واره د φ فوری-ضریبونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

ادجونګيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سيپارابلې هيلبرت-فضا H باندې د يوه محدود کربنيز اوپراتور L لپاره د

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L^\star w\rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسې په نامه ادجونګيري اوپراتور $L^\star$ د ماتريکس

$$(a^\star_{j,k}) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيږي. که $L^\star = L$ باور ولري، نو سړی L پخپله يا د ځان سره ادجونګيري يا هرميتيک بولي.

د بيلګې لپاره په $L^2(D)$ يو انتيګرال اوپراتور رانيسو. K دې يو زړې تابع وي د

$$\int_D \int_D |K(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \,,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int_D K(x,y) f(y) \, dy$$

له لارې د هر $f \in L^2(D)$ لپاره يو کربنيز اوپراتو تعريفيږي. د انتيګرال لپاره د کوشي-شوارڅ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int_D |(Lf)(x)|^2 \leq \int_D \int_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \int_D |f(y)|^2 dy \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې L يو محدود كرښيز اوپراتور دی په $L^2(D)$ د

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx\right)^{1/2} .$$

سره.

اړونده ادجونګيري اوپراتو $L^\star$ د

$$(L^\star g)(x) = \int\limits_D \overline{K(y,x)} g(y) \, dy$$

سره تعريفيږي، دا په دې معنا، چې L تيک هلته د ځان سره يا خپل ادجونګيري دی، كه نږدې هرچيرته

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

باور ولري.

يونيتار اوپراتور Unitärer Operator

په يوه هيلبرت-فضا كي يو محدود كرښيز اوپراتور $Q : H \to H$ يونيتار دی، كه وي

$$QQ^\star = I = Q^\star Q \,,$$

چيرته چې I كېوتوالی په ګوته كوي.

د يونيتار اوپراتورونو ورته خويې خووني يا كركتريزه كوني دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

a)

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H\,,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H\,,$$

کوم ته چې هر چطرته د Q سورجکتیویتې یا په باندې والی له مخه نیول شوی دی.

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

که Q یونیتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې Q په باندې یا سورجکتیو ده او

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, Q^{\star}Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H,$$

ځکه چې $Q^{\star}Q = I$ ، دا په دې معنا، چې خوبې (a.

دا ساده لیدل کیږي،چې له خوي یا کرمتریزه (aڅخه د $v = w$ سره سملاسي (b لاس ته راځي.

بالاخره له (b څخه لاس ته راځي

$$\langle Q^{\star}Qv, v\rangle = \langle Qv, Qv\rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v\rangle, \quad v \in H$$

د $L = Q^{\star}Q - I = L^{\star}$ سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v\rangle = 0$$

د ټولو $v \in H$ لپاره، همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 = \langle L(v+w), v+w\rangle = \langle Lv, v\rangle + \langle Lv, w\rangle + \langle Lw, v\rangle + \langle Lw, w\rangle$$

$$= \langle Lv, w\rangle + \langle w, Lv\rangle = \langle Lv, w\rangle + \overline{\langle Lv, w\rangle}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\langle Lv, w\rangle$$

د ټولو $v, w \in H$ لپاره، که په ځتنګړې توګه کيږدو $w = Lv$ نو لاس ته ترې راځي

$$\mathrm{Re}\langle Lv, Lv\rangle = \langle Lv, Lv\rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره $Lv = 0$ د ټولو $v \in H$ لپاره، نو $L = 0$ همداسي

$$Q^{\star}Q = I\,.$$

د بېلګې په توګه په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې سکالار شوی د فوريې – ترانسفورميشن رانيسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې $\|Lf\| = \|f\|$ دی ، نو L يونيتار دی، او اديونکيري اوپراتور د، اړونده سکالار شوی، د معکوس فوری-ترانسفورميشن له لارې ورکړ شوی دی:

$$(L^{\star}g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه کرښیز اوپراتور آیګن ارزښتونه

Eigenwerte eines linearen Operators

که د یوه V وکتور فضا یوه کرښیز اوپراتور L لپاره په خپل ځانګي باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو λ آیګن ارزښت بولو او v د آیګنوکتور په حیث(همداسې دیوه وکتور فضا V لپاره آیګن فنکشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آیګن فضا بلل کیږي او $m_\lambda = \dim E_\lambda$ د آیګن ارزښت ډېرو اروالی بولو.

د بیلګې لپاره به یو ناپرېکیدونکی نا- ثابت 2π - پریودیکي(تل بیرته راګرځیدونی) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښیز اوپراتورونه راونیول شي.

(i) Der Multiplikationsoperator ضرب اوپراتور

$$L: \quad f \mapsto \varphi f$$

آیګن ارزښت نه لري، ځکه چې له $Lf = \lambda f$ په $\varphi(x) = \lambda$ ، $x \in (-\pi, \pi)$ لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دقاتولو اوپراتور (ii) Der Faltungsoperator

$$L: \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t)\, dt$$

اکسپوننشل تابع $e_j(x) = e^{\mathrm{i}jx}$ د آیګن تابع په څیر لري. باور لري

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}k(x-t)} e^{\mathrm{i}jt}\, dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \varphi_j e_j(x)\,,$$

داپه دې معنا، چې $2\pi\varphi_j$ اړونده ایګن ارزښتونه دی.

د هرمیتیکي اوپراتورونو آیګن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د یوه هرمیتیکي اوپراتور $L: H \to H$ آیګن ارزښتونه حقیقي دي او آیګنوکتورونه و مختلفو أیګن ارزښتونو ته اورتوګونا دي.

که L هرمیتیکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v\rangle} = \overline{\langle v, Lv\rangle} = \langle Lv, v\rangle\,,$$

دا په دې معنا، چې $\langle Lv, v\rangle$ د ټولو $v \in H$ لپاره حقیقي دی. اوس دې $v \neq 0$ د آیګن وکتور وي و آیګن ارزښت λ ته، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle Lv,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v,v\rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسي

$$\lambda = \frac{\langle Lv,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$$

حقیقي دي.

که $w \neq 0$ د L آیګنوکتور وي و آیګن ارزښت μ ته، نو باور لري

$$\lambda\langle v,w\rangle = \langle Lv,w\rangle = \langle v,Lw\rangle = \mu\langle v,w\rangle$$

او له $\lambda \neq \mu$ سره

$$\langle v,w\rangle = 0\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د یوه هرمیتیکي کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

د یوه کومپاکت هرمیتیکي اوپراتور $L : H \to H$ لپاره، $\|L\|$ یا $-\|L\|$ د L یو آیګن ارزښت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه په دوه پلونو(قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کیږي.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle| = \|L\|$$

ښوول کیږي..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v\rangle| \leq \|Lv\| \|v\|$$

سره سړی سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\| .$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په ځتوالی $\|L\| \leq s$ وښوول شي، لومړی په پامې نیسو، چې د په خوښه حقیقي $\alpha > 0$ لپاره لرو

$$\left\langle L(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle$$

$$= \alpha^2 \langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\alpha^2\langle Lv,v\rangle + \langle LLv,v\rangle + \langle Lv,Lv\rangle - \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv,v\rangle$$

$$= 4\langle Lv,Lv\rangle = 4\|Lv\|^2 .$$

د

$$|\langle Lv,v\rangle| = \|v\|^2\left|\left\langle L\frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right| \le s\|v\|^2$$

سره او د غبرګاړخيز – يا مازی الاضلاع کټمټوالي سره له دې لاس ته راځي

$$\|Lv\|^2 \le \frac{s}{4}\left(\left\|\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2 + \left\|\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2\right)$$

$$= \frac{s}{2}\left(\alpha^2\|v\|^2 + \frac{1}{\alpha^2}\|Lv\|^2\right) .$$

که په ځانګړې توګه کيږدو

$$\alpha = \left(\frac{\|Lv\|}{\|v\|}\right)^{1/2}$$

نو راکوي

$$\|Lv\| \le s\|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داپه دې معنا، چې $\|L\| \leq s$.

له (i) د (ii) Nach (i) existiert eine Folge (v_n) in H mit $\|v_n\| = 1$ und

مخې په H کې یوه پرلپسې (v_n) شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n \rangle| \to \|L\|,$$

سره، دا په دې معنا، چې یوه برخه پرلپسې (v_{n_k}) شتون لري د

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k} \rangle \to \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\|.$$

سره.

اوس فقط ښایو، چې

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \to 0$$

د دې لپاره په پام کې نیسو $\|Lv\| \leq \|L\|\|v\| = |\lambda|\|v\|$ او

$$Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k} \rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k} \rangle + |\lambda|^2$$

$$\lambda|^2\|v_{n_k}\|^2 - \overline{\lambda}\langle Lv_{n_k}, v_{n_k} \rangle - \lambda\langle v_{n_k}, Lv_{n_k} \rangle + |\lambda|^2,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې ښی اړخ د ∞ $\rightarrow$ k لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هڅيږي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو سپکترال انځورونه

Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

يوه کومپاکت هر ميتيکي اوپراتور $L : H \rightarrow H$ ته په يوه هيلبرت-فضا يو اورتونورمل بنسټ له آيګن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \ldots,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آيګن رازښتونه λ_j يوه همغږيزه صفرپرلپسي جوړوي، يعنې

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots, \quad \lambda_j \rightarrow 0\,.$$

نسبت دې بنسټ ته L دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j\,.$$

ښوونه يې په ډېرو برخه پلونو)(قدمونو) کې پلی کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د e_j جوړښت. د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو نورم د خویونو په بنسټ یو آیګن ارزښت $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ شتون لري د لاندطي سره

$$|\lambda_1| = \|L\| \,.$$

اوس سړی په پام کې نیسي، چې L د آیګنوکور e_1 څخه غزېدلي لاندې فضا E_1 اوتوګونال کومپلمنت ایناریانت پرېږدي. د $v \in E_1^{\perp}$ لپاره دی

$$\langle Lv, e_1 \rangle = \langle v, Le_1 \rangle = \lambda \langle v, e_1 \rangle = 0,$$

داپه دې معنا، چې $Lv \in E_1^{\perp}$. د دې پسې یا د دې په تعقیب L همداسې په $E_1^{\perp}$ باندې یو کومپاکت هرمیتیکي اوپراتور دی. د نورم خوی یا کرکتریزه بېرته یو آیګن لرزښت $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ راکوي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^{\perp}}\| \,.$$

د λ_2 ارزښښت $\leq |\lambda_1|$ دی ، خکه چې د یوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړیږي.

اوس سړی کړی شي جوړښت ایندوکتیو مخ ت ه بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^{\perp}}\|$$

د لومړیو n اوتوګونال آیګنوکتورونو کرښیز پوښ Hülle E_n سره. دا تلنلار پرې کیږي، که $L|_{E_n^{\perp}} = 0$ وي، داپه دې معنا، چې که

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dim \mathrm{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دويم: د صفر 0په لور پولي ته تلنه: وړاندنيونه، چې $\lambda_j \geq \lambda > 0$ د ناپاى ډېرو j لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لاربنودوي. د L د کومپاکتوالي په بنسټ د $\{e_1, e_2, \ldots\}$ څېره يا عکسدا لاندې محدوده ډېرئ يا سټ

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \ldots\}$$

نسبي کومپاکت ده، بايد يوه پولي ته تلونکې برخه پرلپسي يې خوندي لرودې وی. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشونې ده.

دريم: د L انځورونه: د جوړښت وروسته $e_1, e_2, \ldots$ يو اورتونورمال بنسټ دی د

$$H = \mathrm{Bild}\, L \oplus \ker L\,.$$

لپاره.

دا وديزېنه ترلې د کرښيزوالي څخه لاس ته راځي، چېرته چې آيګنوکتورونه، کوم چې د $\ker L$ لپاره بنسټ جوړوي، طبعأ ترې تيريدلی شو يا صرف نظر ترې کولای شو.

شتورم-ليوويل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Lu = -(pu')' + qu \qquad = f \quad \text{auf} \quad (0,1),$$

$$u(0) = u(1) \qquad = 0,$$

د ناپرېکيدونکي، کره همغږيزو توابعو p, q سره يو ځانګړی شتور-ليوويل پرابلم دی. د کومپاکت-هرميتيکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورنې سره کيدی شي يو اورتوکورمال بنسټ $e_1, e_2, \dots$ شتون د $L^2(0,1)$ لپاره د L آيګن توابعو څخه وښوول شي، د ايګن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

او $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ سره . د دې بنسټ په مرسته کيدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوينا کيدی شي نوره هم تيزه شي. دا مګر له دې برسيره نور فکر کونې ته اړتيا لري.

د آيګن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د ټوليزې تيوريڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کيږي.

لومړی: د $f = 0$ لپاره د ژئ پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د u سره ضرب ټوټه انتيګرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0} (u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، یعني $u = 0$. د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژئ پرابلم د خوښې $f \in L^2(0,1)$ لپاره یو یواځنی حل $u \in C^1[0,1]$ لري.

دویم: دا حل u د f کرښیز په واک دی یا کرښیز تابع دی، نو هر L ته یو معکوس اوپراتور A شتون لري:

$$f \to u = Af\,.$$

دریم: د ټوټه انتیکریشن پهمرسته سرې ښايي، چې A د ځان سره – یا خپل ادجونګیري ده. د $u = Af$ ، $v = Ag$ سره دی

$$\langle Af, g\rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag\rangle\,.$$

څلورم: د $u = Af$ سره د ضرب له مخې د دفرنشل مساوات د u سره لاس ته راځي او انتیګریشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c\,\|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_0\,\|u\|,$$

د کوم سره چې $c > 0$ د p او q لپاره یوه پورته بند یا بندیز دی، او $\|\cdot\|_{1,2}$ په سوبولیو-فضا $H^1(0,1)$ نورم ښايي. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری (واحد کره) جوړوي، چې د یوه محدوده ډېرئ یا سټ په $H^1(0,1)$ کې. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په $L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری جوړوي، چې دا د محدودې ډېرئ په $H^1(0,1)$ کې پروت دی، یعنې د سوبلیو خونديونې جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځوروني څخه له آيګن توابعو څخه د یوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چیرته چې د آیګنارزښت مطلق ارزښت λ_j یوه صفرپرلپسې جوړوي. په ورته توګه د معکوس اوپراتور A لپاره وينا سرې لاس ته راوړی شي.

ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د ګړندي لوېدونکو ازماېښتتوابعو S فضا کومپلکس ارزښتيز توابع $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لري د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو α, β لپاره.

نیمنورم $|\ |_{\alpha,\beta}$ په S باندې یو متریک تعریفوي. د یوه په خوښه کره ټاکلې پرلپسې (α_k, β_k) لپاره مولتی ایندکس جوړه Multiindexpaare سرې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k,\beta_k}}{1+|f|_{\alpha_k,\beta_k}}$$

ږدي او

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k(f-g)$$

د کانوني واټنتابع په حيث تعريفوي.

فضا $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ د شوارڅ د ازماېښت تابع د S يو نينکه يا غليظه لاندې فضا ده. په انالیز کې په S باندې د ناېرېکيدونکو توابعو کيدی شي سرې کړی شي په همغه ازماېښت توابعو د کومپاکت وړونکي سره ځان محدود کړي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لوېدونکو توابعو لپاره تيوپيکي بيلګي توابع دي د يوه اکسپوننشل د راکميدو حالت يا ځانيوني Abklingverhalten, سره، لکه د بيګي په توګه

$$f(x) = p(x)\exp(-|x|^2)\,,$$

چيرته چې p يو په خوښه پولينوم دی.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x|<1\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

په $\mathcal{D}$ کې د تابع لپاره يوه بېلګه ده. په همدې توګه gh د $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ سره په $\mathcal{D}$ پورې اړه لري او له دې سره په S پورې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x) = \exp(-|x|)$ په حقیقت کې کړندئ لویږي، مګر په اصل یا سرچینه کې ناپرېکېدونکې مشتقوږ نه دی او له دې سره په S پورې اړه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

تیمپیریري دیسریبوشنونه Temperierte Distributionen

تیمپریري دیستریبوشن و فضا S ته د ګړندیو لوېدونکو ازماښت توابعو دوال-یا دوه ګونې فضا S' جوړوي. یعنې یو تیمپریري دیستریبیوشن Λ یو کرښیز تابع دی، کوم چې هر تابع f د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره یو کومپلکس ګڼ یا عدد Λf ترتیبوي یا تنظیموي او اتکل

$$|\Lambda f| \leq c \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq n} |f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره یا کافي لوی $n(\Lambda)$ لپاره پوره کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې د تیمپریري دیستریبیوشنونو دوه تیپیکي بېلګې تشریح شوي دي.

(i)

کمزوري ځګېدونکي توابع:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f\,, \quad f \in \mathcal{S}\,,$$

يو تيمپريري ديستريبيوشن تعريفوي. د

$$(1+|x|^2)^{k/2} \leq c \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|\,,$$

له امله کېدی شي د $|\Lambda_\varphi f|$

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha f| \right) \leq \tilde{c} \sum_{|\alpha|\leq k} |f|_{\alpha,0}$$

له لارې تخمين يا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرښيز کمبينيشن:

د مشتقونو هره موزن يا درونډ زياتون يا جمعه

$$\Lambda f = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تيمپريري ديستريبيوشن تعريفوي. په جوته توگه باور لري

$$|\Lambda f| \leq \left(\max_{\alpha} |c_\alpha|\right) \sum_{\alpha} |f|_{0,\alpha} .$$

په ازماېښت توابعو د کرښيزو توابعو لپاره بېلگي چي په $\mathcal{S}$ ناپرېکېدونکي(متمادي) نه دي، دي

$$\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x)\, dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(k) .$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د يوه ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ توټه مشتق د

$$f \mapsto (\partial^\alpha \Lambda)\, f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda\, (\partial^\alpha f)\ , \quad f \in \mathcal{S} ,$$

له لارې تعريف شوی ديستريبيوشن دی. دا تعريف د کمزورو مشتقونو کونڅپت(کنسپټ) ټوليز کوي او د

$$\Lambda_\varphi f = \int_D \varphi(x) f(x)\, dx\,, \quad \varphi \in C_0^\infty(D)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ورسره بلد مشتق تعریف سره سرخوري یا یو غبرګ کیږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi} .$$

د تعریف سره سم تمپیریري دیستریبیشن ناپای زیات مشتقوړ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

دیراک- او هیویزایډ – فنکشنال Dirac- und Heavyside-Funktional

د هیویزایډ-فنکشنال H یو دیستریبیوشن دی، هغه چې د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

له لارې ایندوڅیر کیږي، دا په دې معنا، چې

$$Hf = \int_0^\infty f .$$

.

د مشتق H' لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f ,$$

دکوم سره چې δ یو دیراک-تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیمپیریري دیستریبیوشنونو ضرب(څل)

Multiplikation von temperierten Distributionen

د یوه تیمپیریري دیستریبیوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ سره د یوه کمزوري چټکېدونکي تابع $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ضرب د

$$(\varphi\Lambda)\, f = \Lambda\,(\varphi f)\ \ , f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعریف شوی تیمپریری دیستریبیوشن $(\varphi\Lambda)$ دی.

$$\sup_x \left| \left(1+|x|^2\right)^{-s/2} \partial^\alpha \varphi \right| < \infty$$

د ټولو ضربیزو(ډېر) اندکشني(پېژندنښو) α او $s(\alpha) > 0$ لپاره. دا شرایط په ځانګړې توګه د ټول پولینومونو لپاره پره دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د تیمپیریري دیستریبیوشنونو قات کونه یا راغبرګونه

Faltung von temperierten Distributionen

د یوه تیمپیریري دیستریبیوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره اویوه ګړندي لویدونکي ازماېښت تابع $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره

$$\left(\Lambda \star \varphi\right)\,(x) = \Lambda\varphi(x - \cdot)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د له لارې یوه قاتونه یا را غبرگونه تعریف ده.

تابع $\Lambda \star \varphi$ ناپای ډېر مشتقوړ دی او کمزوری جگېدونکی، کېدی شي د تیمپیریري دیستریبیوشن سره و پېژندل شي،

که $\Lambda = \Lambda_\psi$ له $\psi \in \mathcal{D}$ سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy\,,$$

قاتونه ده د دیستریبیوشن سره یعنې د تابع لپاره ورسره بلد تعریف دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اپروکسیمي کتمتوالی Approximierende Identität

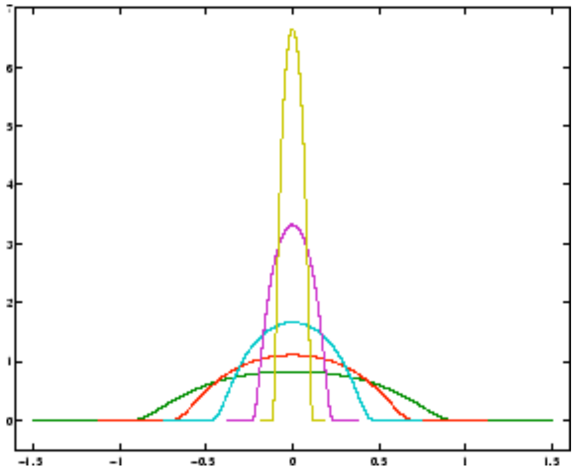
وي دې $\varphi \in \mathcal{D}$ یو د

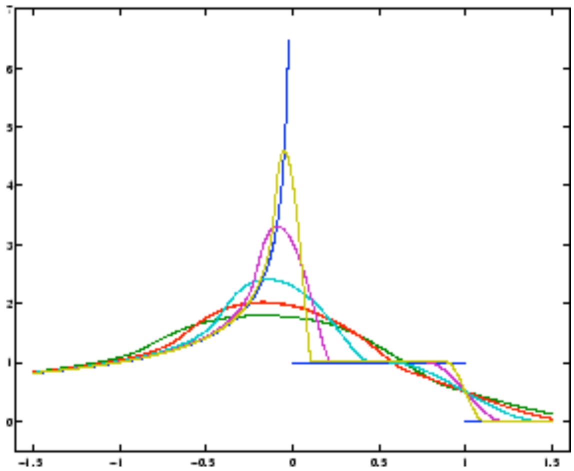
$$\varphi \geq 0\,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره ازماېښتي تابع او $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ ، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon \star f = f\,, \quad f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





کينه ځيرونه ياتابع د $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$ لپاره φ_ε او $\varphi = c\exp(1/(x^2-1))\,, x \in \mathbb{R}$ ښايي ، ښئ تابع يا ځيرونه اړونده قاتوني ښايي.

لکه په تابع کې چې ښوول شوی دی، کيدی شي قاتونه د توابعو د خويوني لپاره وکارول شي، څکه چې

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې اپروکسيمسشن-پروسې په مرسته بسيا کوي، چې د بيلګي په توګه دا کټمټوالی د ناپرکيدونکو کربنيز اوپراتورونو لپاره فقط د خويو توابعو لپاره وښايو.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن

Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوريې ترانسفورميشن

$$f \to \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dx$$

اد فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن

$$g \to \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \exp(\mathrm{i}xy)\, dy$$

ناپرېکيدونکي کربنيز اوپراتورونه دي د ګړندي لويدونکو ازماېښت توابعو په فضا S باندې

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تر يوه نورمي شوي ضريب د فوريې – ترانسفورميشن او د فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن پورې په $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ باندې ايزومتريګانې دي، کوم چې يو بل ته معکوس يا په څټ دی. دا چې $S \subset L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ دی، نو بايد چې د S په توپولوزي کې ناپرېکيدنه وښايو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فوريي – ترانسفورميشن قوانينو سره سم باور لري

$$\left|(\mathrm{i}y)^\alpha\partial^\beta\hat f(y)\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\partial^\alpha\left((-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dy\right|$$

$$\leq\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x|^2\right)^{-n}\left|\left(1+|x|^2\right)^n\partial^\alpha\left(x^\beta f(x)\right)\right|\,dx\,.$$

دا چې $\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x|^2\right)^{-n}\,dx<\infty$ دی، نو کيدی شي ښئ خوا د $\mathcal{S}$ د نيم نظم له لارې اټکل شي.

د په څنډ يا معکوس فوريي – ترانسفورميشن لپاره په ورته توګه مخ ته ځو.

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريي –ترانسفورميشن

Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda\in\mathcal{S}'$ د فوريي –ترانسفورميشن د

$$\hat\Lambda\varphi=\Lambda\hat\varphi\,,\quad\varphi\in\mathcal{S}$$

له لارې تعريف دی او په $\mathcal{S}$ باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز اوپراتور تعريف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیستریبیوشن $\hat{\Lambda}$ کېدی شي په دېرو حالتونو کې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-\mathrm{i}xy}$$

له لارې وشمېرل شي. د ټولیزو تیمپریري دیتریبیوشنونو Λ لپاره داکتمتوالی باید د یوه اپروکسیمیشن-پورسي په مرسته و ښوول شي، ځکه چې $e^{-\mathrm{i}xy}$ یو نه اجازه لرونکي ازماېښت تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د $\Lambda = \Lambda_\psi$ لپاره د $\psi \in \mathcal{S}$ سره دی

$$\Lambda\hat{\varphi} \underset{=}{} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dx\,\psi(y)\,dy$$

$$\underset{=}{} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dy\,\varphi(x)\,dx\,.$$

دویمه لیکه د $\Lambda_{\hat{\psi}}\varphi$ سره برابره ده، دا په دې معنا، چې $\hat{\Lambda}$ د $\hat{\psi}$ له لارې ایندوڅیر شوی دیستریبیوشن دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تمپوریري دیستریبیوشنونو د فوریې – ترانسفورمیشن لپاره قواعد یا لارې

د توابعو د فوریې – ترانسفورمیشن ته ورته لاندې کېمتوالی د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو و $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره باور لري ا و د تیپریري دیستریبیوشنونو $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مشتقونه او ضربونه:

د يوه پولينوم $p(y)=\sum a_\alpha y^\alpha$ لپاره باور لري

$$p\widehat{(-\mathrm{i}\partial)\Lambda}=p\hat{\Lambda}\,.$$

لهدې سره دی $p(-\mathrm{i}\partial)=\sum a_\alpha(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$. په ځانګړې توکه $-\mathrm{i}\partial_\nu$ توېه مشتقونه د y_ν سره ضرب په ګوته کوي(دلته دی $p(y)=y_\nu$).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda}=p(\mathrm{i}\partial)\hat{\Lambda}\,.$$

- Faltung: قاتونه:

$$\widehat{\Lambda\star\varphi}=\hat{\varphi}\hat{\Lambda}\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبوليف-فضا $H^s(\mathbb{R}^n)\ ,\ s\in\mathbb{R}$ د ټولو تيمپيرې ديستريبيوشنونو Λ څخه جوړه ده د

$$w^s\hat{\Lambda}\in L^2(\mathbb{R}^n)\ ,\quad w(y)=\left(1+|y|^2\right)^{1/2}\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره .

دا خویونه یا کرکتاریزه کونه د $H^k(\mathbb{R}^n)\ ,\ k\in\mathbb{N}_0$ تولګیز تعریف تولیز کوي، د
تولو توابعو فضا په حیث د مربع انتیګرالوړ توته مشتقونو سره بالاخره تر نظم k پورې.

د کمیز یا منفي اکسپوننت یا جګګن سره فضاوې د زیاتیز یا مقبت اکسپوننت سره فضاوو
دوه ګونې فضاوې دي.

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n)=H^s(\mathbb{R}^n)'\ ,\quad s\geq 0\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ښووني لپاره د $n=1$ حالت تر څېړني لاندې نیسو. تولیز حالت کېدی شي په ورته
توګه تر څیړنې لاندې ونیول شي او تنها تخنیکي پیچلی دی

(i)

د $k\in\mathbb{N}_0$ لپاره د تعریف سره همغږیزوالی د پلانشرل-کتمتوالي
Plancherel-Identitätڅخه لاس ته را ځي

$$f,f',\ldots,f^{(k)}\in L^2\Leftrightarrow\hat{f},|y|\hat{f},\ldots,|y|^k\hat{f}\in L^2\,.$$

دا چې

$$|y|^j\leq\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\leq c\left(1+|y|^k\right)\ ,\quad y\in\mathbb{R}$$

د $j\leq k$ لپاره دی، ورته والی کرکتي کوني $\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\hat{f}\in L^2$ ته بیایي

(ii)

د دوال فضا کرکتري کونه کیدی شي د د یوه ابسترکت د لیل سره وښوول شي. که د
فوریې ترانسفورمیشن د F سره په نخښه شي w^s او د ضرب د W سره ، نو سړی
لاندې دیاګرام لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L^2 \overset{W}{\longleftarrow} \hat{H}^s \overset{F}{\longleftarrow} H^s \overset{\Lambda}{\longrightarrow} \mathbb{C}\,.$$

یو فنکشنال $\Lambda \in (H^s)'$ یو فنکشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \to \mathbb{C}\,.$$

ایندوڅیرت کوي.

دا چې $(L^2)' = L^2$ دی سړی کړی شي$\tilde{\Lambda}$ د یوه تابع $g \in L^2$ سره
وښوول شي یا په نخښه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}\,.$$

نو د $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$ له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda}WFF\varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}\varphi(-x)w^s(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}w^s(-x)\overline{g(-x)}\right)}_{\hat{\Lambda}(x)} dx$$

له دې سره غوښتونی کرکتاری کونه $\hat{\Lambda} w^{-s} \in L^2$ لاس ته راځي، ځکه چې کومپلکس
کونجوګیشن او هندارونه په انتیابیلیتي باندې کومه اغیزه نه ري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه Translationsinvariante Operatoren

هر محدود کربنيز اوپراتور $L : L^2\left(\mathbb{R}^n\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ ، هغه چې له ترانسليشن سره کومتير دی ،

$$Lf(\cdot - h) = \left(Lf\right)\left(\cdot - h\right),$$

کيدی شي د يوه تيمپريري ديستريبيوشن Λ سره د محدود فوريي – ترانسليشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چې

$$L\varphi = \Lambda \star \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

او

$$\|L\| = \mathrm{ess\ sup}_{y\in\mathbb{R}^n}\left|\hat{L}(y)\right|.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د جملې يو اړخ د پلانشيرل قضيې حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda \star \varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|\hat{\Lambda}\hat{\varphi}\|_2 \le (2\pi)^{n/2}\|L\|\|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\|\|\varphi\|_2,$$

د کوم سره چې اټکلونه خورا ښه شونې(ممکنه) ده.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنسټيزه اوبيونه(حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ثابت یا تل همغه ضریب c_α سره یو تیمپریري بنستیز حل شتون لري، دا په دې معنا، چ ېیو تیمپریري دیستریبیوشن Λ د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta\,.$$

د دفرنسیشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دنرنشیشن مساوات یا ــبرابرون

$$Lu = f\,,\quad f \in \mathcal{D}\,,$$

یو حل به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انځور شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اونیوارینت دفرنشل اوپراتر

$$L = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 1$$

لپاره تیمبیریري بنستیز حل $\Lambda = e^{-|x|}/2$ دی، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سرۍ د لاندې برابرونیا مساوات فوریې – ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(\mathrm{i}y)^2\hat{\Lambda}+\hat{\Lambda}=1\,.$$

د $\hat{\Lambda}$ پسې حلونې پله مخې راکوي

$$\hat{\Lambda}=\frac{1}{1+y^2}\,,$$

کوم چې د $e^{-|x|}/2$ فوريې – ترانسفورمي په ګوته کوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u''+u=\sin x$$

يو حل دی

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{y}\sin(x-y)\,dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x+y)\,dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \sin x \int_0^\infty e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2} \, .$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د لاپلاس - اوپراتور بنسټیزه اوبیونه(حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

په $\mathbb{R}^n$ کې لاندې بنسټیز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \, |x|^{2-n} , \quad n \geq 3 ,$$

د c_n سره د یوونسفر(واحد سفر) د $(n-1)$ - بعدیز ډکې یا حجم.

د $n = 2$ لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \, \ln |x|$$

یو بنسټیز حل دی.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د ښوونې لپاره سرې د $\Delta\varphi = \Delta |x|^{2-n}$ له لارې منځ ته راغلی فنکشنال Λ اغیزه په یوه ازماېښت تابع $f \in C_0^\infty$ باندې تر څېړنې لاندې نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \int\limits_{R^n} \varphi \Delta f \,.$$

که د انتیګریشن ورشو د غونډاري پوښ $K_{\varepsilon,R}$ له لارې اپروکسیمي کړو د د دننئ
وړانګي ε او دباندنئ وړانګي R سره، نو د ګرین Greenد دویم انتیګرال فورم یا بڼي
له مخې باور لري

$$\int\limits_{K_{\varepsilon,R}} \varphi \Delta f = \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} \varphi \partial_\perp f - \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} f \partial_\perp \varphi + \int\limits_{K_{\varepsilon,R}} f \Delta \varphi \,,$$

د $\partial_\perp$ د نورمال مشتق سره. له دې سره پهښي اړخخ دریم انتیګرال ورکیږي، ځکه چې
$\Delta\varphi = 0$ د $x \neq 0$ لپاره دی. لومړیو دواړو انتیګراله ونو ته فقط دننئ ژی تر
څېړنې لاندې نیسو، ځکه چې f محدود وړونکی لري او د پوره لوی R لپاره د خپلو
ټولو مشتقونو سره ورکیږي.

که سږی پولار یا قطبي کواوردینات $x = rx^\circ \,,\; r \in [0,\infty) \,,\; x^\circ \in S_n$ وکاروي، د
کومو سره چې S_n $(n-1)$ -بعدیز یوونسفر په ګوته کوي، نو دی

$$\int\limits_{K_\varepsilon} \varphi \Delta f dx \;= \qquad -\int\limits_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\mathrm{grad}\, f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$+\int\limits_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)(2-n)\varepsilon^{1-n} x^\circ \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$= \qquad -\varepsilon \int\limits_{S_n} (\mathrm{grad}\; f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ dS_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+(2-n)\int\limits_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)dS_n\,.$$

دا لومړی انتیګرال د ε سره د صفر په لور هڅیږي، ځکه چي $\mathrm{grad}\ f$ محدود دی، اودویم انتیګرال د $n \neq 2$ لپاره ارزښت $(2-n)\,\mathrm{vol}(S_n)f(0)$ راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n}\Lambda f = f(0) = \delta f\,.$$

د $n = 2$ لپاره کیدی شیپه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\mathrm{grad}(\ln r) = \frac{x^\circ}{r}\,, \quad r \neq 0\,,$$

$$\Delta(\ln r) = 0\,, \quad r \neq 0\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

،،له هر څه ستونځمن یو څه ته نیت اوملا راتړل دي(ژباړی)،،.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپېدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرئ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲   داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته

تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو ويېونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګې څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور بريښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library