شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

دویمه برخه

دویم غځېدلی چاپ

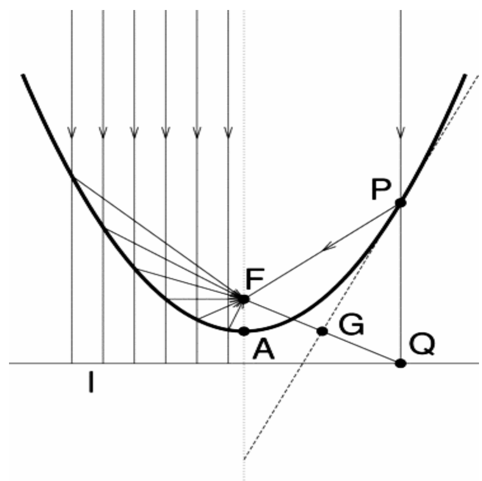
لیکونکی: ډاکتر ماخان (مېږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(رياضي)

سترکتاب



دويم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرِي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښبنتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب (دویمه برخه)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میرې،، شینواری

د خپریدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندویې ټولنې تخنیکي څانګه

makhanshinwari@gmail.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې لیکونکي یا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساينسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پيل کړې، تراوسه يې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هيوادولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په يوه مهمه غني ژبه بدليدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډميکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بيلابيلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودريږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحاديې له حوا د ډاکتر ماخان شينواري تراوسه زياتو چاپ شويو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وپښت شمير پوهنې نويو ژباړو او ليکنو او دوه ټولنيزو ليکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساينسي اثارو د خپراوي په لړ کې د يوه مهم ګام په توګه ګڼل کيدای شي او هيله ده، چې د دې برخې مينه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمني، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونده هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنير او ډپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړې.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي ځښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

لومړۍ برخه

١ ٠	د شمیرپوهنې سم اند یا منطق	١
١ ٠ ١	پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه	١
١ ٠ ٢	د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې	٣
١ ٠ ٣ ٠ ١	ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه	٣
١ ٠ ٢ ٠ ٢	وینا	٥
١ ٠ ٢ ٠ ٣	د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ	٧
١ ٠ ٤	وینا فورم یا ٠بڼه او کوانتورونه	١٣
١ ٠ ٥	اړیین او پوره کیدونکي شرطونه	٢٨
١ ٠ ٦	د شمیرکلیمه یا د لغاتو	٣١
١ ٠ ٧	برابرون او نابرابرون	٣٣
١ . ٨	تمرینونه	٣٨
٢ ٠	ډېر ۍ پوهنه	٣٩
٢ ٠ ١	د ډیرۍ پوهنې کلیمه	٤٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

٢ . ٢ د ډېريو ترمنځ اړيکې ۴۵

ربخدېرى ۴۶

د يوې ډېرى توان يا تواندېرى (توانسټ) ۴۸

٢ ٠ ٣ په ډيرى کې کاروني يا عمليې(١) ۵٠

غوڅدېرى يا متقاطعدېرى ۵٢

د يوې ډېرى يا سټ کمپليمنت ۵٧

٢ ٠ ٤ څيرونه ۵٨

تمرينونه ۶٧

٣ ٠ د ريېل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې... ٧٠

٣ ٠ ١ د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت ٧٠

٣ ٠ ١ ٠ ١ پيدايښتي يا طبيعي ګڼونه ٧٠

٣ ٠ ١ ٠ الف د پيداينت يا طبيعي ګڼونو جوړښت ٧١

٣ ٠ ١ ٠ ب د پيداينت ګڼونو انځورونه او شميرنه ٧٢

٣ ٠ ١ ٠ پ د شميرنې بنسټيز قوان ين ٧٨

٣ ٠ ١ ٠ ٢ ټولګڼونه ٨۴

٣ ٠ ١ ٠ ٢ الف د ويش تيوري ٨۶

٣ ٠ ١ ٠ ٢ ب غټ ګډ پرويشونى(بزګترين مقسوم عليه ...) ٨٨

٣ ٠ ١ ٠ ٣ راشنلګڼونه ١٠۶

٣ ٠ ١ ٠ ٤ ريېلګڼونه ١٠٨

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ ۲ ۰ ۳ ماتشمیرنه ۱۱۹

۳ . ۳ تمرینونه ۱۳۰

۰ ٤ پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر ۱۴۱

۱ ۰ ٤ توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت ۱۴۱

۲ ۰ ٤ ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره ۱۴۴

۳ ۰ ٤ توان د رییلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره ۱۵۱

٤ ۰ ٤ ټولګه ۱۵۲

۰ ٥ لوګاریتم ۱۵۸

۱ ۰ ٥ د لوګاریتم کلیمه ۱۵۸

۳ ۰ ٥ ټولګه ۱۶۶

۰ ٦ ګونومتري ۱۶۹

۱ ۰ ٦ بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه ۱۶۹

۱ ۰ ۱ ۰ ٦ ټکی او کرښه ۱۶۹

۲ ۰ ۱ ۰ ٦ کونج ۱۷۱

۳ ۰ ۱ ۰ ٦ درېګوډی ۱۷۴

٤ ۰ ۱ ۰ ٤ کونکروانیخ او ورته والی ۱۷۸

٥ ۰ ۱ ٦۰ ولاړکونجیز دریګوډی ۱۸۴

۲ ۰ ٦ په ولاړکونجیز دریګوډی کې د ... ۱۸۸

۳ ۰ ٦ په یوونګردی کې د کونج بلواک .. ۱۹۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ، ٤	د ساين او كوساين جملې	١٩٥
٦ ، ٥	تريګنومتريکي کټمټوالی	٢٠٥
۶ . ۵	تريګنومتريکي يا کونجکچيز فرمولونه	٢١٥
٧ ،	کمپلکس ګڼونه	٢٢٢
٨ ،	د ښوونې يا ثبوت متودونه	٢٣٥
٨ ، ١	سيده ښوونه	٢٣٥
٨ . ٢	ناسيده ښوونه	٢٣٧
٨ ، ٣	د پوره ايندکشن له لارې ښوونه	٢٣٩
٩	لاينيز برابرون له يوې اوړيدونې يا ...	٢۴٣
٩ ، ١	لاينيز برابرون	٢۴۴
١٠	کومبيناترويک، د بينوم جمله	٢۶۶
١٠ ، ١	فاکولتيت يا فاکتوريل	٢۶۶
١٠ ، ٢	د بينوم ځله ونه	٢۶٧
١٠ ، ٣	د بينوم جمله	٢٧٠
١٠ ، ٤	کومبيناتوريک	٢٧۴
١٠ ، ٤ ، ١	پرموتيشن	٢٧۵
١٠ ، ٤ ، ٢	واريېشن	٢٨٠
١٠ ، ٤ ، ٣	کمبينيشن	٢٨۶
١٠ ، ٤ ، ٤	د پرموتيشن، واريېشن او	٢٩١

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵
۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	ځلورۍ ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰۲ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	ځلورۍ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱
۱۲ ۰ ۳	دريمه درجه برابرونونه	۳۵۷
۱۲ ۰ ٤	د ريښې برابرونونه	
۱۳	ترانسڅيندنت برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۱	لوګاريتم برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۲	اکسپوننشل- يا په جګګښ برابرونونه	۳۸۰
۱۳ ۰ ۳	ګونومتريکي يا کنجکچيز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱	نابرابرونونه	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۱	بنستيزې کليمې او شمير قوانين	
۱٤ ۰ ۱ الف	اينتروال	۳۹۷
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۲	نابرابرونونه له يوې ناپيژندونکی...	۴۰۰
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۳	د نابرابرونونو سيستم ...	۴۰۹
۱٤ ۰ ۱ ۰ ٤	نابرابرونونه له دوه ناپيژندونکو سره	۴۱۱
۱٤ ۰ ۲	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۱	له مطلقه ارزښت سره شميرنه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۲	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۳	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک يا فنکشنونه يا طابع	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

١٥ ٠ ١ د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه ۴۳۰

١٥ ٠ ٢ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

١٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶

١٦ ٠ ١ کرښه ۴۶۶

١٦ ٠ ٢ ګردۍ ۴۷۵

١٦ ٠ ٣ ایلیپسې ۴۸۲

١٦ ٠ ٤ هیوپربول ۴۸۷

١٦ ٠ ٥ پارابول ۴۹۲

١٦ ٠ ٦ ټولګه ۴۹۴

١٧ وکتور شمیرنه ۵۰۲

١٧ ٠ ١ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲

په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲

١٧ ٠ ٢ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹

١٧ ٠ ٣ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲

١٧ ٠ ٤ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷

١٧ ٠ ٥ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....

١٧ ٠ ٥ ٠ ١ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱

١٧ ٠ ٥ ٠ ٢ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

١٧ ٠ ٥ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ٠بڼه ٥٢٥

١٨ پرلپسې او پرلپسې لړۍ ٥٣٣

١٨ ٠ ١ پیل ٥٣٣

١٨ ٠ ٢ د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه ٥٣٤

١٨ ٠ ٢ ٠ ١ مونوتوني پرلپسې ٥٤٢

١٨ ٠ ٢ ٠ ٢ اریتمیتیکي پرلپسې ٥٤٥

١٨ ٠ ٢ ٠ ٣ هندسي پرلپسې ٥٤٧

١٨ ٠ ٢الف لړۍ ٥٥٠

١٨ ٠ ٢ الف ٠ ١ هندسي لړۍ ٥٥٥

١٨ ٠ ٢ الف ٢ اریتمیتیکي لړۍ ٥٥٧

١٨ ٠ ٤ د پرلپسې او لړیو د پولې ... ٥٥٨

١٩ د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه ٥٧٨

١٩ ٠ ١ بنسټیزې کلیمې

د پولو یا حدونو خویونه ٥٨٦

د راشنل، کسري یا نسبتي ٥٩٢

د مثلثاتي یا درېکوڼي کچ توابعو پولې ٥٩٦

ناپرېکیدنې ٦٠٤

١٩ ٠ ٢ په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې

١٩ ٠ ٣ د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه ٦١٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹ ۰ ٤ د بنسټيزو فنکشنونو ناپريکيدنه
د ځېرکي ټولګه ۶۱۶
۲۰ دفرنځيالشميرنه ۶۲۶
د تابع تغيرمنځ ارزښت(منځنی قيمت) ۶۲۶
په يوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸
د لحضوی(سترګورپ) تغير... ۶۳۰
کمښتوېش (تقسيم تفاضل؟) ۶۳۱
دفرنشلوېش يا رابيليدنه يا مشتق ۶۳۳
کمښتوېش او مشتق يا رابيليدنه ۶۳۶
د x_0 په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳
د تانجنت پيژند او خويونه ۶۴۷
د تانجنت او عمود يا ولاړ ټوليز مساوات ۶۵۰
په بيديا کې جګوالی ۶۵۲
۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت يا جګيدني غوره والی
۲۰ ۰ ۲ د فرنځيال يا رابيليدنې يا مشتق قاعدې ۶۵۶
د درېګوډيزو يا مثلثاتي ۶۶۲
د اکسپوننشل يا په جګ توابعو.... ۶۷۰
د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې ۶۷۶
د ايمپليځيت توابعو مشتف ۶۸۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶
ټولګه ۶۸۸
د يوې تابع د مشتق قابليت ۶۹۱
د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸
۲۰ .۳ د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه ۷۰۱
د رول قضيه ۷۱۰
د وايرشتراس قضيه ۷۱۱
۲۰.٤۰ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی
د دفرنشل منځ ارزښت قضيه ۷۱۲
يوعړيزې توابع ۷۱۵
ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰
د انعطاف – يا اوړونټکی ۷۲۴
د کوږ يا منحني بحث يا خبرې ۷۳۳
ناټاکلي حدونه يا پولې ۷۴۶
د برنولي او د لو پيتال ۷۵۰
۲۰ ۰ ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷
تمرينونه ۷۶۷
په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸
۲۱ انتيګرالشميرنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

	پیلراوړنه	۷۸۷
۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنسټیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالونې قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالونې لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنې استعمال ۸۶۲

تمرینونه ۸۸۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

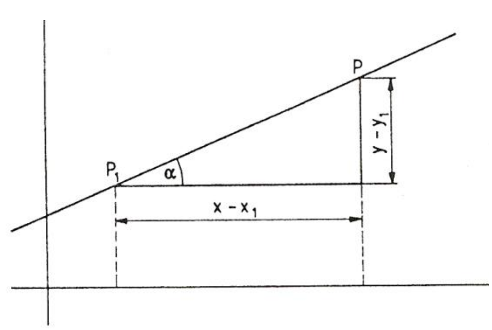
۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

په دې برخه کې يوڅود تحليلي (شننيزې يا سپړنيزې) ځمککچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څيړل کيږي.د تحليلي هندسي بنستيزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرګندونويي د هندسي خويونو جوړښت ښايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو توټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې يوه کرښه يوائځنی کره تعين کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو يا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کيدي شي . (ټکی او د ټکی ميلان معلوم دی) .

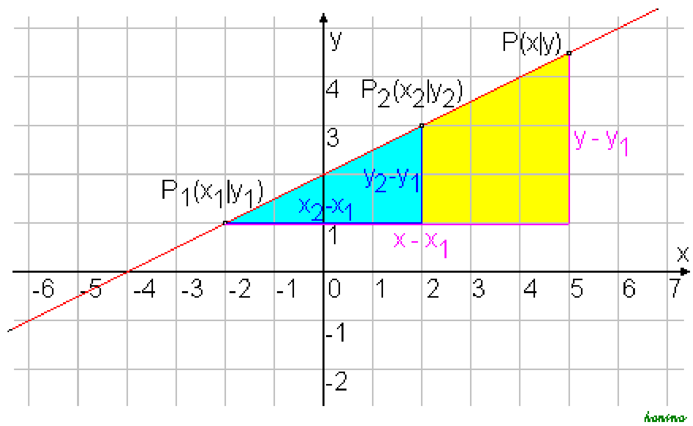
دلته دې(P1(x1 , y1دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګيدو کونج،وي، چې د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کرښه يو اووښتونی (واريابل) ټکی دی٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د کرښی د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ځېره دې وکتل شي(لاددې ځېره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1);....................(16,1)$$

پورته د کرښی ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: y - b = m (x - 0) په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دې P1(x1 , y1) او P2 (x2 , y2) وي، د x1|=x2 سره ، (ځیره ش ۱۶ . ۲) د جګيدونکی يا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

$$m = (y - y1) /(x -x1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چې لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x - x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښې دوه ټکیزبرابرون

ځیره ده

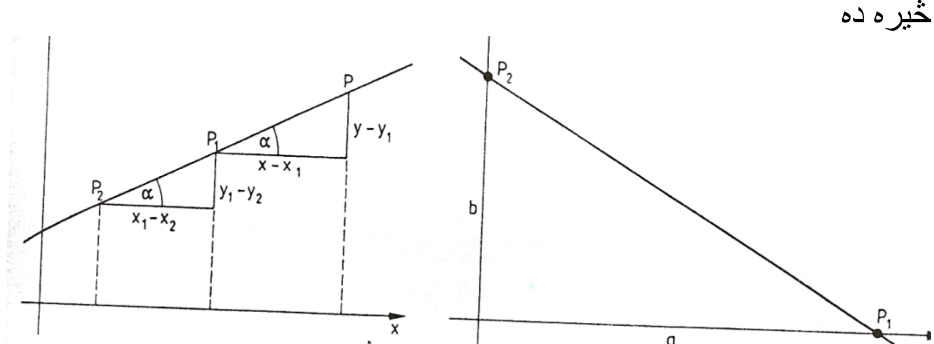


Bild 16.2 ځیره

Bild 16.3 ځیره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات x1= 0, y2 = b|= 0
سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابرون

ځلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کې لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټولیزه بڼه (داسی دئ:

Ax + By + C = 0 (16 . 5)

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کی نيسي
y = y0 (A = 0 ,B|=0)
او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بيلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون يا لاينيز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تيريږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30^\circ$ يی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی ليکل کيږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم يي په لاندې ډول دی
$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بيلګه ۱۶ . ۲ :

د لاينيزبرابرون يا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:
$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$
له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(اته ناسم، په ځای يې شپږ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی يی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغيريدل په يو دy - ارزښت په 2/3 - تغيروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بيلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ځيره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

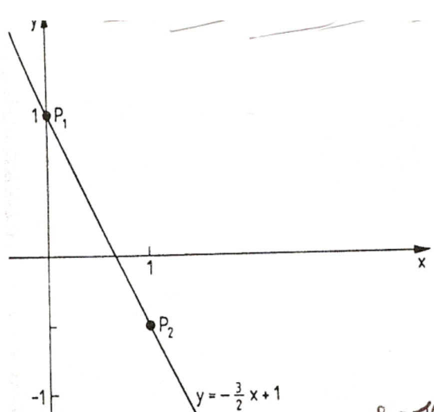
بیلګه ۱۶ . ۴ :

د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅيدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردينات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي٠
په يوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پيتاګوراس(فيساغورس) له جملی (ځيره . ۱۶ . ۵) داسی ده

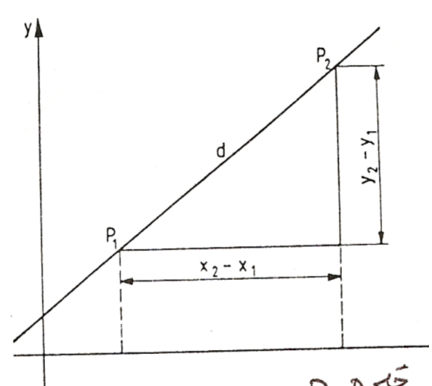
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};..........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ځيرې ۱۶ . ۴ او - ۵



ځیره ۴ :



ځیره ۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجټکي يی دادي(-)A(3,1),B

1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کټمټی) چی (يو د بلی سره) غبرګي نه وي ټيك يو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور ديناتو پروت دی ، نو د دواړو کواورديناتو برابرون بايد پوره کړي . په دې حالت کي د غوڅټکي کواورديناتو، د دوه لاينيزو برابرونونو سره چی دوه اوښتوني يا

ناپيژندونکی (مجهولی) ولري، د يوه سيستم يوائځنی کره اوبيونه ترې لاس ته راځي. په ټوليزه توګه دا باور لري: که يو برابرونسيستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او يو يوائځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي يو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.

که ناپاى ډيرې اوبيونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه يوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي يوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بيلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعيت) د لاندې کرښو

الف) g2: -2x+y = 1,

ب) g3: 3x -y=5, ,

پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3

سره څيرو

اوبيونه : د g1 برابرونونو څيره داسی بدليږي : 3x-y=2

الف) د برابرونونو سيستم 3x-y=2، -2x+y=1

ټيك يوه اوبنونه لري: x1=3 , y1=7

ددې څخه ښرګنديږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د برابرونونو سیستم

$$3x - y = 2$$
$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري : برابرونونه یو بل ردوي یه نه زغمي . د g1 او g2 کرښې یو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سیستم 3x-y=2

$$-x+(1/3)y=-2/3$$

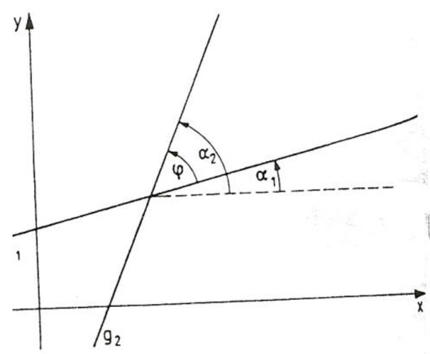
ناپای ډیر ې اوبیوني یا حلونه لري. برابرونونه یو بل سره برابر یا یو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي یو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کرښو

$$g1 : \quad y = m1x + b1 \qquad g2 : \quad y = m2x + b2$$

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو جګید کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت یا توپیر)جوړوو (څ ۱۶ . ۶)



څېره ۱۶ . ۶

د کرښې له برابرونونو پوهیږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم (بنستیزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم ځخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دیږ.

دا په دې پورې اړه لري چی ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته ځېړې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) ځخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښی یوبل سره غبرګی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

ګورو چی د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m - m)/(1 + m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعنی د$m2= -1/m1$ لپاره $(m1|=0,m2|= 0)$

په کرښه($y=y0$ $(m1=0$ باندې کرښه($x=x0(m2=oe)$ نيغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

$$m2 = m1 \qquad (16, 8)$$

د اورتوګوناليتی Orthogonalität(يو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m2 = -1 / m1 \qquad (16 . 9)$$

بيلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تيريږي، او له کرښی $g1 : y = -2x +1$ سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نيغه) ځغلي اوبوونه:

الف) د g2 کرښی ميلان (جګوالی $m2 = m1 = -2$)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : $y+1=-2(x-2)$ همداسی $y = -2x +3$

ب) د g2 کرښي ميلان ياجګيدنه ده $m2=-1/m1=1/2$ د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: $y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2$

بيلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کيږي چي د(P1(1/3,-1/6 ټکی تيريږي او په کرښه چی له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تيريږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تيريږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري $(y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی ميلان يا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تيريدونکی کرښي برابرون د m_2 ميلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بیلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0 او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوځتکي S واټن له ټکي(P(6,13 څومره دئ او د کرښي برابرون څنګه دئ چي د کواوردینات له سرچینی تیریږي او د S او P څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟
ځواب : د غوځتکي کواوردینات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي

2x-y=1

3x+2y=5

یعنی: xS=1 , yS=1

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d=\sqrt{(1-6)+(1-13)^2}=13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تیریږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5

له S او P ټکو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي میلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0 څخه تیریدونکی کرښه د m2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

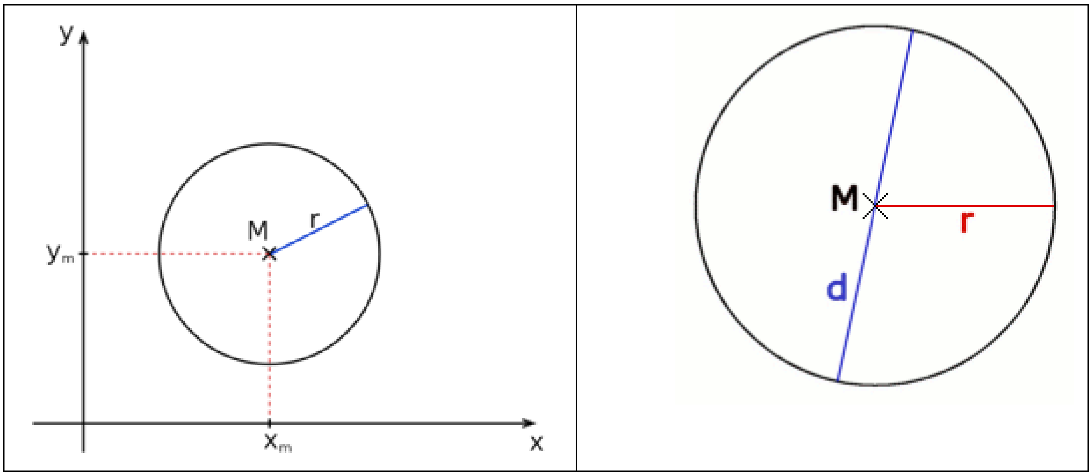
y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

۱۶ . ۲ ګردۍ (داېره)

داېره(ګردۍ) د ټولو هغو ټکو ډیرۍ(سټ) ده، چی د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په rیی په نخښه کوو.
فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې داېره (ګردۍ) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیرۍ(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k=\left\{X\in E|\ |\overline{MX}|=r\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



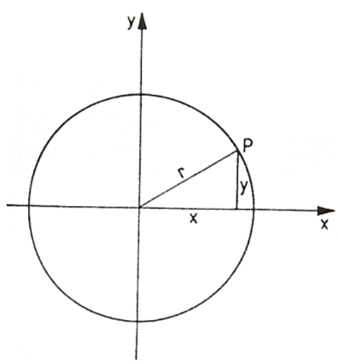


Bild 16.7 څېره،

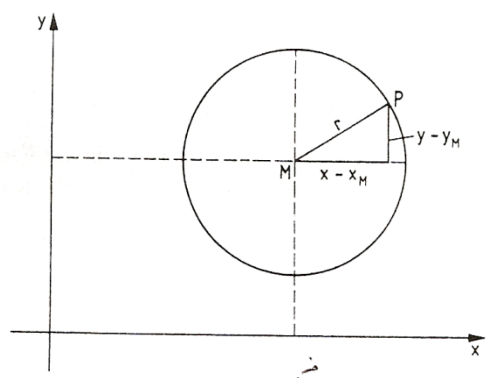


Bild 16.8 څېره

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې کردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د کردی ټوليز برابرون

دا برابرون د پېژند او پيتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې کردی ځانګړي حالت او د کواورديناتسيستم سره، چې منځټکی يې د کواوردينات
په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ګردۍ منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (شیره ۱۶ . ۷) په سرچینه پروت وي، نو د) پیوتاګوراس د جملې له مخې (د ګردي په خوښه ټکي P(x,y (لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردۍ منځټکي برابرون چې د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (شیره ۱۶ . ۸) نو د ګردۍ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چې د ګردي برابرون تغیر وومومي) ، پس پیژندل کیږي چې د ګردیبرابرون د څلورۍ یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په شیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی څرګنده کوو یا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه شیرې پورته وګورئ

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردۍ برابرون دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x^2+2y^2+4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلوری پوره کونه يا مربع تکميلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y+9 = 3+4+9$

دبينوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2+(y-3)^2 = 16$

ګردۍ منځټکی($M(-2,3$ او وړانګه $r=4$ لري.

بيلګه ۱۶ . ۱۲ :

د ګردۍ برابرون وليکی چی منځټکی يی($M(2;0$ وي او په کوم چی ټکی($P(6,4-3$ روت دی؟

اوبيونه : د($M(2,0$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دی

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$

د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2+(4-3)^2 = r^2$

له دې ځخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردۍ برابرون:

$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$

ګردۍ او کرښه يو بل ته درې مختلف ځايونه لرودی شي

۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده(سيکانتې)

۲ – کرښه ګردۍ په يوه ټکي کی لمسوي يعنی مماس دی (تانجنت يا جګوالی)

۳ - کرښه ټوله له ګردۍ دباندې پرته ده (له ګردۍ تيريدونکی، لنډ : تيرېدونې)

د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردينات بايد د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی بړدي(y يا x پسی حل يا اوبۍ شوي) او په روښانه ډول يو مربع مساوات (ځلوری برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په ځرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ريل اوبيونې يا ځوابونه لري، يو رييل ډبل اوبی او يا هنځ رييل اوبی کيدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ ځخه عبارت دي.

بيلګه ۱۶ . ۱۳:

کوم پروت ځايونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ او لاندې کرښی و يو بل ته لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردیبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي

$$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 <=> 5x-8x=0$$

ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به $g1$ د ګردي غوڅوونی یا (Sekantسکانت) وي .

که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي

$$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$$

د ډبل اوبونې $x1,2 = 4 , y1,2 = 4$ سره $g2$ يو تانجنت دئ .

که $g3 : y=2x+6$ د ګردئ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:

$$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 <=> 5x^2+x+8=0$$

دا ځلوری برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه $g3$ له ګردئ k دباندې پرته ده، يعنی دباندنی يا دباندونی ده.

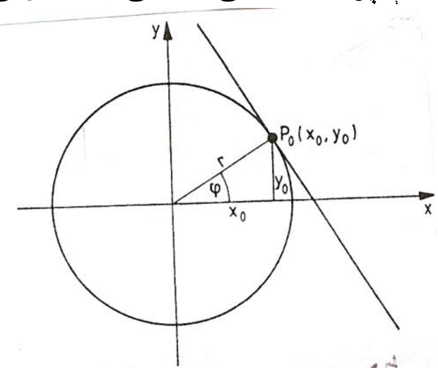


Bild 16.9

په ګردي ($x^2+y^2 = r^2$) (ځره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په تکی($P0(x0,y0$ د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 >0$ سره غوښتل کيږي. تنجنت د مماس په وړانګه نيغ ولاړ دئ

د مماسوړانګه دا ميلان يا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0;..........(16,13)$$

د تنجنت يا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> $xx0+yy0=x0^2+y0^2=r^2$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16.14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه(P0(±r,0 او(P0(0,±r په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

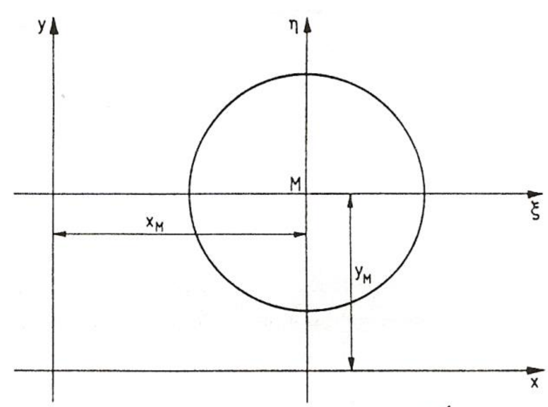


Bild 16.10 څېره

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x0,y0 یا xM,yM او x_0, y_0 یا x_M, y_M ګورو نو کېمټ دي

بیلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداکوو. دا باید دګردۍ برابرون پوره کړي . ټکی P1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) باید پوره کړي.
نو باور لري
$x0^2+y0^2 = 16$ او $-12 x0 + 4y0 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا لاينيزبرابرون د y_0 په لور حل شي ، نو په x_0 کي يو ځلوری برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبيونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_{01}=4 , y_{02}=-16/5$$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو($P_{01}(0,4)$ او($P_{02}(-12/5,16/5)$ د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$$

او

$$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$$

د ګردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي ($M(x_M,y_M)$ سره د η,ζ -کواوردينات سيستم کی ، چی سرچينه يي په M کی پرته ده)(؟ ځيره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;.....................................(16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسيستم د y,x - کواوردیناتسيستم يو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسيستم کی لاندې اړيکی پرتی دي ٠

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;...........................(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بيا دا د y,x -کواوردينات سيستم ته ترانفورميرکوي(کشوي يا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي($P_o(x_0,y_0)$ کی د ګردۍ تنجنت برابرو په ګردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بيلګه ۱۶ . ۱۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ګردۍ چې برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو $x_1 = x_2 = -5$

سره تنجنت وکاږو(کيږدو). برابرون يې څنګه دي؟

اوبيونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8 , y_M = 2 , r = 5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګرديبرابرون کې ځايوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره څلورۍبرابرون يا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y_1 = 6 , y_2 = -2$

د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \Leftrightarrow 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=-7$$

۱۶ . ۳ بيضوي(هګۍ) يا ايليپسی Die Ellipse

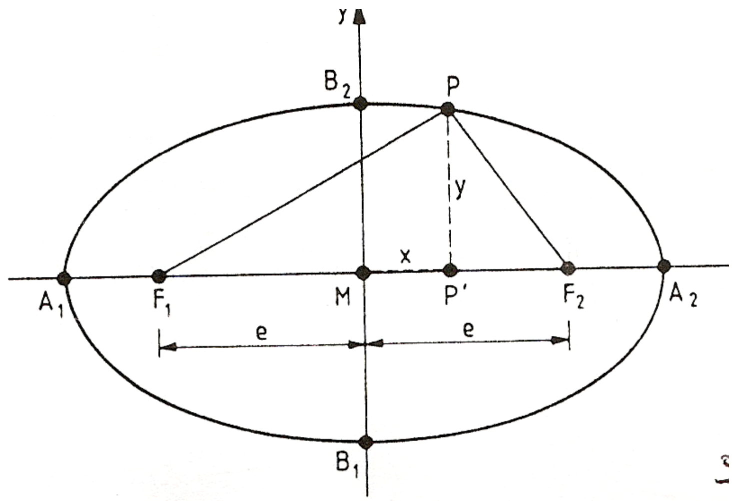
بيضوي يا ايليپسی د ټولو هغو ټکو P ډيرۍ ده، د کومو واټن چې له دوه ټينګ په ځايټکو، داسې په نامه د ايليپسی د سوزونټکويا محراق F1 او F2 څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د څيرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د -y محور سره سيومتريك دx - محور باندې ځايوو يا ږدو او د ثابت واټنزياتون ليکو:

$$\underline{PF}_1 + \underline{PF}_2 = 2a \qquad (16. 18)$$

د سوزونټکو واټن دې وي:

$$\underline{F}_1F_2 = 2e;$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شېره ۱۶ . ۱۱

دا e لاینې اکسڅننتریڅیتي(Exzentrizität دا یوناني کلیمه ده چې په الیپسی هوپربول او پارابول کی د همدغه تعریف لپاره ټاکل شوې) بلل کیږي .
د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(ځلوری یا مربع ته جګیږي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$ (رېښه رابیلیږي

(ځلوری یا مربع کوو)

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

ترتیب اوړون $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$

په ځاي کوو

$$a^2 - e^2 = b^2 \qquad (16.19)$$

او لاس ته راوړو

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad <=>$$

$$(x^2/a^2) + y^2 / b^2) = 1 \qquad (16,20)$$

د منځټکي($M(0,0$سره د ایلیپسی منځټکي مساوات

د $y=0$ لپاره دی $x=\pm a$، د $x=0$ لپاره دی $y=\pm b$. ایلیپسی (ځیره ۱۶ ، ۱۱)

د x - محور په ټکو $A1(-a,0), A2(a,0)$ او د y - محور په ټکو

$B1(0.-b), B2(0,b$) کی پرې کوي، aاوb د دواړو نیمحورونو اوږدوالی دی

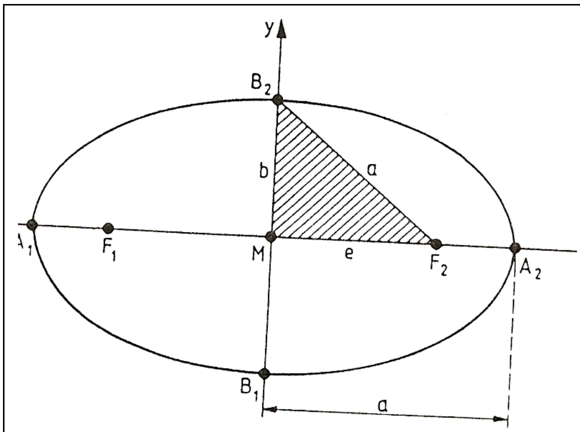


Bild 16.12

لکه د الیپسی د هرټکي لپاره، همداسی د
Bلپاره هم اړیکی (۱۶ ، ۱۸) باور
لري:

$$\underline{F1B2} + \underline{F2B2} = 2a$$

د $\underline{F1B2} = \underline{F2B2}$ له امله له
دې لاس ته راځي $\underline{F2B2} = a$

ځیره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دریګوډي MF2B2 کی د اړیکو (۱۶ ، ۱۹) هندسي ارزښت پیژندل کیږي.

که منځټکی M کواوردینات Mx ; My ولري او د ایلیپسی محورونه د کواوردیناتو سره غبرګ وځغلي، نو د ایلیپسی د یوه خوښې ټکي($P(x,y$لپاره باور لري:

$$(x-xM)^2/a^2 + (y-yM)^2/b^2 = 1 \qquad (16 , 2 1)$$

د ایلیپسی د منځټکي مساوات د منځټکي $M(x_M, y_M)$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فرمول څلولو وروسته د ايليپسی ټوليز(عمومي) جوړښت پيژندل کيږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16\,,22)$$

د ايلپسی مساواتو ټوليزه بڼه يا - فورم

د ګردې برابرون سره په توپير(پرتله يا مقايسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 څله ووني يا ضريبونه يو له بل توپير لري، مګر همغه مخنخښه لري($A.B > 0$)

بيلګه ۱۶ . ۱۶ :

د د ايليپسی منځټکی، نيممحور، او سوزونټکي لټول کيږي، که دا برابرن

$$9x^2 + 25y^2 -54x +100y -719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبنونه : د ايلپسي برابرون د منځټکي بڼه يا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کيږي:

$$9(x^2-6x)+25(y^2+4y) = 719$$

څلورئ پوره کونه يا مربعتکميلونه

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+4y+4) = 719+9.9+25.4$$

$$9(x-3)^2 +25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ويش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځټککواوردينات

$$xM = 3\,,\ yM= -2$$

لوستلکيږي او د نيممحور لپاره $a^2=100$, $a=10$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کيږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$$

او له دې سره منځټکي (پرتله څيره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M-e,y_M)=F_1(-5,-2), F_2(x_M+e,y_M)=F_2(11,-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۶ . ۱۷ :

د ايلپسي برابرون د منځټکي (M(-1,3 سره لټول کيږي، په کوم چې ټکي(P1(-3,3 او $P_2(0,3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبونه : د (۱۶ ، ۲۱) سره سم د منځټکي(M(-1,3 سره د ايلپسي براړون داسی دي

$$(x-1)^2 / a^2 + (y-3)^2 / b^2 = 1$$

ټيکي P1 او P2 بايد د ايليپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2}+\frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2}=1, \frac{(0+1)^2}{a^2}+\frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

د دې برابرونونو له لومړۍ څخه لاس ته راځي $4/a^2 + 0 = 1$ همداسی(< = >)
$a = 2$ او له دې سره د دويم برابرون څخههمداسی < = >

$$\frac{(0+1)^2}{4}+\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3}{b^2}=3/4 \Leftrightarrow b=3$$

د ايليپسی لټونکی برابون داسی دی:

$$(x+1)^2/4 + (y-3)^2/9 = 1$$

بيلګه ۱۶ . ۱۸ :

د کربنو

الف) $y = x + 2$

او ب) $y = x - 2$

غوڅټکي د ايلپسی $9x^2+y^2+54x+72=0$ سره لټول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه : که الف) $y=x+2$ د ایلپسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2 +54x+72=0 \iff 10x^2+58x+76 = 0$$

د څلوری - یامربع برابرونونو اوبی :

$$x1 = -2 , x2 = -3,8$$

د غوڅښکي ابسځیز یا پروتمحور دی. په دې پورې اوردینات یا ولاړ محور

$$y1 = 0 , y2 = -1,8$$

اړه لري.

ب) دy رامدځ ته شوې څلوری(مربع) برابرون

$$9X^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رییل اوبیونه نه لري. کرښه $y = x-2$ د ایلیپسې څخه دباندې پرته ده

۱۶ . ۴ :هوپربول Die Hyperbel

پېژند:

هوپربول یا هیوپربل د ټولو هغو ټکو ډیری ده، د کومو لپاره چی د کمون یا کمښت مطلقه ارزښت واټن، د دوه کره په ځاي ټکو $F1$ او$F2$ ،دا په نامه د هوپربول سوزونټکو

یامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټکي ، لکه په ایلیپسی کی دلته هم موړ کره ټاکو (څیره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنکمون یا واټنکمښت| $|\underline{PF1}-\underline{PF2}|= 2a$ او (ځیره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټکوواټن) $\underline{F1F2} = 2e$ (څیره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2-a^2= b^2 \qquad (16.23)$$

په پورته کې یا بل چیرې، چې کوم څه لاندې کرښیز شوي وي، دا په زیاتو ادبیاتو کې پورته کرښیز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې کرښیز شوي وي او که پورته، توپیر نه لري یا همغه څه دي٠

یو ایلیپسی برابرون ته ورته تلنه (برخۀ ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لاربښودوي:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1 \qquad (16 . 24)$$

د هوپربول منځټکي برابرون د منځټکي (M(0,0 سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

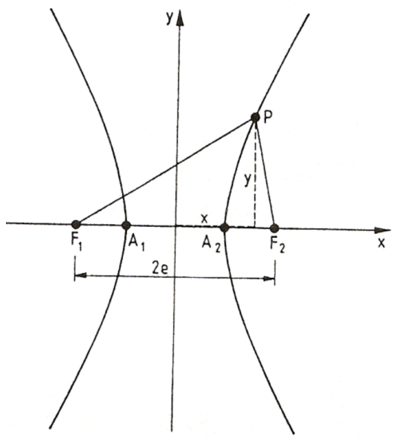


Bild 16.13 ځېره

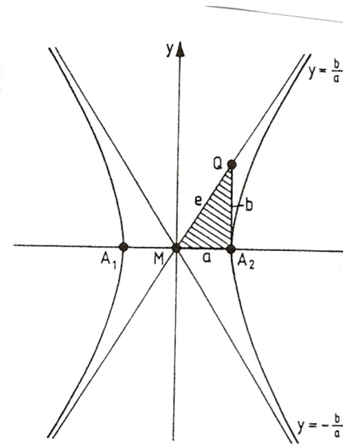


Bild 16.14 ځېره

د y=0 لپاره x=±a دی ، دا په دې مانا چې هوپربول د x - محور په ټکي

A1(-a,0) او(A2(a,0کی غوڅوي. دا ټکی ککری ټکی بلل کیږي۰ ګورو چی دا دککری ټکی دی .(د ناپای سره ځاننیونی په هکله: که (۱۶ . ۲۴) د y په لور حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b.\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} = \pm\frac{b}{a}.x.\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

د x -> ± oe لپاره $-a^2/x^2$ له منځه ځي. پس هوپربول ځان کربنی $y = \pm(b/a).x$ ته نزدې کوي (ځیره ۱۶ . ۱۴)

له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \qquad (16,25)$$

د هوپربول اسیمپتوتی بلل کېږي.

د (۱۶ . ۲۳) له امله $MQ = e$ دی .

که منځټکی M کواوردینات xM ,yM ولري او سیومتریك غبرګ د کوردیناتو محور ته ځغلي، نو د یوه په خوښه هوپربول ټکي(P(x,y لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2-(y-y_M)^2/b^2=1 \qquad (16,26)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوپربول منځټکي برابرون ($M(xM ,yM$ سره.

د پورته مساوات د ځلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربولمساوات ټوليز جوړښت جوتيږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16,27)$$

دهيوپربول برابرون ټوليزه بنه يا فورم
دلته د ايليپسی سره په مخامخ (همدا برعکس دئ) يا په ځتځ ډول د x^2 او y^2 ځلهووني بدله مخنښه لري
($A . B < 0$) ټوليز برابرون هم کولی شي چی مونږ لاندې منځټکي برابرون ته لارښود کړي،

$$(y-yM)^2/b^2-(x-xM)^2/a^2=1 \qquad (16,26')$$

د کومو ځيره چی يو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دئ.

بيلګه ۱۶ . ۱۹:
د لاندې هوپربول منځټکی او سوزونټکی لټول کيږي

$$-25x^2 -150x+144y^2 -188y +144 = 0$$

اوبيونه: د ورکړشوي هوپربولمساوات بنه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوړي يعني فورم يی بدليږي:

$$-25(x^2+6x)+144(y^2+2y) = -144$$

(د ځلورئ پوره کونه)

$$-25 (x^2+6x+9)+144(y^2-2y+1) =-144-225+144$$

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -225$$

(په 225 - ويشنه)

$$-25(x+3)^2+144(y-1)^1 = -225+(x+3)^2 / 9 -(y-1) /(25/16) = 1$$

د لاس ته راغلومساواتوڅخه لاندې لوستل کيږي:

$$xM = - 3 ,yM = 1 ,a^2 = 9 , a = 3 ,$$

$$b^2 = 25 /16 , b = 5/ 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144/16 + 25/14} = 13/4$$

د هوپربول منځټکی (M(-3,1دی ، سوزونټکي يی
(F1(xM-e,yM)=F1(-25/4,1 او (F2(xM+e,yM)=F2(1/4,1 دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول $9x^2-4y^2=36$ اسيمپټوټي يو له بل سره کوم کونجونه تړي يعنی جوړوي يا اسيمپټوتی په کومو کونجونو کی يو بل پريکوي؟
اوبيونه : هوپربول د منځټکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده $x^2/4-y^2/9=1$ يا د $a=2, b=3$ سره
له دې سره سم دواړه اسيمپټوتی د(۱۶ . ۲۵) له مخی $y=(3/2)x$
او $y=-(3/2).x$ دي.

د لومړی اسيمپټوتی او x - محور ترمنځ کونج φ د $\tan\varphi = 3/2, \varphi = 56{,}31°$ څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسيمپټوتو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi = 2\varphi = 112{,}62°$
داکونج کيدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بيلګه ۱۶ . ۲۱ :

د ايليپسی $x^2/64+y^2/16=1$ غوځټکي د هوپربول سره لټول کيږي چی منځ ټکي يی په سرچينه او ککرټګي يی د ايليپسی په سوزونټکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ايليپسی ولري.

اوبيونه : د ايليپسی نيممحور په a1 او b1 سره او لاينيزه اکسڅينتريڅيتي يی په e1سره ښايو.
نو باور لري: $a1=8$, $b1=4$ او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

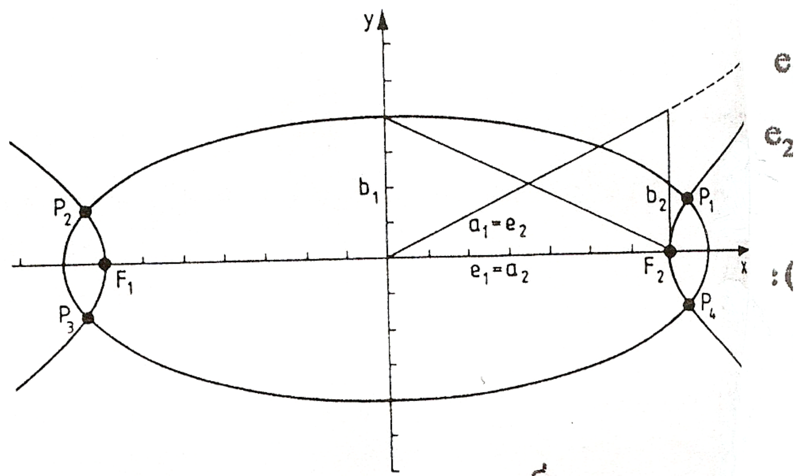


Bild 16.15

د هوپربول لپاره نخبنی e_2, a_2, b_2

استعمالوو:

باورلري (پرتله خیره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۱۶ . ۲۳) سره سم دی

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هوپربولبرابرون داسی دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوښتکو کواوردینات د ایلپسی- او هوپربولمساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زیات شي نو لاس ته راځي

$$(\frac{1}{16} + \frac{1}{48})x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ایلیپسي او هوپربولبرابرونونو څخه لاس ته راځي

$$y^2 = 16(1 - x^2/64) = 16/7 \Leftrightarrow y^2 = 16(x^2/48 - 1) = 16/7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

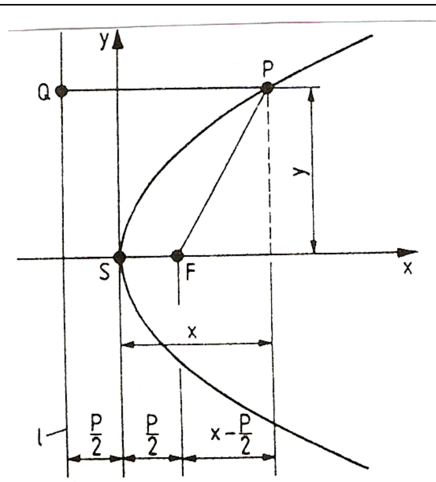
(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د دواړو کړو غوڅټکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, 4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_3(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_4(8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}})$$

۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډيرئ ده، چې واټن يې له يوه کلك په ځاي ټکی، د پارابول سوزون ټکیF، او يوې کلك په ځاي کرښی، د پارابول ترمخکرښی l (داپه ځيره کی جوته ده چی دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي(ځيره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکرښی ترمنځ واټن نيم پارامتر p بلل کيږي، Sككری ټکی دی،کرښه چی له S او F تيريږي د پارابول محور دی.

 Bild 16.16 ځیره	له پيژند – يا تعريف برابرونونو = $\overline{PF}$ $\overline{PQ}$ځخه لاس ته راځي $$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = x+\frac{P}{2}$$ او له دې ځخه د مربعکولو او د ټولګی ځخه لاس ته راځي $(x-p/2)^2 + y^2 = (x+p/2)^2,$ $x^2-px+p^2/4+y^2 = x^2+px+p^2/4$

پس لرو

$$y^2 = 2px \qquad (16,28)$$

د پارابول ککربرابرون د ککرټکي S(0,0) سره، پورته لور ته واز (x > 0)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \qquad (16 , 29)$$

هغه وکینې لور ته واز پارابول دئ د واریابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$(16 . 30) \qquad x^2 = 2py$$

د پارابول ککرمساوات د ککرټکي(S(0,0سره، پورته واز پارابول (y > 0)

په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \ (Y<0) \qquad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دئ.

که ککرټکي S کواوردینات xS , yS ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلی په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلي، نو د یوې په خوښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(16. 32) \qquad (y - yS)^2 = 2p(x-xS)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرې ټکی(S(xS,yS سره، چی ښی لور ته وازوي(x>xS)

$$(x - xS)^2 = 2p(y - yS) \qquad (16.33)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرټکي(S(xS,yS سره، چی پورته لور ته واز وي (y> yS)٠

په همدې ډول:

$$(y - yS)^2 = -2p(x - xS) \quad (x<xS) \quad (16.34)$$

$$(x -xS)^2 = -2p(y - yS) \ (y<yS) \quad (16.35)$$

هغه کښې لور او همداسی کوزې یا لاندې لور ته واز پارابولونه دي

د فرمول (۱۶ . ۳۲) همداسی (۱۶ . ۳۳) ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټولیز (عمومي) جوړښت پیژندل کیږي:

$$Ay^2+Bx+Cy+D= 0 \ , B |=0 \qquad ((16, 36)$$

همداسی(< = >)

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 , C|=0, \qquad (16 . 37)$$

د پارابولمساوات ټولیزه (عمومي) بڼه (فورم)

بیلګه ۱۶ . ۲۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابول برابرون دې له ککريټکی ، له نيمپارامتر او وازلورې څخه پيداشي:
الف $S(,0,0), P = 6$)کيڼ، ب $S(2,1) ;P= 0,5$) پورته
پ $S(-3,-5), P = 4$) لاندې ت $S(4,-2) ,P= 2 /3$) ښی

اوبيونه يا حل:
الف) $y^2 = -12x$ ب) $(x-2)^2 = y-1$
پ) $(x+3)^2 = -8(y+5)$ ت) $(y + 2)^2 = (4 /3) (x-4)$

بيلګه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککرېټکي کواوردينات ، نيمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي $a) (x^2 + 4y +20x + 10 = 0, b)\ y^2 -18x + 12 y -36 = 0$.

اوبيونه : د پارامترتوليزه بڼه (فورم) دې په ککريبرابرون (۱۶ ، ۳۲) همداسی(۱۶ ، ۳۳) همداسی (۱۶ ، ۳۴) همداسی (۱۶ ، ۳۵) کی وازمايل شي (څلوری پوره کيدنه يا مربع تکميليدنه) . د ککريبرابرون څخه ککريټکي ، نيم پارامتر او وازلور

لوستوړ دي.

a) $x^2 + 20x +100 = -4y -100 + 100$

$(x+10)^2 = -4y$ $S(-10 , 0) , P = 2$

پارابول لاندې لور ته و از دی

b) $y^2 + 12y +36 = 18x +36 + 36$

$(y+6)^2 = 18(x+4)$

$S(-4,-6) , P = 9$

پارابول ښی لور ته واز دی

۱۶ . ۶ ټولګه:

دا له ۱۶ . ۱ نيولی تر ۱۶ . ۵ پورې خيرل شوې دهوارې کرېږ (کرېی په هوارې يا سطحه کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

-کرښه
-ګردۍ
-ایلیپسی چی د کواوردینات محور سره غبرګ ځغلي، ټول د لاندې مساوات
-هوپربول
-پارابول
په څیر انځوریږي:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad (16 , 38)$$

فاکتورونه، ضریبونه یا ځله ووني A او B د کړی د توکو لپاره پرېکنده دي.
برابرون (۱۶،۳۸) لاندې روښانوي
د $A.B > 0 , A \neq B$ لپاره ایلیپسی ،
د $A = B$ لپاره ګردۍ
د $A.B < 0$ لپاره هوپربول، که $A > 0 , B < 0$ وي، نو کيڼ لور ته واز،
که $A < 0 , B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لورته واز
د $A.B = 0 , A = 0 , B \neq 0$ لپاره یو پارابول، چی محور یی د x - محور سره غبرګ دی د $A \neq 0$ ، $B = 0$ یو پارابول ، چی محور یی د y - محور سره غبرګ دی
د $A = B = 0$ لپاره یوه کرښهکه په (۱۶ . ۳۸) یو بل ګډوله(یو د بل سره ګډ شوی) ځلوری توکي رامنځ ته شي، نو دا د کړې یو ځلوری برابرون یا مربع مساوات ښکاروي (توضیخ کوي) ، د کومو محورونه چی نور د کواوردیناتو محورونو سره غبرګ نه دي.

بیلګه ۱۶ . ۲۴ :
له لاندې مساواتو سره کومی کړې انځوریدلی شي ؟

a) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$ b) $3x^2+24x+15y+138=0$

c) $16x^2+y^2-96x=0$,d) $2x^2-2y^2+16x+10y-105/2=0$?

اوبیونه : (یادونه : لکه د نورو ځایونو په څیر دلته هم الف د a په ځاي لیکم ، ځکه چی د پښتو لپاره کرښه په لاتین حروفو له ښي لور نه شي پیل کیدی)
الف یاa) که $A = B = 1$ وي ، نو ګردۍ
ب یاb)که $B=0$ پارابول چی محور یی د-y محور سره غبرګ وي
پ c)که $A \neq B$, $A.B > 0$، نو ایلیپسی
تd)که $A.B < 0$ ، نو هوپربول

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30°$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45°$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120°$, d) $P_1(4,4)$, $= 0°$

e) $P_1(0,0)$, $=150°$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90°$

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅې (لنډ: محورغوڅې) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅیکو واټن d د محورغوڅیکو سره چې یو له بل یې لري وټاکئ.

a) $a = 5$, $b = 2$, b) $a = -1$, $b = 3$, c) $a = 2$, $b = -3$, d) $a = -3$, $b = -3$

۴ – یو دریګوټی دا لاندې ګوټکي لري A(-4,-1), B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوټیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوټي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برخهوټېنه یا –فورم څنګه دي؟

a) $3x -5y +15 = 0$, b) $4x -3y -18 = 0$

c) $-4x +2y -10 = 0$, d) $-3x -4y +15 = 0$?

۶ – د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتخای د کرښو

a) $y+2,4x - 6 = 0$, b) $28x +10y = 0$, c) $8x + 5y =2$,

d) $5y +12x -10 = 0$. e) $y +(12/5)x = 3$, f) $6x +2,5y = 5$

سره وڅیږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د لاندې کرښو د غوڅېدو کواورديناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$, $3x - y = 5$, b) $y = (1/2)x + 1$, $y = -2x + 6$, c) $y - x = 7$, $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$, $-x/2 + y/3 = 1$, e) $6x - 2y + 10 = 0$, $y = 3x + 6$, f) $y = 4x - 1$, $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅېدو ټکي $P(0,5)$ څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې ګوټ سره د درېګوټي دننه کونجونه څومره لوي دی ؟ (پیلونه: دریکونجي وکاږئ) $A(-4,-1), B(2,-2), C(1,3)$

۱۰ – د ولاړپیروتې کرښې یا زوږندې مساوات له ټکی $P(2,0)$ څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دې؟

۱۱ – د ولاړکرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي $P(-1,-2)$ څنګه د

۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي $P(-1,-3)$ تیریږي، څنګه دي؟

۱۳ – د لاندې مساواتو سره ګردیمنځټکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2 9y = 0$, d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$, f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې ګردیو مساوات وڅیړئ

الف) چې منځ ټکی $M(-2,-1)$ لري او له سرچینی تیریږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5-3)$, $P_3(5+3,-1)$ يې د غاړو ټ

پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11), P_2(5,5)$ څخه تيرېږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تيرېږي او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ لمسوي.

ث) چې د هغې منځټکی په کرښه $y = 3x - 19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسې له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تيرېږي.

۱۵ – کوم پروتځايونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې يو له بل سره لري:

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,

d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتځاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5,y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګرديو منځټکي پيداکړی چې وړانګه يې $r = 5$ وي، کومی چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښې $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

۲۰ – د ايليپسې مساوات وټاکی، له

a) $M(0,0)$, a 11, $c = 8$, B) $M(0,0)$, $b = 4$, $c = 6$,

c) $M(-3,7)$, $c = 4$, $b = 5$, d) $M(4, -5)$, $e = 7$, $a = 10$!

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۱ – د لاندې ایلیپسیمساواتوڅخه د نیممحورونو اوسوزونتېکو منځتکی او اوږدوالی راپیداکړئ:

a) $x^2 / 100 + y^2/ 64 = 1$ b) $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 -24x >= 0$, d) $5x^2 +9y^2 -10x + -90y + 50 = 0$,

e) $4x^2 -13y^2 -208 = 0$, f) $4x^2 +9y^2 +54y -227 = 0$!

۲۲ – د هغو ایلیپسو مساوات راپیداکړئ، کومې چې

الف) چې منځتکی M (0,0) او لاینې ایکسڅنتریشیتي e = 6 لري او تکی P(10.0) څخه تیرېږي،

ب) له منځتکی M (1,1) او لاینې ایکسڅنتریشیتی e = 4 لري او له تکو څخه تیرېږي،

پ) د نیممحور اوږدوالی a = 9, b = 6 لري او له تکو $P_1(2,8)$, $P_2(2,-4)$ څخه تیرېږي!

ت) د نیممحوراوږدوالی a = 2 , b = 6 لري او له تکو $P_1(-1,-4)$, $P_2(-5,-4)$ څخه تیرېږي!

۲۳ – د لاندې ایلپسو او کرښو ترمنځ غوڅتکي پیدا کړئ

a) $x^22 +4y^2 -20 = 0$, $x+2y-6 = 0$,

b) $3x^2 +4y^2 -24x =$, $y = 3 .x$,

c) $(x-3)^2/ 9 +(y-1)^2 / 4 = 1$, $y = x+1$,

d) $x^2 + 4y^2 +16y +12 = 0$, $y = x-2$!

۲۴ – د هوپربول مساوات له

الف) b M(0,0) , a = 4 , e = 5 , ب) M(-3,2), b = 4 , e = 6 ,

پ) M(1,1) او هوپربولتکو $P_1(-3,1)$, $P_2(6 , 7 /4)$!

ت) a = 3 , b = 2 , x = -1 او د هوپربولتکي P(-4,-2) وټاکئ !

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۵ - د هوپربولونو

a) $x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1$, b) $9x^2 - 64y^2 = 576$

نیمحورونواوږدوالی او اسیمپتوتې راپیدا کړی !

۲۶ - د لاندې هوپربولونو منځټکي او د نیمحور اوږدوالی پیداکړی

a) $9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0$, b) $x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0$,

c) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$, d) $x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0$!

۲۷ - د لاندې مساواتو سره دکړو غوځټکي وټاکی:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \frac{1}{5}x$,

b) $4x^2 - 9y^2 = 144$, $x^2 - 24y = -28$,

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - 5$,

d) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0$, $9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0$,

e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, $x^2 - y^2 = 16$!

۲۸ - د لاندې پارابولونو ککرټکو اوسوزونټکو کواوردینات وټاکی:

a) $5y^2 + 4x = 0$, b) $2y - (1/2)x^2 = 0$ c) $4y + (1/3)x = 0$,

d) $2y^2 - 12x = 0$, e) $y^2 - 2y - 10x - 9 = 0$, f) $x^2 - 7x - y + 12 = 0$

g) $y^2 - 6y + 6x - 3 = 0$. h) $x^2 + 4x + 12y\ 52 = 0$

۲۹ - د پارابولمساوات له لاندې ککرټکو او سوزونټکو وټاکی:

S (0,0), F(0,1) , b) S(0,0), F(-1,0), c) S(1,1) , F(2,1),

S(-1,-1), F(-2,-1), e) S(2,-3), F(2,-2), f) S(-2,3), F(-2,2)

۳۰ - یو پارابول د ککرې پروت ارزښت $x_S = 3$ لري، کرښه $y = 8$ د محور په ځ

ټکي P (7,4) تیریږي. ددې مساوات څنګه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳۱ – یو پارابول د ککرکواوردینات $y_S = -3$ لري، کرښه $x = 2$ د محور په څیر او له ټکي $P(4,-4)$ تیریږي. د هغې مساوات څنګه دي؟

۳۲ – کوم پروتخاي اړیکی د

الف) پارابول $y^2 = -4x$ او کرښی $y = x-1$

ب) پارابول $x^2 = 5y$ او کرښی $y = x-4$

پ) پارابول $x^2 = -3y$ او کرښې $y = x + 5/12$

ت) پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ اوکرښې $y = x$

ټ) پارابول $y^2 = 7x$ او کرښې $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتی دي؟

که موجود وي ، نو غوښتکی همداسې لمستکی يې ورکړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ وکتور شمیرنه او په ځمککچ کی د هغه په کارونه

۱۷ . ۱ د وکتور پيژند ،

په کارتيزي کواودينات سيستم کی د وکتور انځورونه

په پيداينتي پوهنو يا طبيعي علومو او تخنيك کی موږ لويی پيژنو چی د رييل ارزښتونو په ورکولو سره يواځنی ټاکلي دي، لکه وخت، ګرمي، توان ، وزن . داډول لويو ته سکالار لويې وايو .نورې لويی لکه زور ، چټکتيا(سرعت)، بيړه (تعجيل)، د برقي او مقناطيسي چاپيريالزور برسيره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسير اچوي. موږ دې لويو ته وکتورونه وايو.
د وکتور له لارې کيدی شي چی دهندسي شيانو ځان نيونه هم تشريح کړای شو. په فضا هوا کی يو ټکی کيدی شي چی د هوا کواوردينات سيستم کی د سرچينی څخه د دې ټکي په لور لوريزشوې کرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشريح کړی شي يعنی له سرچينی څخه يی په دې ټکي بريد وي يا دا ټکی په نخښه کړای شي يا يې د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوريزه وي.

يادونه : ما وکتورونه a,b, ښوولي، ښه به يې $\vec{a},\vec{b};....$ وای، ډيرو کتابونو کې پنډ **a,b,..** ليکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه ياده کړې، چې د ناټيکپوهنې څخه مو ژغوري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چی د یوه مطلقه ارزښت (|a| چی داوږدوالي کچګڼ یی هم بولو) او یوې لورې له مخی ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي۰

(لنډ: یوه لویه چی لور ولري، وکتور دی. موږ کړی شو چی دې لویې ته غشی هم ووابو. زه یی همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کي د یوه لور لرونکی کرښی(غشي) په څیر انځورکیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخی ټول مساوي اوږده او په یوه لور لورې- لوریزې- یا لورونی کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدټکي باندې تړل یی په نظر کي نه دي نیول شوي . سړی ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راتلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوې لویې، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګي په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیرلیکی یا بهتره برید لیکی په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي(په غبرګ یا موازی راکښون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینې (د برید - یا حملی ټکی) پورې تړلی. داسی وکتورونه ځاي وکتورونه(په ځاي تړلي -) بلل کیږي .ځنی په لاندې کی د فرمول بندي شوې شمیرقاعدې له مخې کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه **a** او **b** برابر بلل کیږي **a** = **b**

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.

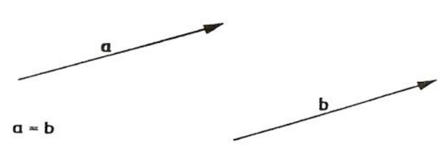


Bild 17.1 ځاکه

ټولي برابرې اوږدې او برابرې – یا همغه لوریزې کرښی، لکه چی وویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وکتور **a** د مطلقه ارزښت 0=|**a**| سره 0 یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور **ea** چې د a لور او مطلقه ارزښت 1=|**e**|لري، نو په وکتور a پورې اړوند یوونوکتور(۱) بلل کیږي.

(1)Einheitsvektor,unit vector یوونوکتور یانې ارزښت یې یو یوون دی یا واحدوکتور(؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوګونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نیغ ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینیار(kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرګ وي، کومپلانار (komplanar) بلل کیږي ، که د همغي یوې هوارې سره غبرګ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوایي یا فضایي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یاضرب د یوه رییل ګڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دی چې د $|\lambda|$ - ځله د a مطلقه ارزښت لري او د $0 < \lambda$ لپاره همغه لور لري لکه a، په ښې یا برعکس که $\lambda < 0$ وي نو د a مخامخ لور یا په ښې لور لري

جمله ۱۷ . ۱:

د رییل ګڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدې

کوموتاتیف قاعده،اسوشیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda.\vec{a} = \vec{a}.\lambda;....Kommutativ$$

$$\lambda(\mu.\vec{a}) = \eta(\lambda.\vec{a}) = \lambda\mu.\vec{a};....Ass.$$

$$|\lambda.\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|, 0.\vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

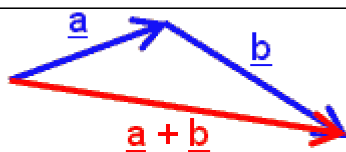
ددې ځل یاضرب د پيژند سره ممکن کيږي چی هر وکتور a د يوه ريبل ګڼ (ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پورى تنظيم يا ترتيب شوى يوونوکتور د ځل په ځير انځور کړو: $a = |a|.e_a$

پيژند ۱۷ . ۶ :

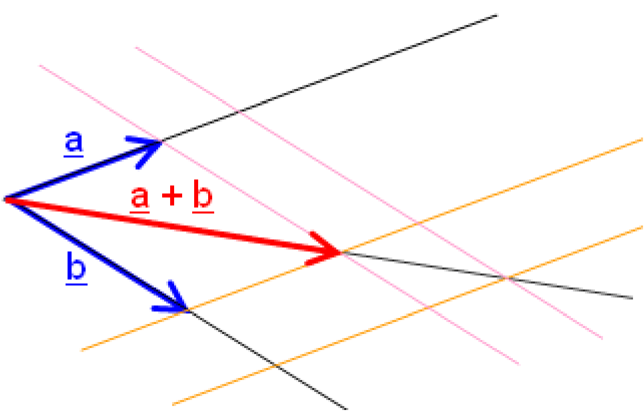
(د وکتورونو زياتون)

د دوه وکتورونو a , b زياتون (جمع) a+b د دواړو وکتورونو a او b څخه غزيدلی غبرګ اړخيزي(موازي الاضلاع) لوريز دوه کونجتړي (قطر) ده. ځيره ۱۷ . ۲)

د وکتورنو زياتون (جمع) د قوو يا زورونو د زياتون په ځير دی او دا د شمير قاعده ساده د ليدو کيدی شي



ځيره شته دغبرګ اړخيزه پورته نيمه يا له تعريف ۱۷ . ۶ څخه پورته ځيره يا مخامخ ځيره



جمله ۱۷ . ۲ :

(د وکتورونو د جمع لپاره د شميرقاعدې)

$a+b=b+a$ (کوموتاتيف قاانون)

$(a+b)+c=a+(b+c)$ (اسوسياتيف قانون)

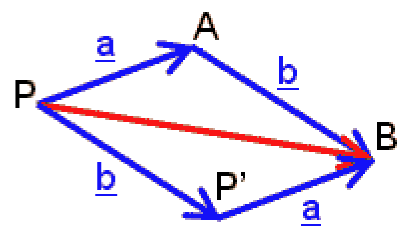
ديستريبوتيوو او وربسي يه لاندي نظم اړيکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

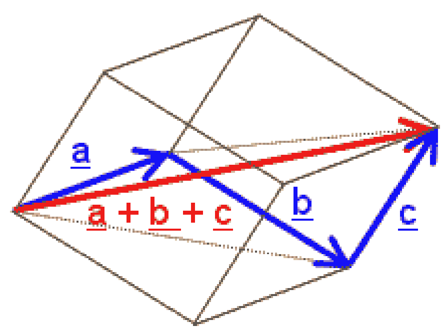
$$(\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a};...........Distrib.$$

$$\mu(\vec{a}+\vec{b})=\mu.\vec{a}+\lambda\vec{b};...........Distr.$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



د زياتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کيږي چی هر وکتور، د بيلګي په توګه د وکتورونو د کواوردينات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زياتون په څير انځورکړای شو يا وليکو. په دې ډول برياللي کيږو چی دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره يا هدفمنده شميرنه په کواوردينات سيستم کی انځور کړو



پورته خيره کې د درې وکتورونو زياتون

پيژند ۱۷ . ۷ :

په کواودينات سيستم کی د وکتور a انځورونی لاندې

a=(a1,a2,a3)   (17 . 1)

موږ په يوه ولاړکونجيز

-x1 , x2 , x3

کواوردينات سيستم کی د وکتور انځوره ونه پوهيږو، د نخښی يا مخ نخښی په نظر کي

نيولوسره او د ai پرويکشن يا پريوستون له لارې په هر xi - محور(i = 1 , 2 , 3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په ځیره ۱۷ . ۳ کی) داسی ai د a وکتور i - م کواوردینات بلل کیږي

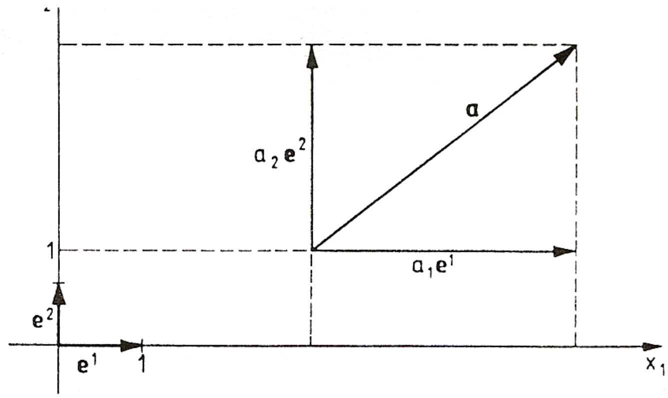


Bild 17.3 ځېره

یادونه:
موږ دلته که د وکتورونو پورته ځه لیکو نو هغه د وکتور پوتنځ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور ښايي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لوري پوره جوت دی. د xi- محورونو په لور په کواوردیناتشکل د یوونوکتورونو ځرګندونه په لاندې ډول ده

$$e^1 = (1 , 0 , 0)$$
$$e^2 = (0 , 1 ,0) \qquad (17 . 2)$$
$$e^3 = (0 ,0 , 1)$$

د وکتور aانځورونه د کواودیناتو $a^i; i = 1 , 2 , 3,$ او د یوونوکتورونو(۱۷ . ۲) د استعمال له لارې، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لارې یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لارې د وکتور a انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1\vec{e^1} + a_2\vec{e^2} + a_3\vec{e^3}; \qquad (17,3)$$

د دوه پراخیدونې یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزیون انځورونه. (ځېره ۱۷ . ۳)
دلته, a^ie^i چی i=1,2,3 وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیږي د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل گڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کواوردینات ډوله یا په څیر صورت نیسي، دا په دې مانا چی لاندې باوري کیږي::

$a=(a_1, a_2, a_3),\quad b = (b_1, b_2, b_3)$

$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3)$ (17 . 4)

$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.........................(17,5)

بیلګه ۱۷ . ۱ :

د(a=(-2,3,-5 , b=(1,-6,4) لپاره لرو

2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2).

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په څیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسی

پیژند ۱۷ . ۸ :

د a - b کمون یا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - یا په څټ وکتور یعني -b زیاتون دی: a-b=a+(-b) (څیړه۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷. . ۸ لاس ته راځي : وکتور a ، کوم چی له x1 ټکي x^2 ټکی ښایي (د دوه اړخؤنویا بعدونو انځورونی لپاره .ش ۱۷ . ۵) داسی دی

(پاي ټکی ترې کم پیل ټکی یانې د پایټکي او پیلټکی کمښت): $a = x^2 - x^1$

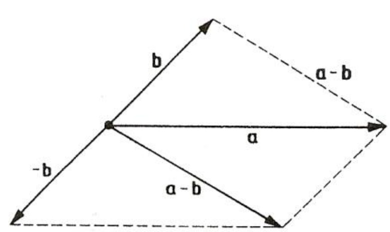


Bild 17.4 څېره

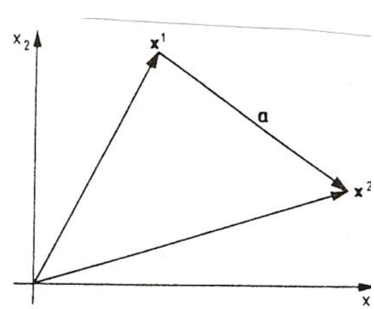


Bild 17.5 څېره

بیلګه ۱۷ . ۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه وکتور چی له $x^1 = (-1,-3,1)$ ټکي څخه($x^2=(2,-1,5$ ټکی ښايي(په ګوته کوی یه ګوتنیوونی کوي) داسی دی :

$$a = x^2-x1 =(2,-1,5)-(-1,-3,1)=(3,2,4).$$

۱۷ . ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه یا ضربونه

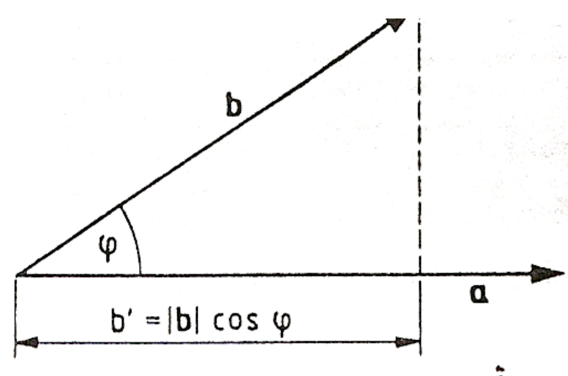
پیژند ۱۷ . ۹ :

د دوه وکتورونو a , b سکالار ځل a . b د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت او له دي دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساین ځل یا ضرب دی، یاني

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi;............................(17,7)$$

د سکالار ځل یا ضرب نتیجه سکالار ده

په (۱۷ . ۷) کی فاکتور $\vec{b}' = |\vec{b}|.\cos\varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نخښني ساتلو سره (د کوساین د پیژند له مخی) په وکتورa دوکتور b پرویکشن یا پریوتل یا پرییستل دي (څیره ۱۷ . ۶)



په فزیك کی د سکالار ځل یا- ضرب بیلګه :
که a هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د b زور تاثیر اچوي، پس A = a. b له دې زور له لارې کړ شوی کار ښايي) د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرویکشن سره ځل دی) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۵ : (د سکالار ځل شمیرقاعدې)

a.b=b.a (کوموتاتیو قاون)

a(b+c)=a.b+a.c (دیستریبوتیو قانون)

a.b=0 که a اوb یوپه بل اورتوګونال یا عمود وي (۱۷ ، ۸)

a.a=|a|² (17 . 9)

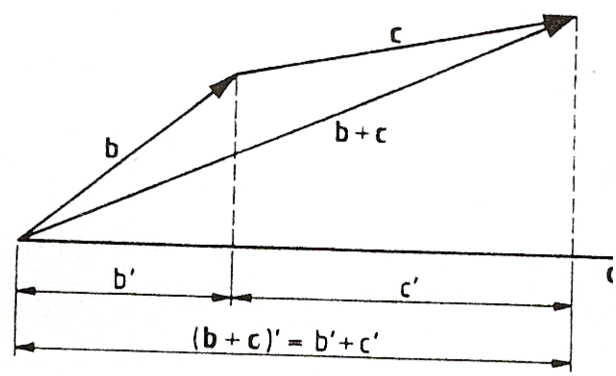
د پورته شمیرقاعدو جوتونه: کوموتایو قانون د (۱۷ . ۷) پسی ترلی لاس ته راځي.

دیستریبوریوقانون په (ځیره ۱۷ . ۷) کی لیدل کیږي.

د اورتوګونالوکتورونو لپاره باور لري: که a.b = 0 نو $\cos\alpha$ 0 =او(۱۷ . ۸)

له (۱۷ . ۷) څخه لاس ته راځي .

همداډول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچی$\alpha = 0°$ د a او a ترمنځ دی(، نو لاس ته راځي$\cos\alpha = 1$



پورته ځېره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :

د دوه وکتورونو سکالار ځل کواوردیناتډوله صورت نیسي یعني د

a = (a1 ,a2 ,a3), b = (b1 ,b2 ,b3)

د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :

a.b=a1b1+a2b2+a3b3 (17 . 10)

اوبیونه : د یوونوکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۹ . ۱۷) سره سمر د i = j لپاره$e^i.e^j = 1$ د(۹,۱۷) سره سم د j =|iلپاره $e^i.e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)(b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

یادونه : د لته د وکتورونو په تواندول چی څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونوکتورونو کي ددې لار ې ښوول کیږي چي دا دکوم کواودینات یوون وکتور دی او د نورو وکتورنو لپاره دا مانا لري چي کوم یو وکتور مو مطلب دی او نه چی په کوم توان دې ته د مخه هم گوته نیول شوې ده.

بیلګه ۱۷ . ۳ :

وکتور(a=(2,-3,1 دې له لاندې وکتورونو سره حٔل شي

a) b1=(3,1,4),b) b^2=(3,2,-2), c) b^3=(3,3,3)

اوبونه یا حل: بیا یا انینترنیت

a) a . b1 = 2.3 - 3.1 + 1.4 = 7

b) a . b^2 = 2.3 - 3.2 +1.(-2) = -2

c) a . b^3 = 2.3 - 3.3 +1.3 = 0

دلته c (په دې مانا ده چی وکتورونه a او b^3 اورتوګونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو:

$a \perp b^3$

جمله ۱۷ . ۷:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};\text{...........................}(17,11)$$

اوبیونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : $a . a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

بیلګه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو(a=(2,-3,1) , b=(3,0,-4 مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دی

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو aاو b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos\phi = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};\text{................}(17,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه یا حل : (۱۷ ، ۱۲) له (۱۷ . ۷) ، (۱۷ . ۱۰) او (۱۷ . ۱۱) څخه لاس ته راځی

بیلگه ۱۷ . ۵ :
په بیلگه ۱۷. . 3کی د $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شمیرلو دي.
اوبیونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a}, \vec{b^1}) = \frac{2.3 - 3.1 + 1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48°$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}.\vec{b^2}) = \cos\phi_2 = \frac{2.3 - 3.2 + 1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296, \phi_2 = 97,45°$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}.\vec{b^3}) = \frac{2.3 - 3.3 + 1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} == 0, \phi_3 = 90°$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه یا ځل

پیژند ۱۷ . ۱۰:

ددوه وکتورونوa,bکتورځل یا وکتوریز ځل یو وکتورc دی د کوم لپاره چې لیکو
$a \times b = c$ او لاندې خویونه لري:
۱ - د c مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b|.\sin\phi; ....(17,13)$$

دا دهندسي له مخې د a او b وکتورونو لخوا غزیدلي غبرگ اړخیز منځهواري په مانا دی.(ځ. ۱۷ . ۸)
۲- د c وکتور a او b باندې نیغ ولاړ یا اورتوگونال دی.
۳– دلته a , b , c یو ښي سیستم جوړوي، دا په د مانا چی که دښي لاس غټه گوته او د ښوولو گوته د aاوbلور وښایي نو کونججوړونکي د منځ گوته دوکتورc-
لور ښایي (ځیره ۱۷ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

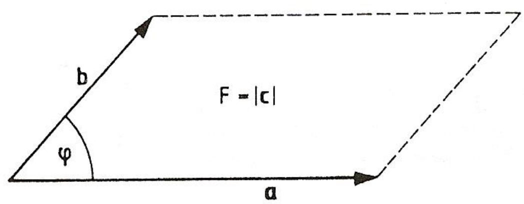


Bild 17.8

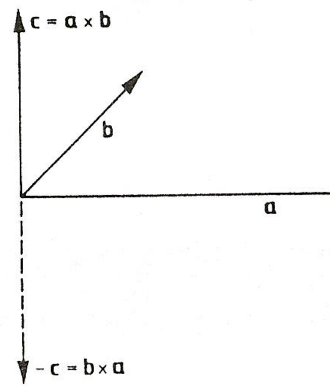


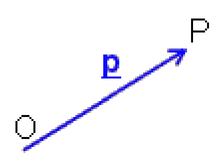
Bild 17.9

دا لاندي ځیري د فرمولونو سره موږ ته ټکی، کرښه او هواره را په ګوته کوي او د یوه وکتور مطلقه ارزښت.

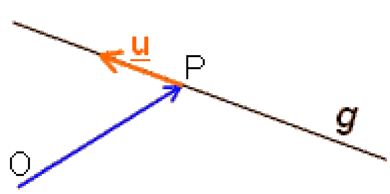
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$



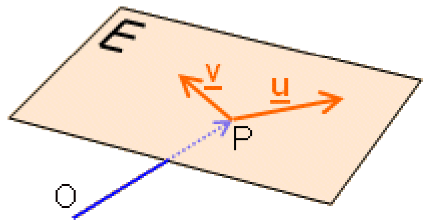
کرښه g



$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هواره E



E: **x** = **p** + r·**u** + s·**v**

وکتورځله ونه یا وکتور ځل یواځې د درى اړخيزې هوايا فضا لپاره تعريف دى.

د وکتورځل بيلګه په فزيك کی :

که F قوه یا زور وي چې په یوه کلك ځرخیدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د r په مړوند چې د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي ځرخوي (ځیره ش.
۱۷ . ۱۰) نو ځرخون مومنتDrehmoment منځ ته راځي M = r × F

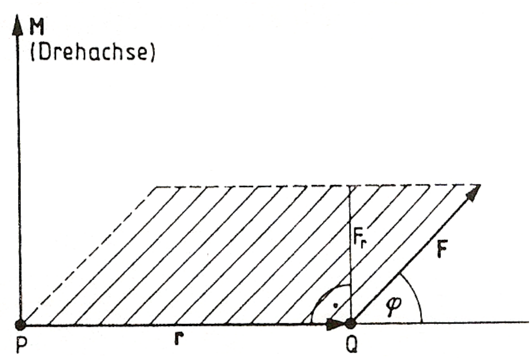


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخی د ځرخونمومنت د اوږدوالی | r | د اړم مټ او مطلقه ارزښت
$F_1 = |F| \sin\phi$

چې د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکی) دی:
$M = |r||F| \sin\phi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتورضرب لپاره د شمیرقاعدې)

$$a \times b = - b \times a \qquad (17 . 14)$$

دیستریبوتیو قانون)

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c) \qquad (17.15)$$

$a \times b = 0$ د کولینیار وکتورونو لپاره) (17 . 16

د پورته شمیرقاعدو ښه څرگندونه یا توضیح : (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي ښي سیستم له مخی (پیژند .۱۷ ۱۰ ،خ. ۱۷ . ۹)
د کولینیار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin\phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخی (۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په دیستریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دئ) دلته صرف نظر کیږي، لیدوړ والی یی نه څرگندوو. د وکتورځل شمیرلو لپاره د وکتورکواوردیناتږولـه ښودنی سره د یوون وکتورونو e^1 , e^2 , e^3 وکتورځل ته اړیو.د (۱۷ . ۱۵) شمیر قانون له یوې خوا او له بلی خوا د وکتور ځل پېژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د یوونوکتورونو وکتورځل)

$$e^i \times e^i = 0, i = 1,2,3;............................(17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2;...........(17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2;..........(17,17)$$

د دریمی درجی دیترمینانت کلیمی لاندې (پېژند۱۱ . ۲) او که څوك یوون وکتورونه د دیترمینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتورځل a×b د a , b کواوردیناتو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱ : د وکتورونو

b =(b1,b2,b3),a=(a1,a2,a3)

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توگه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix};...................(17,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبيونه يا حل : د وکتور $a=(a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3)$ ځل د وکتور
$$b=(b_1e^1+b_2e^2+b_3e^3)$$

د توکوډوله(توګي په توکي) وکتوري ځل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي
$$a\times b=e^1(a_2b_3-a_3b_2)+e^2(a_1b_3-a_3b_1)+e^3(a_1b_2-a_2b_1)$$
دا ضرب ارزښه يه دا لاس ته راوړنه يا نتيجه د ديترمينانت (۱۸ . ۱۷) د شميرلواود پېژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بیلګه ۱۷ . ۶:

a × b دې وشميرل شي، که وي

الف) a=(-2,1/2,-1), b=(1/2,-2 ,1)

ب)
$$a=e^1-3e^2+e^3, b=-e^1-2e^2+3e^3$$
اوبيونه يا حل الف) ب) د دې بيلګې اوبيونه دې ګان لستونکي او مينه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تيرې جملي له مخی پوره روښانه دی٠

وکتوري ځل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهميت په بنسټ د وکتورونو a , bڅخه خورې شوې منځهوارې Fp غبرګ اړخيز ه همداډول د a او b څخه خورشوي يا غزيدلي دريګوډی منځهوارې FD شميرلو لپاره خورا مساعد دیَ . باور لري
$$F_P=|a\times b|; F_D=\frac{1}{2}|a\times b|; .... (17,19)$$

بیلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو(a=(1,1,0) , b=(2,0,1 څخه خورې شوې هوارې منځ يا دننه په لاندې ډول ده
$$a\times b=\begin{vmatrix} e^1e^2e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix}=(1,-1,-2), F_P=|a\times b|=\sqrt{1^2(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

بیلګه ۱۷ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دریګوډی ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشمیرل شي چی کونجټکي یي وي :

A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)

ابیونې :

دریګوډی له لاندې وکتورونو څخه غزیږي

a=B-C=(3,-1,-2),

b=A-C=(1,2,-1) او

د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 31-2 \\ 12-1 \end{vmatrix} = 3e^1 + e^2 + 5e^3 = (3,1,5)$$

د درېګوډی ABC د هوارې دننه یا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D = \frac{}{2} | a \times b | = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+1+5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواریزځل موزی سطحیز ضرب)

یادونه : دا یو شپږ خواییز تن دی چی مخامخ هوارې یی سره غبرګی او یو په بل ضرور نیغ ولاړ نه وي . لاندې شکل ۱۷ ۱۱. یی بیلګه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پیژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وکتورونو غبرکهواریز ځل یا شپاتځل[a , b , c] لاندې ځل یا ضرب دی

[a,b,c]=(a×b) (17 . 20)

دلته وکتورونه a او b وکتوریز ځل کیږي او نتیجه یي بیا د cسره سکالار ځل کیږي، یعنی لاس ته راوړنه یا نتیجه یي سکالار ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرکهواریزځل ځمککچیز هندسي لیدونکی اهمیت لري. د سکالارځل (پيژند ۱۷ . ۹) سره سم باور لري

$$[a,b,c]=(a\times b).c=|a\times b|.c=|a\times b|.|c|.\cos\alpha$$

دلته الفا د وکتورونو a × b او c څخه رابند شوی کونج دئ .(څیره ۱۷ . ۱۱)

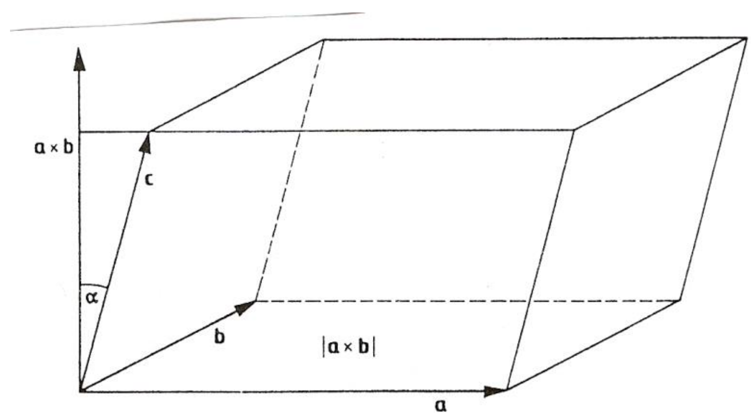


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعریف سره سم (پيژند ۱۷ . ۱۰) |a×b| د a اوb غزیدلي غبرګ اړخيز دئ . برسیره پر دې $|c|.\cos\alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور a×b باندې د وکتور c پروجکشن یا پریوستون په مانا دئ. یعني د a,b او c څخه غزیدلی غبرګهوارې یا

شپاټ جګوالی ښايي. پس[a,b,c] هندسي د وکتورونو a,b,c څخه غزیدلي غبرکهواریزې ډکي (حجم) په مانا دی.
دغبرګهواریز په مطلقه ارزښت (د غبرګهواریز ډکي یا-حجم) کی تغیر نه راځي که چیرې د وکتورونو پرلپسی ترتیب بدل شي. د غبرګهواریزې ډکی زیاتیز یا مثبت دئ، که ورکړ شوي ترتیب یو ښی- سیستم جوړ کړی۰

جمله ۱۷ ۰ ۱۲:

[a,b,c] =[b,c,a] = [c.a.b]=-[a,c,b]=
=-[c,b,a]=-[b,a,c] (17 . 21

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي)کومپلانار وي(نو یو شپاټ د صفر جګوالي سره لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۱۳:

(22 . 17) د کومپلانار وکتورونو لپاره باور لري[a,b,c]=0

د غبرګهواریز یا شپات ځل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوګه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کیږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو
a=(a1,a2,a3),b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)
غبرګهواریز ځل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix};.........(17,23)$$

اوبیونه : وکتور ځل a×b د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري
$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$
د a × b سکالارځل د c سره کواوردیناتډوله په لاندې توګه صورت نیسي.
(a×b).c=[a2b3-a3b2,-(a1b2-a2b1),a1b2-a2 b1].(c1,c2,c3)
= c1(a2b3-a3b2)-c2(a1b3-a3b1)+c3(a1b2-a2b1)= a1(b2c3-b3c2)-a2(b3c1-b1c3)+a3(b1c2-b2c1)
دا نتیجه د دیترمینات (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۹:

د وکتورنو(a=(0,1,2) , b=(2,0,1), c=(1,1,0
غبرګهواریز - یا شپاتځل[a,b,c] په لاندېډول دی:

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} 012 \\ 201 \\ 110 \end{vmatrix}=0(0-1.1)-1(0-1.1)+2(2.1-0)=5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۰:
وکتورونه(a=(1,2,3) ,b=(3,6,1), c=(0,0,1 کومپلانار دي او شپاتځل يې په لاندې ډول دی(دا اوبیونه دې ګران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلګه ۱۷ . ۱۱ :
د تیترایدر(دریګوډې اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی(حجم) دې وشمیرل شي
(ځیره. ۱۷ . ۱۲)

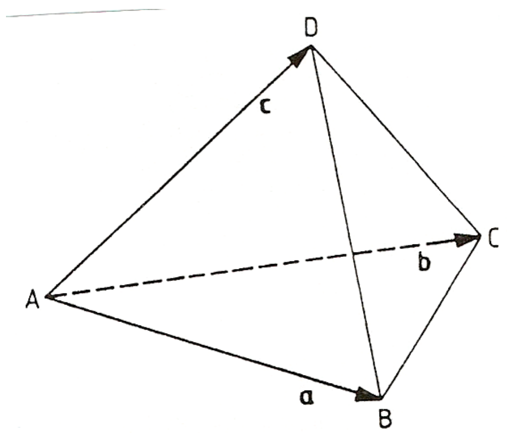


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا ګوډټکو سره
A=(1,1,0) , B=(2,0,1)
C=(3,-1,2) , D=(1,0,3)

یادونه : دا پورته په ختہ کې ککرټکي دي، ځکه چې دا ځېره څلور ککرې لري
اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترید ۶/۱ برخه ده
a=B-A=(1,2,0),b=C-A=(2,1,0) , c=D-A=(0,1,2)
دا تیترئیدر یو اهرام دی چې ډکی یا حجم یې ۳/۱ ځل بنسټیزهواره ځل جګوالید تیترائند جګوالی د شپات جګوالي سره مساوي دی او د دریګوډیهواره یې د شپات نیم د وکتورونو a , b , c کمیز یا منفي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[a,b,c] = \begin{vmatrix} 110 \\ 201 \\ 012 \end{vmatrix} = -5$$

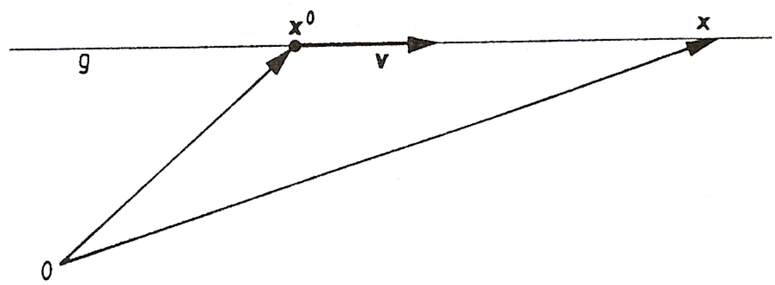
د کچګڼ لپاره مطلقه ارزښت نیول کیږي: V=(1/6).|[a,b,c]|=5/6

۱۷ . ۵ په شننیزه (تحلیلي) ځمککچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځموږ هدف دئ چی وګورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانګړي ډول تحلیلي هندسي په هوا کی وکتوري مطالعه) د ۱۶ -برخي سره په توپیر(څنګه کیږي۰

۱۷ . ۵ . ۱ د یوې کرښی وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کي د یوې کرښی ځای د یوه ټکي او لور له لاری یواځنی ټاکلی دئ. په کرښه gدې نښتی ټکی د ځاي وکتور x0 په مرسته (چی د کواوردینات سیستم د O څخه دا ټکی ښايي)، لور يي په وکتور V (څیرې۱۷ . ۱۳



څیره ۱۷ . ۱۳

که λ یو پارامتر وي چی د رییلګڼونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښی g یو په زړه پور ټکی x د وکتور زیاتون یا - جمع له لارې په لاندې فورم (بڼه) ښوول کیږي

$$x = x^0 + \lambda.v, -\infty < \lambda < \infty; ....(17,24)$$

د وکتور v په لور په ټکي x0 کی د کرښی g برابرون (پارامتر فورم)
که پارامتر λ په ریل ګڼونو کی وځغلي نو x د کرښی ټولو ټکو کي یا د ټکو ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره یواځني یوه $\lambda \in R$ شته یا موجود دهوکتور مساوات (۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابرونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; ....(17,25)$$

که کرښه g په دوه ټکو x^0, x^1 ورکړ شوي وي، نو د لور وکتوریی دی $v = x^1 - x^0$ او په دې ډول یی د کرښي برابرونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); ....(17,26)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندې ټکو($x^1=(1,3,2), x^0=(1,2,3)$ ورکړ شوې کرښه د $v = x^1 - x^0 = (0,1,-1)$ له امله په لاندې توګه لیکل کیږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1,2,3) + \lambda(0,1,-1)$$

دا لاس ته راوړنه یا نتیجه موږ ته لاندې درې سکالار برابرونونه په ګوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

دکرښی برابرونونو (۱۷ . ۲۴) پارامترفورم په هواره کی د کرښي ځانګړی حالت خوندي لري: x, x^0 او v وکتورونه دي، هر یو د دوه کومپوننتو سره.

بیلګه ۱۷ . ۱۳ :

په یوې هوارې کي د یوې کرښي د مساواتو فورم:

$x = (1,2) + \lambda(1,-1)$ سکلار برابرونونونه په ګوته کوي. $x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$

له دې څخه سرې کولی شي چې پارامتر λ له منځه یوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د x_1 په ځاي x او د x_2 په ځاي y ولیکو نو لاس ته راځي $y=-x+3$ د

کرښي د برابرونونو نورمال فورم (16 . 2 .) که غواړو چې معلومه کړو چې ایا ټکی x^1 په کرښه g پروت دی، نو باید وڅیړو چې کواوردینات یی برابرون (۱۷ . ۲۵) پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چې ایا دده لپاره یو د λ - ارزښت موجود دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۴ :

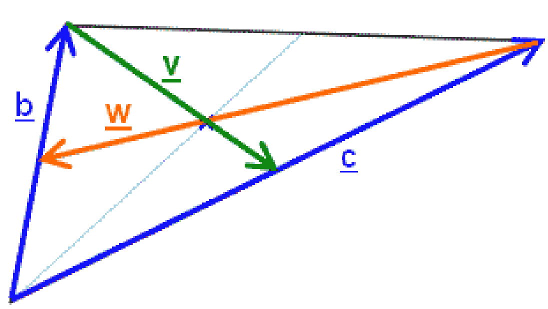
لاندې ټکي $1)...x^1=(-1,4,3), 2)...x^2(2,-2,1)$ په
کرښه $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,2,1)$ پراته دي که نه ؟

اوبيونه : ۱) د دې درې برابرونونو $-1=1-\lambda, 4=0+2\lambda, 3=1+\lambda$ له جملې د دوهم څخه لاس ته راځي $\lambda=2$ او دا ارزښت لومړی او هم دريم مساوات ډکوي) پوره کوي $-1=1-2, 3=1+2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.
۲) ددې درې برابرونونو $2=1-\lambda, -2=0+2\lambda, 1=1+\lambda$ له دويم لرو $\lambda=-1$ دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مګر دريم مساوات نه: پس x^2 په کرښه g نه دی پروت.

که د دوه کرښو $g_1: x=x^1+\lambda v; g_2: x=x^2+\mu w$ غوڅټکی xS ، موجود وي باید د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S = x^1+\lambda v = x^2+\mu w$$

دا وکتوربرابرون درې سکالار برابرونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سړی پارامتره $\mu \wedge \lambda$ شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دريم مساوات پوره کړي، نو یو پرېټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي ، نو دواړه کرښې یو په بل پرتې دي.



بیلګه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښو غوڅټکی دې پیدا شي :

$$g_1: x=(1,1,0)+\lambda(1,3,-2), g_2: x=(1,2,2)+\mu(-1,-2,4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل یا اوبیونه : غوښتکي باید دواړه برابرونونه پوره کړي::

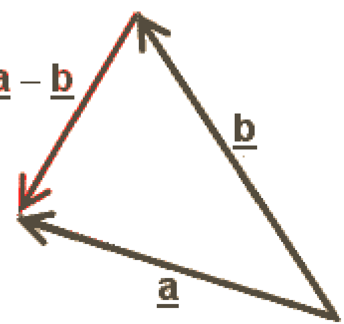
$$1+\lambda=1-\mu, 1+3\lambda=2-2\mu, -2\lambda=2+4\mu$$

د دريې سکالار برابرونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\lambda=-\mu$ ددې له مخی او له دوهم برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu=-1$ نو لرو $\lambda=1$. په دې ډول دریم برابرون هم پوره کیږي د غوښتکي کواوردینات سیستم د کربښي g1 د $\lambda=1$ سره لاس ته راځي:

xs =(1,1,0)+1.(1,3,-2)=(2,4,-2).

۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x0 او دوه نا غبرگو وکتورونو v او w یوائخنی ټاکلی دی. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x0 پراته ونیول شي‌یا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴) .



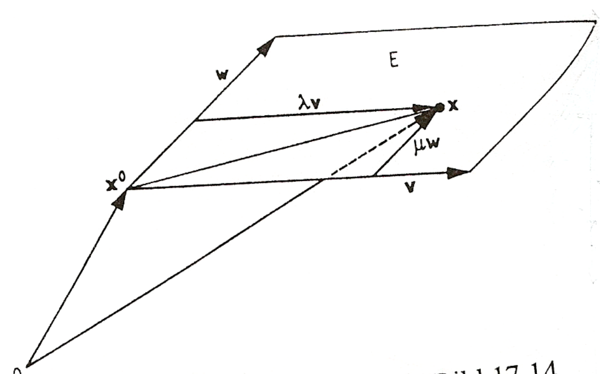


Bild 17.14

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\lambda \wedge \eta$ پارامترونه وي چې يو له بل خپلواك د رييل ګنونو ډيري کی ځغلي، نو کيدی شي د هوارې Eپه خوښه ټکی xپه لاندې ډول انځور

شي $x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty;..................(17,27)$.

د هوارې E مساوات چی د x0 ټکي کی، له وکتورونو v,w غزيدلي (پارامترفورم)

هر جوړه ارښت $\lambda, \mu \in R$ يواځنی يو $x \in E$ ښايي. وکتوربرابرون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالاربرابرون څرګندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3;............(17,28)$$

که چيرې هواره په درې ټکو $x0$, x^1 , x^2

چي په يوه کرښه نه دې پراته ورکړ شوي وي، نو کيدی شي چی د هوارې غزوونکي وکتورونه په لاندې ډول انځورشي: $v=x^1-x0$, $w=x^2-x0$ له دې سره د هوارې مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x_0);................(17,29)$$

بيلګه ۱۷ . ۱۶:

په درې ټکو $x0 =(-1,2,5),x^1=(2 ,3,-6),x^2=(1,-4,3)$ کې د هوارې E ورکړ شوي برارون د $v=x^1-x0=(3 ,1,-11)$,$w =x^2-x0=(2,-6,-2)$ له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1,2,5) + \lambda(3,1,-11) + \mu(2,-6,-2)$$

ددې نتيجی څخه لاندې سکالاربرابرون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳ :د هواروبرابرون يا- مساوات سکالارفورم(-بڼه)

يوه هواره د يوه ټکي x0 او يوه په هواره نيغ ولاړ وکتور n له پلوه ياله لارې هم يواځنی ټاکلی ده يا، چی عمودي يا نورمال وکتور (Normalvektor(يې بولي) ؟؟؟ څيره شته ش. ۱۷ . ۱۵

په هواره E کی دې x يو په خوښه ټکی وي .نو دا له x0 و x ته بريدي وکتور x-x0 هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه n او x-x0 يو په بل نيغ ولاړدي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

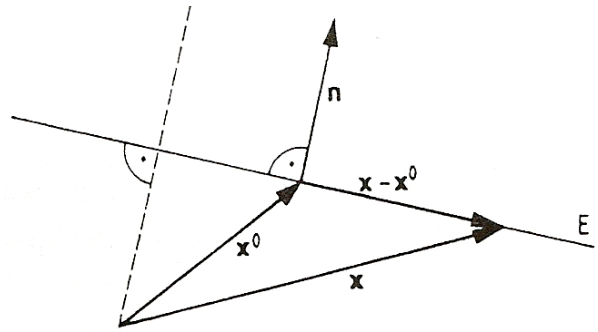


Bild 17.15

په یو بل نیغولاړو) اورتوګونال (وکتورونوځخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی ځیره (ځ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چې باوري کیږي :

n(x-x0)=0,nx=nx0= c (17 . 30)

دهوارې برابرونونو سکالار فورم ، n- عمودوکتور، د هوارې x0 په ټکی.

بیلګه ۱۷ . ۱۷ :

د هوارې برابرون چې ټکی(x0 =(2,-1,5په پروت دئ او په هغه وکتور(n=(2,-2,1) (نیغ)ولاړ دی

د c=nx0=(2-2,1).(2,-1,5)=4+2+5=11 له مخې په لاندې ډول دئ:

(2,-2,1).x=11 <=> 2x1-2x2+x3=11.

د هوارې مساواتو پارامترفورم (۱۷ . ۲۷) په یوه سکالارفورم اړول بدلول (۱۷ . ۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۱۸ :

د هوارې مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابرون لاندې درې سکالار برابرونونه خوندي لري یا په بر کې لري یا ځایوي:

$$x_1 = 1+\mu, x_2 = -2+\lambda-\mu, x_3 = 4-\lambda+2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي: $\mu = x_1 - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره دا نور دوه برابرونونه داسی دي

$x_2 = -2 + \lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1 + \lambda \wedge$

$x_3 = 4 - \lambda + 2x_1 - 2 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2 - \lambda \Leftrightarrow$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$

د هوارې برابرونونو سکالار فورم: (-1,1,1)x=1

که غواړو چی څرګنده کړو چی ایا یو ټکی x1 په هواره E پروت دی چي برابرون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چی ددې کواوردینات (۱۷ . ۲۸) برابرون پوره کوي که نه (بیلګه ۱۷ ، ۱۵ : د کربنی مساواتوته ورته) . او یا سړی پارامترفورم په سکالارفورم بدلوي او څیړي چی د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلګه ۱۷ . ۱۹ :
ایا ټکی(x^1=(2,-2,5 په هواره $E : x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$
پروت دی ؟
اوبیونه : : دلومړي دوه برابرونونو $2 = 1 + 0\lambda + \mu, -2 = -2 + \lambda - \mu, 5 = 4 - \lambda + 2\mu$
څخه لاس ته راځي$\lambda = 1 \wedge \mu = 1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابرون پوره کوي: 5=4-1+2.1 ، دا په دې مانا چي x1 په هواره E پروت دی. که د هوارې برابرون په سکالرفورم واړول شي: - (
x1+x2+x3=1بیلګه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x^1 کواوردینات دې یواځي د x1,x2,x3لپاره ځاي په ځاي شي ، چی معلوم کړو چی x^1 په هواره E پروت دی : -
2+(-2)+5=1

د یوې هوارې: n.x=c:E او د یوې کربنی $g : x = x^0 + \lambda v$ ترمنځ غوڅټکی xs(که شته وي)(نو هم پهE پروت دی او هم په g .له دې امله د هوارې په برابرونونو کی د x لپاره $x^0 + \lambda v$ ځاي په ځاي کوو(ږدو) او په دې ډول یو برابرون د λلپاره لاس ته راځي.که دا برابرون یواځنی یو اوبی ولري نو غوڅټکی موجود دی ، که اوبی شته نه وي یا موجود نه وي نو کربنه g د هوارې E سره غبرګه ځغلي، که ناپاي ډیر ې اوبیونې شته وي نو کربنه g په هواره E پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,1,1)$ پروت ځاي یا موقعیت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$a).....x_1+2x_2+3x_3=4, b)...2x_1+x_2+x_3=3, c)...2x_1+x_2+x_3=4$

اوبیونه : دا چی لټونکی غوڅټکی xsد کرښي برابرون پوره کوي نو باوري دي:

$x_1=1-\lambda, x_2=\lambda, x_3=1+\lambda$

a) $x_1+2x_2+3x_3=(1-\lambda)+2\lambda+3(1+\lambda)=4\lambda+4=-4, \lambda=-2$

$x_S=(1+2,-2,1-2)=(3,-2,-1)$

b) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=3$

لمدا λ په خوښه، gپه E پرته ده

c) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=4$

حل نه شته ، نوکرښه gد سطحې E سره غبرګه ځغلي.

ددوه سطح

$n^1.x=c1$: E1

او E2 هوارې: $n^2.x=c2$ غوڅکرښه دواړه برابرونونه پوره کوي(دا دوه برابرونونه دي، هر یو د درې نامعلومو x1 ,x2 ,x3 سره). دوه امکانات شته دي چی کرښه g (که شته وي) را پیدا کړی شو.

۱ – سرې یوه واریابله یا اووښتونې په خوښه وټاکي $x_i=\lambda$ (ازاد پارامتر)، نور دواړه $x_j, j\neq i$ له دواړو هوارمساواتو څخه په λ کې د کرښیزو افادو یا وینو په څیر راپیدا کوي. او په دې ډول کرښیز مساوات لاس ته راځي.

۲ – سړي د کرښې دوه مختلف ځانګړي ټکي x^0 او x^1 راپیدا کوي او په دې ډول د کرښې g مساوات لاس ته راولي: $x=x_0+\lambda(x^1-x_0)$.

بیلګه ۱ ۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو E_1 او E_2 پرېکرښه g غواړو پیدا کړو. هوارې دې وي :

$E_1: x_1-x_2+x_3=3, \qquad E_2: 2x_1-x_2-3x_3=0$

حل ۱): $x_1=\lambda$ په خوښه

$E_1: -x_2+x_3=3-\lambda, E_2: -x_2-3x_3=-2\lambda.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کی دې ځاي په ځاي شي :- $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$, $- x_2 + 3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$

نو لاس ته راځي $x_1 =$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$, $x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود : $x = (0, -9/4, 3/4) + \lambda (1, 5/4, 1/4)$

همداسی (<=>) له $\tilde{\lambda} = (1/4)\lambda$ سره لرو

$x = (0, -9/4, + \tilde{\lambda} (4,5,1)$

حل(اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو: $x_3 = 0$, پس لاس ته

راځي $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 - x_2 = 0$ د لاندې حل سره $x_1 = -3$, $x_2 = -6$,

پس $x^0 = (-3, -6, 0)$ په هوار کې ځانګړې تکی دی،که ولیکو $x_2 = 0$ پس

له $x_1 + x_2 = 3$, $2x_2 - 3x_3 = 0$ لاندې حل لرو: $x_1 = 9/5$, $x_3 = 6/5$ او په دې ډول د ه

کرښې g دوم تکی : $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په تکو x^1 ، x^0 د کرښې g مساوات (مقایسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$x = x^0 + \lambda (x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda (24/5, 6, 6/5)$

<=> د $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$ سره :

$x = (-3,6,0) + \tilde{\lambda} (4,5,1)$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیداشوې کرښې g یوبل ډول انځوردي، ځکه چی د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي. : $v = (4, 5, 1)$ او د $\tilde{\lambda} = -3/4$ لپاره په حل ۱ کې د

کرښې تکی د حل ۲ x^0 دا تکی لاس ته راځي

$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$

تمرینونه؛

۱ – وکتورونه $c = (4,-1,7)$, $b = (-3,-5,0)$, $a = (1,0,-2)$ ورکړ شوي دي.

جوړکړی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-a$, $a+b$, $a-c$, $2a - b + 3c$!

۲ – وکتور a چې له ټکي $x^1 = (3,-5,7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2,4,-1)$ لور ته لاربښودوي، څنګه دی؟

۳ – وکتور $a = (3,21)$ دې پیلټکي $x^1 = (1,2,3)$ ولري. وڅیرۍ چې پایټکی x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ – لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$a = (4,-3,12)$, $b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $c = (3,3,3,)$?

۵ – وکتورونو $a = (2,-1,3)$, $b = 7,0,0$ پورې اړوند یا مربوط یوونوکتورنه کومې کواوردیناتی لري؟

۶ – د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوګونالیتي دې وښول شي ؟

$a = (1,2,3)$, $b = (3,0,-1)$!

۷ – دلته دې a_1 , b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه

$a = (a_1,3,2)$, $b = (-4,b_1,2)$, $c = (3,-2,c_1)$

په وکتور $d = (2,1,-3)$ (نیغ) ولاړ وي؟

۸ – د

a) $a = (-2/3, 1/2, 5/4)$, $b = (3\ 74, -1/3, 2/3)$,

b) $a = e^1 - e^2 + e^3$, $b = 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره دې a . b وشمیرل شي!

۹ – وکتورونه $a = (3,-4,12)$ او $b = (-6,8,0)$ یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ – د ګوډ – یاکونجټکو

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C(4, -1,2)$

سره، د دریګوډي کونجونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – وښايي چې وکتورونه $a = (2,4,-6)$ او $b = (-1,-2,3)$ يو بل ته کولاينې دي!

۱۲ – د

a) $a = (-4,-1,3)$, $b = (5,-2,7)$

b) $a = e - e^2 + 2e^3$, $b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره $a \times b$ وشميرئ!

۱۳ – د دريګوټي هواره ځومره لويه ده، چې کونجونه يې په لاندې توګه راکړ شوي وي
$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C = (4,-1,2)$?

۱۴ – د هغه غبرګ اړخيز هواره ځومره لويه ده چې له وکتورونو
$a = (-3,2,1)$, $b = (5,-3,2)$
څخه غزيدلي وي ؟

۱۵ – د وکتورونو

$a = (-2,1,-3)$, $b = (1,-3,6)$, $c = (1,2,-3)$

څخه غزولشوې غبرګهواري کوم ډکې يا حجم لري؟
دا نتيجه هندسي روښانه کړئ!

۱۶ – څلورګوډي د لاندې ګوډونو (بېلګه : څلور دريڅي [دا د اهرام تشکيلوي])

$P_1(2,1,4)$, $P_2(0,-1,2)$, $P_3(-3,6,4)$, $P_4(2,2,2)$

سره کوم ډکې ياحجم لري؟

۲۳ – د لاندې هوارو

الف) E_1 چې له ټکي $x^o = (0,1,2)$ تيريږي او د لاندې وکتورونو
لور لري: $v = (0,2,1)$, $w = (2.3,-5)$

ب) E_2 چې له ټکو $x^o = (o,1,2)$, $x^1 = (2,-3,4)$ او
ټکي $x^2 = (7,-9,-3)$ څخه تيريږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0,2,1)$ سره
له ټکي $x^o = (0,.1.2)$ تيريږي، مساوات څنګه دي؟

۲۴ – له تمرينو۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالارينه څنګه ده؟

۲۵ – ودی ښيل شي چی ايا ټکي $x^1 = (1.3.-6)$ همداسي $x^2 = (5,-5,4)$ په هواره

a) E_1: $\mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0)$,
b) E_2 : $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ – د کرښو

a) g_1: $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$,
b) g_2: $\mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$,
c) g_3: $\mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتخاي د هوارې $E: \ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$ سره وټاکئ!

۲۷ – د هوارو

الف) $E_1 : 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ او $E_2 : -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

ب) $E_1 \ -5x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 4$ او $E_2 \ : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

غوڅکرښه دې راپيدا شي !

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ پرلپسی او لړۍ پرلپسی (لنډ: لړۍ) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

۱۸ . ۱ پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنګسالار(نوم یې راڅخه هیر شوی، ددې بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چې ، »دا د ده له مخه کیشپ چې سل متره یې ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دې کیشپ سل ځله تیز ولاړشي؟« دې ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چې وخت باید په نظر کي نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دې ګران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ د دې برخی څیرنی سره لوړې شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چې موږ د رییل اعدادو یا ـ ګڼونو تعریف سره سم چې هلته مو د اینتروالبندولو باندې خبرې کړي او په دې توګه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوړه څیرنه وه. همدا ډول د لاینیزو برابرونونو یا ـ مساواتو شمیرل او داسی نورې پوره دلوړې شمیرپوهني بیلګي لرو، خو دلته دا په ګوته کوو چې له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځاي پیل کیږي چې شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توګه په کار اچولو ته راهځوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړیینه وه چې دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په څیر وښایو یا وبولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځایه هغه اعداد چی موږ ورسره مخ کیږو، ځموږ لپاره د څیرنی کیږي چی هغوي یوې پولی(حدLimit) ته هڅه کوي. دا قوانین هم پوره څیړل کیږي چی وروسته بیا په دیفرنځیال شمیرنه کی کار اخستلو لپاره ترې تیریدنه ناشونی ده.

په راتلونکی برخه کی لاندې کنځیپتونه (خیال، چې یو څه څنګه وشي) ځموږ لپاره د هځی وړ ګرځي
۱ - د کلیمی لیدوړه یا په خیال کی لرودونکی پیلونه
۲ - د لیدوړوالي یا فکر کی راوړیدونکی د ټولو په غوره شننه (تحلیل)
۳ - د شمیرپوهنیزو پېژندو یا تعریفونو ټیکوالی،
۴ - هغو وړاندنیونو یافرضیو ته پاملرنه چی د شمیرپوهنی قوانینو د باوریتوب (اعتبار)لپاره وي،
۵ - د پرلپسی شننه، چی پوله ارزښت یی په پام کي ونه نیول شي،
۶ - د ګڼو دندو حل ، په ځانګړي توګه د دیفرنځیالولو او اینتګرالولو
۷ - بالاخره د پرلپسی لړۍ چی په لنډه توګه ـی لړۍ بولو څیړنه .
دلته هم د دې موضوع د پوره څیړلو ستونځي په کتاب کی د ځاي کموالي له امله شته. داچی دا برخه یوه بنسټیزه برخه ده، نو پیل یی د یوې ساده او پوهوړې بیلګې له لارې کوو چي ماته خورا په زړه پورې هم ښکاریږي.

۱۸ . ۲ دګڼونو پرلپسی (لنډ: پرلپسی) یا د اعدادو ترادف کلمه

پیلبیلګه :

پاي جمعه یا - زیاتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کیدی شي؟
کیدی شي چي دا د پوره ستونځو سره د یوګونو ګڼونو یو د بل سره جمعې یا یو په بل زیاتون له لارې وشمیرل شي ترڅو چي د دې اعدادو د ترادف (ګڼونپرلپسی) قانونیت پیداشوی وي:
هر دوه ګاونډې توکي یوله بله په۴ + توپیر کیږي یعنی کمون یا کمښت یي ۴ + دۍ.
کیدی شي چی دا کارونه (استعمال) په یوه شکلی او سپماوړ لاره هم مخ ته لاړه شی او دا په لاندې ډول :
که لومړی (۳) او اخر(۳۹۹) ، دویم (۷) او له اخر دویم (۳۹۵) دریم (۱۱) او له اخر دریم (۳۹۱) د جمعې اجزا یا زیاتوني او داسی نور سره زیات شي. دا په

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ټولو حالتونو کی همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنی ۴۰۲ .
اوس دې د یوګونو د جمعې اعزاوو د جمعې ارزښت(زیاتوونو زیاتون ارزښت) راپیداشي:
دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسی ورپسی تر n غړي پورې چی دلته و (n-1) ته 4 ور زیاتیږي ، یعنې:
.n = (n-1)+4:
که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی3- 399 = 396 ، نو ددې کمون سره د (n-1) دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی 99 = 396:4 دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 ګڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توګه 2 زیاتووني یا د جمعې اجزاوې سره زیات شي، نو باید له دې سره 100:2 = 50 یعني 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي« له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:
.20100 = 402 . 50

دا لوستونکو ته په روځنی ژوند کی هم څرګنده ده لکه د یو ټولګي د زدکوونکو په ګڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالۍ یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نورموجود دي، موږ کوښښ کوو چی دا مسئلې د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وګورو چی په شمیرپوهنه کی ترادف یا پرلپسی څه شی دي.
یادونه: موږ له دې وروسته د رادف په ځا یواځي ترادف لیکو.

موږ طبیعي اعداد یا ـ ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)
که چیرې دا هر پیداینښتي یا طبعي ګڼ په یواځنی یو ریبل ګڼ ترتیب شي یا یواځنی ترتیب ریبل ګڼ وښايي یعنی $a_1, a_2, a_3, ...$ ، نو د لته د طبعي اعدادو او حقیقي اعدادوتر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبیعي عدد n په یواځنی حقیقي عدد a_n ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندډېرۍ (تعریفډیرۍ یا تعریفستې) دطبعي اعدادو ډیرۍ N ده او ارزښتډیرۍ یی د حقیقي اعدادو ډیرۍ R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی an د ځای ګڼې (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چې مانا یې : پیژند نخښه ده ، وایي. (Index پیژند دخښه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند تعریف) :۱۸ . ۱ الف :

د پرلپسی غړو $a_1, a_2, a_3, ...a_k$ د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندي $a_n = a(n)$ لاس ته راځي ، که دnلپاره پرلپسی طبعي اعداد1, 2,3 ...k,ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a_1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلګی

(دا ورپسې مخ کې بیلګې نورې هم روښانه دي)

$$I-;...a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4;....; a_{10} = 100,..; a_k = k^2;..$$

{چیرته چې a_n یو څلوری (مربع) ګڼ دی}=D=N;W a_n |

$$2-\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2};...a_{10} = \frac{1}{10};...\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\}$$

$$3 - \quad \{a_n\}=\{(-1)\} \Rightarrow a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$
$$a_3 = -1,...a_{17} = -1;...a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Altrnating بلل کیږي

$$4-\{a_n\} = \{3+\frac{1}{n}\}; 4, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{4}, ...a_k = 3+\frac{1}{k}, ..., a_n = 3+\frac{1}{n}$$

د ترتیب – یا نظمقاعدې څخه مختلفی ګڼونپرلپسی یا د اعدادو پرلپسې منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چی پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول رالنډوو.

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

که هر یو طبیعي ګڼ..... n=1,2,3,4,5 په یوه یو یوائځني رییل ګن باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب ګڼونه .... $a_1, a_2, a_3, ...$ یوه د ګڼونو پرلپسی جوړوي، چی لنډ پرلپسی یی نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي: $\{a_n\}$.

دې a_n ته د پرلپسې $\{a_n\}$ n-م غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چی د رییلګڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا ګڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعني:
a-1,a0,a1,a2.....یا او a2,a3,a4.... یا a0,a1,a2

ګورو چی د پرلپسی لیکلو لپاره ځانګړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چی د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلګه ۱۸. ۱ : د بیلګي په توګه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, ...$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولوقانون an = n سره ، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

$$\{an\}:1,4,9,16,25... => \; = \{a_n\} = \{n^2\}$$

دا په دې معنا چی(=>)

{an}:2,3/2,4/3,5/4,6/5 ....=>

یا په دې مانا چی{an}={(n+1)/n}

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6 ...=>

په دې مانا چی $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,.. =>

یانې په دې مانا {an}={(n+1)/n}

پیلبیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دشمیرپوهنی یوه ښوونکی لپاره په ښونځي کی یو ځاي تش یا خالي دئ. ددې ځاي لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کاندید کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:
پنځه ګڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور ګڼونه باید داسی ور واچوی چی دا ګڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.
دواړه کاندیدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي ۰
کاندید الف داسی فکر کوي ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کاندید ب داسی فکر کوي
لومړی ګڼ ۱ د۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ۰ لومړی ګڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دئ: 1 - 2
دویم ګڼ لاس ته راځي، که د لومړي ۰۰۰۰۰۰۰ دوم ګڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دئ :
عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : ۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^2 - 1 = 4 - 1$
$2.1 + 1 = 3$
دریم ګڼ لاس ته راځي که د دوم ۰۰۰۰۰۰۰۰ دریم ګڼ له ۸ په ۱ کوچنی دی:
ګڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$1-8=1-2^3$
$2.3 + 1 = 7$
۶- ام ګڼ لاس ته راځي که د پنځم۰۰۰۰۰ ۶ -ام ګڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دئ :
ګڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: ۰۰۰۰ $63 = 1 - 2^6 = 1 - 64$
$2.31 + 1 = 63$
اوم ګڼ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اوم ګڼ دئ: $127 = 1 - 128 = 1 - 2^7$
$2.63 + 1 = 127$
ګڼ ۸ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ګڼ ۸ دئ
$2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$ $2.127 - 1 = 255$ ....(

د شمرپوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړشوي ګڼونه د یوې پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له
a1 , a2 , a3 , a4 , a5,
سره ښایو.
اوس زموږ په دې بیلګه کی داسی لرو: $a1=1, a2=3, a3=7, a4=15, a5=31$
که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنګه چی یو په بل پسی راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي.ددې تثبیت یا ازمویني وظیفی شمیرپوهنیزه فرمولبندې په لاندې ډول ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونپرلپسي یا د اعدادو ترادف دې د a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31 سره ورکړ شوي وي. یوجوړښتقانون یا قانونمندي او توکي a6,a7,a8 وټاکی.
د دواړو کاندیدانو د اوبیونې -یا حللارې کیدی شي چې په لاندې توګه انځور شي:

ب	الف
$a_1 = 2 - 1$	$a_1 = 1$
$a_2 = 4 - 1 = 2^{2} - 1 = 3$	$= 2.1+1=3 a_2$
$a_3 = 8 - 1 = 2^3 - 1 = 7$	$a_3 = 2.3 + 1 = 7$
..	.
$a_6 = \quad 2^6 - 1 = 63$	.
	$a_6 = 2.31 + 1 = 63$

په تولیزه (عمومی) توګه لاس ته راځي

م-k غړی $(k \in N)$ م- k غړی $(k \in N \wedge k \geq 2)$
په کوم کی چې ………………… په کوم کی چې
د(k-1)- م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي …… 1 له $a_k = 2^k$ کم شي

$a_k = 2.a_{k-1} + 1$ $a_k = 2^k - 1$

دواړو کاندیدانو پرابلم سم حل یا اوبی کړ. کله چې د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په ګټه کی دی . ولی؟
دواړه کاندیدان کولی شي چې د پرلپسی هر په خوښه توکی پیداکړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غړي څخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعني $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی
رکورزیو(recursive لاتین، له recure په ځت څغاسته) انځورونه وایی . مګر ب
کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پیدا کړي، هغه
سملاسي لاس ته راوړی شي یعني$a_k = 2^k - 1$
دې ډول ښوونلار ته ایکسپلیڅیت explizite (لاتین خورول، روښانوول) یعنی روښانه
انځورونه وايي.
د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:
د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری ، رکورسیو او ایکسپلیڅیت. یانی د الف او ب په
ځیر.

بیلګه:
یوه پرلپسی د 5 = a1 او $a_{k+1} = a_k{}^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه
توکي وشمیری.
حل:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$
$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$
$$a_4 = a_3^1 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :
یوه پرلپسی د 1 = a1 او $a_{k+2} = a_{k+1}.a_k$ سره ورکړ شوې ده.
ددې پرلپسی لمړني پنځه غړي وشمیری .
اوبښونه:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = a_2.a_1 = 2.1 = 2$$
$$a_4 = a_3 . a_2 = 2.2=4$$
$$a_5=a_4.a_3 = 4.2=8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنی:

د هرې لاندنی پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشمیرئ پرلپسې رکورزیو ورکړ شوې

a) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

b) $a_1 = 0,\ a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$

d) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$

f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{k+2} = a_{k+1}^2 \cdot a_k$

h) $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بیلګه :

یوه پرلپسی د ak=k²/(k+1) سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي وشمیرئ

اوبی:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5} \qquad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بیلګه :

پرلپسی د $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی ۳ -م، ۸ -م ۱۵ -م او ۲۰ -م توکي وشمیرئ

اوبی یا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

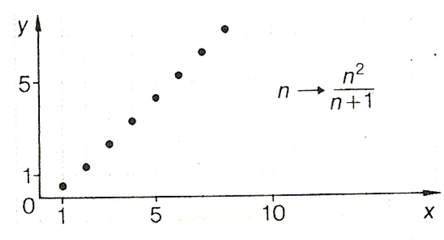
پوښتنی :

د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي ، ۲۰ -م او ۴۵ –م توکي وشمیری

$$a)a_k = 2k+1; b)a_k = k^2+k; c)a_k = \frac{k^2+1}{k+1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2-1}{k+1}; e)a_k = (-\frac{1}{10})^{k-1}; f)a_k = 1-(1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1+(-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3....k$$

په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د ګراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د x -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمرې kسره کیښول شي او د y- کواوردینات باندې هر غړی د غړي د نمرې ak سره و کښل شي	 Bild 4

پوښتنی :

د لاندې پرلپسیو ګراف په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی وکاږئ.

له دې ځایه وروسته بیا پیل دئ

a) $a_k = \frac{5k}{k+2}$ b) $a_k = 3k+2$ c) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$

d) $a_k = \sin\frac{k\pi}{2}$ e) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{k+1} = 1-2a_k$ f) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$

۱۸ . ۲ . ۱ یوغږیزې یا مونوتونی پرلپسی

بیلګه : د غړو ak = 2k - 1

(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې یو غړی د پرلپسی غړی ،دئ او د یوې ډیری یو د هغې ډیری توکی دی، دې ته به د ګرابو لوستونکو پام وي)

سره پرلپسی هر توکی د مخته تیرشوي توکي لوی دئ . دا باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a_{k+1} > a_k$ د ټولو $k \in N$ لپاه

حل یا ثبوت :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\ &= 2.2^k - 1 \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2^k + (2^2 - 1) \\ &= 2^k + a_k \\ &> a_k \end{aligned}$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف:

یوه پرلپسی(strictly monotonic increasing)
په کلکه – یا کره مونوتون جګېدونکی ده یا کره مونوتون جګېږي، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو $k \in N$ لپاره ak+1> ak

که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو $k \in N^*$ لپاره ak+1 $\geq$ ak

نو دلته د مونوتون جګېدونکی monotonic increasingپرلپسی څخه غږېږو

بیلګه :

د پرلپسی د توکو

ak = 10 - 4k

سره هر غړی د مخ ته تیر غړي څخه کوچنی دی.

لرو:

ak+1 < ak د ټولو $k \in N^*$ لپاره

اوبنونه::

ak+1 = 10 - 4(k+1)

=10 - 4k – 4

(c) ketabton.com: The Digital Library

=(10-4k)-4

= ak – 4

< ak

پیژند(تعریف) ۱۸ . ۳ :

یوه پرلپسی په کلکه مونوتونتیټېدونکی یا - لویدونکی strictlymonotonic decreasingده، که لاندې باور ولري:

د ټولو $k \in N$ لپاره ak < ak+1

که په یوه پرلپسی کې باور ولري(په پورته کې او همداسې که ورپسي داسې څه راشي کا د ان توکی دی)

د ټولو $k \in N$ لپاره a1 ≤ ak+1

نو دلته د یوغږیز-یا موتون لویدونکی- یا مونوتون ټیټېدونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:

د یوې پرلپسي دوه ګاونډیو غړو توپیر یا کمون یاکمښت ak+1 - ak، کوم شرطونه باید پوره کړي، چې دا لاندې صدق ولري

الف) کلکه مونوتون جګیدونکی وي

ب) کلکه مونوتون ټیټېدونکي یا –لویدونکې وي

پ) مونوتون جګیږي

ت) مونوتون لویږي؟

ددې دندې د اوبیونې په مرسته کیدی شي، چې د توکي aK=(k+1)/(k+2)سره د پرلپسی مونوتونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$a_{k+1}-a_k=\frac{(k+1)+1}{(k+1)+2}-\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+2}{k+3}-\frac{k+1}{k+2}$$

$$=\frac{(k+2)^2-(k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)}=\frac{(k^2+4k+4)-(k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{(k+3)(k+2)}>0 \quad k\in N^* \text{ د}$$

له ak+1-ak>0 همداسی(<=) (ak+1)>ak

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $k \in N^*$ لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوې پرلپسی په کلکه مونوتون جګیږي.

۱۸ . ۲ . ۲ اریتمیتیکي پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هرغړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.
ددې پرلپسی لپاره ورکړی
الف(یوه رکورزیف انځورونه
ب) (یوه اکسپلیڅیت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډیرې پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چې د دوه په خوښه ګاونډیو غړو ak او ak+1 ترمنځ یو ثابت (تل همغه) بلواك یا تابع موجود دی
غواړو چې دداسی دوه مهمو پرلپسی تیپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانګړې توګه څرګند راوباسو یا بهتره تر څیړنی لاندې ونیسو:

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۴ :
په یوه اریتمیتیکي- یا ګنونشمیرنیزې پرلپسي یالنډ: شمیرنیزې پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنیو توکو اریتمیتیکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په یوې ځمککچیزې لپسی(ټاکونی یا پیژند وروسته راځي) کی د درې یو په بل پسی توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنیو غړو ځمککچیز یا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

لومړی اریتمیتیکی یا شمیرنیزه پرلپسی څیړو:
غوښتنه(ثبوت): یوه پرلپسی ورکړی، چی لومړی توکی یي ۵ او هر ورپسی راتلونکی توکی یی له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي
الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشمیری
ب) د پرلپسی رکورزیف انځورونه ورکړی
پ) د پرلپسی اکسپلیڅیت انځورونه وکړی
ت) د پرلپسی ۲۰ -م (۲۵ ، ۳۵،۵۰، ۱۰۰) توکي وشمیری.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۵ :

یوه پرلپسی an اریتمیتیکي پرلپسی بلل کیږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون یاکمښت تل ثابت یا همغه وي: $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$

بیلګې:

۱ - لاندنی پرلپسي ...;2;5,8;11;14;...;29;32;35
یوه اریتمیتیکي Arithmeticپرلپسی ده چی لومړی توکی یی a1 = 2
او ثابت یا همغه کمون یا کمښت یا فرق یی d = 3 دی.
۲ - دا پرلپسی ...;34- ,23- , 12- , 1- ; 10 اریتمیتیکي پرله پسی ده چی لومړی توکی یي a1=10 دی او d=-11 ده

که په هر پل(قدم) کی فنکشن $n \in N$; n—>an په همغی زیاته ووني d زیاتیږي یا همداسی کمیږي d=0 (لپاره ثابت دی) نو باید اریتمیتیکي پرلپسی یو لاینیز فنکشن(لاینیز بلواك) وي (D = N) د d په جګوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه یا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1).d = a_1 + d.n - d$$

$$f(n) = d.n + (a_1 - d)$$

د لاینیز فنکشن جګوالی d دی او ثابت یا همغه توکی a1 -d نومیږي(یادیږي یا بلل کیږي)

دلته an=2n+1 دلاینیز فنکشن په څیر دی، د d=2 په جګیدو او دy - محورغوڅی a1-d=1

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شمیرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعریف ۱۸ . ۶ :

په اریتمیتیکي- یا شمیریزه پرلپسی کی n- م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:
$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1).d$

بیلګی:

۱ - اریتمیتکي پرلپسی ... 53 , 2,19,36 ورکړ شوې.
غوښتونکي a_{20} ده.
داسی لرو: $a_1=2,d=17,n=20$
نو $a_n=a_1+(n-1).d \Leftrightarrow a_{20}=2+19.17=325$
۲ - ورکړ شوې دې وي
$a_1 = -0,5$ او $a_{10} = -44,5$
غوښتونکي d ده:
$a_n=a_1+(n-1).d \Leftrightarrow (a_n-a_1)/(n-1)=d \Rightarrow$
$d=(-44,5+0,5)/(10-1)=-44/9$

۱۸ . ۲ . ۳ځمککچیزې – یا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ویل شوی ،د یوه ثابت ((تل) همغه ارزښتیز) فنکشن سره، د پرلپسی ۲ -م تیپ د دوه غړو ترمنځ تر څیړنی ونیسو

پیلبیلګه :

یو هوښیار زدکړی غواړي په رسختی کی یوه میاشت کار وکړي(۲۰ د کار ورځی(.
دۍ کارورکوونکی ته وایي، چی دی ارزانه کار ورته کوي او لاندې وړاندیز ورته مخ ته کوی » د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دویمی دې دوه ځله د دریمی ورځی د دویمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دریمی ورځی دوه ځله او داسي نور،
یعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دریمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کیږی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : د

الف) د ۱ –می یا لومړی ورځی
ب) د ۱۵ - می ورځی
پ) د ۲۰ - می ورځی
معاش څومره کیږي. اندازه ګڼ(عدد) که په ډالرو وشمیرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,......

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره
الف) رکورزیف انځورونه
ب) اکسپلیځیت انځورونه ورکړی

پیژند ۱۸ . ۷:

(ځمککچیزې یا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی an هندسي بلل کیږي، که د دوه یوبل پسی غړو ویش ثابت((تل) همغه) q وي:
یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چې لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي اود همغه ګڼ یعنی ثابت ګڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچیزه یا هندسي پرلپسی بلل کیږي.

$$n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\}$$ د ټولو $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n.q$$ لپاره

یو ځل بیا یوځای +d +d +d +d
اریتمیتیکي پرلپسی ...a1 a2 a3 a4 a5
هندسي پرله پسی..... a1 a2 a3 a4 a5
.q .q .q . q

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي پرلپسی دوهم غړی دلومړي غړي سره د q ځل یا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسی پرلپسي ‹—— n anاکسپونینشل فنکشن یا د جګګړ بلواک ښایي چی q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1.q$$

$$a_3 = a_2.q = a_1q^2$$

$$a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1.q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی n- م توکی د لاندې قاعدې له مخي شمیرل کیږي

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

بیلګی:

1 - a1=3 , q=2 ,n=15 => $a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

2 - a1=19,q=1,01,n=100 ;

= 50,8826363919.1,o1^{99} a100=

جمله :

یوه ځمککچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلتوکي سره د 1 < q لپاره کلك مونوتون جګیدونکی ده د 1>q>0 لپاره کلك مونوتون لویدونکی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k+2}$ b) $a_k = \sin\frac{k\cdot\pi}{6}$ c) $a_k = \frac{1}{2}[1+(-1)^k]$

d) $a_k = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^k$ e) $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ f) $a_k = \cos\frac{k\cdot\pi}{2}$

g) $a_k = k^k$ h) $a_k = (-1)^{k-1}\cdot k^2$

i) $a_1 = 3;\quad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$ k) $a_1 = 1;\quad a_2 = 2;\quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}\cdot a_k}$

l) $a_1 = 3;\quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3;\quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4\ (n \in \mathbb{N}^*)$

m) $a_k = 2k-1+\frac{1+(-1)^k}{2}+(-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$ n) $a_k = 3-\frac{1}{2^{k-2}}$

غوښتنه :

پرلپسی د مونوتون خویونو له پلوه وڅیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k}$ b) $a_k = \frac{k+4}{k}$ c) $a_k = \frac{3k}{2k-1}$

d) $a_k = \frac{1-k^2}{k}$ e) $a_k = 2^k$ f) $a_k = 1-\sin\frac{\pi}{k+1}$

۱۸ . ۲ الف لړی

د هغه کارپلټونکی زدکړې وړاندیز ته بیرته پام راګرځوو، چې د لمړی ورځې 0,05 اجوره د دویمې ورځې 0,1 د دریمی ورځې 0,2 ، د څلورمی ورځې اجوره یې 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوې:

د k - می ورځې لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی ؟

دا مو یوې ځمککچیزې لړی ته لاربنودوې د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره.

د هغې k - م توکی دk- می ورځې اندازه ګڼې یا د اجورې معیار دی.

دا په دې مانا چې زدکړی دk - می ورځې لپاره $0{,}05.2^{k-1}$ ډالره اجوره یا معاش اخلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که غواړو چی وښایو چی زدکړی په لومړیو پنځو ورځو کی څومره اجوره اخلی ، نو باید د لومړیو ورځو اجورې ځککچیزه پرلپسی، د $a_k = 0,05.2^{k-1}$ سره، یو بل سره زیاته کړو

$$0,05+0,1+0,2+0,4+0,8 = 1,55$$

دا زدکړی د لومړیو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخلي‌که د لومړیو n ورځو اجوره په Sn سره وښایو ، نو یوه لړۍ د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = 0,05\ .2^0 = 0,05$$
$$s_2 = s_1 + 0,05.2 = 0,05+0,1 = 0,15$$
$$s_3 = s_2 + 0,05.2^2 = 0,15+0,20 = 0,35$$
$$s_4 = s_3 + 0,05.2^3 = 0,35+0,40 = 0,75$$
$$s_5 = s_4 + 0,05.2^4 = 0,75 + 0,80 = 1,55$$
$$s_6 = s_5 + 0,05.2^5 = 1,55+0,160 = 3,15$$

غوښتنه:
پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی(مخ ودیزه کړی)۰ که د ورکړ شوې پرلپسی ، چی توکي یی a1,a2,a3 ....
دي، دتوکو یو په بل پسی جمعه یا زیاتون جوړ شي

$$s_1 = a_1 \qquad = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1+a_2+a_3 \qquad = s_2+a_3$$
$$.$$
$$s_{20}=(a_1+a_2+\ldots+a_{19})+a_{20} \qquad =s_{19}+a_{20}$$
$$.$$
$$s_{n-1} =(a_1+a_2+..+a_{n-2})+a_{n-1} \qquad =s_{n-2} + a_{n-1}$$
$$s_n= (a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n \qquad =s_{n-1} +a_n$$
$$s_{n+1}=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1} \qquad =s_n +a_{n+1}$$
$$.$$
$$.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یوه پرلپسی...S1,S2,s3, لاس ته راځي٠

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۸:

د یوې پرلپسی ...;a1; a2; a3 څخه جوړه شوې پرلپسی ...S1;S2;S3
د رکورزیف انځورونی $s_1 = a_1; s_n = s_n + a_{n+1}$
سره پرلپسې لړی (د پرلپسیو لړۍ) یا لنډ : لړی بلل کیږي.

بیلګه :
د ak = 2k سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$
$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$
$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

بیلګه :

د ak = (2+3k)/(k+1) سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \frac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}$$
$$s_3 = s_2 + \frac{11}{4} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = \frac{95}{12}$$
$$s_4 = s_3 + \frac{14}{5} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} = \frac{643}{60}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \ldots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړۍ توکي Snورکړۍ

a) $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ b) $a_k = -3 \cdot 2^{k-1}$

c) $a_k = 5 \cdot 0.2^{k-1}$ d) $a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1}$

پیژند ۱۸ . ۹ :

د اریتمیتیکي پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکي لړۍ پرلپسي (لنډ: لړۍ) بولو:

sn = a1 + a2 + ... + an

موږ دلته بیا پیل بیلګه را اخلو، چی د اریتمیتیکي لړۍ (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لړۍ پرلپسي یی غواړو ونومو او په لنډه توګه یی له دې وروسته »لړۍ « و بولو) زیاتون او په ټولیزه توګه لړی زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یي زیاتون ونیولی شو:

$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$
$+a_{n-1} + a_n$

$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \ldots$
$+ a_2 + a_1$

$s_{100} = 3+7+11+\ldots$
$+395 + 399$

$s_{100} = 399+ 395+\ldots$
$.+ 11 + 7 + 3$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+..+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+ d + a_{n-1}) +....$$
$$+ (a_1 + (n-1).d + a_1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2s_{100} = 402 + 402 + 402 + ..$ $2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)...+(a_1+a_n)$

$+402 + 402$

$2s_{100} = 100.402$ $2s_n = n.(a_1+a_n)$

$s_{100} = 50.402$

$s_{100} = 20100$ $s_n = n(a_1 + a_n)/2$

د پورته شميرني سره سم د اريتميتيکي لړی زياتون دی: $s_n = \frac{n(a_1+a_2}{2}$

که دلته د an=a1+(n-1)d ځاي په ځاي شي او د اسانتيا لپاره کموتاتيو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چي n /2 ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1+(n-1)d)n}{2} = n.a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بيلګې:

لومړی: $a_a = 3; d = 7; n = 50 => s_{50}(2.3 + 49.7)50/2 = 8725$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دې

$$s_{50} = \frac{(3+346)50}{2} = 8725$$

دويم- يو ميراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ويشل کيږي چی هر يو مشر د ورپسی مشر ورور ځخه 470 0افغاني زياتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسيږي. معلوم کړی چی ميراث څومره دی او هر يو ورور ځومره ميراث اخلي؟

a1=17000;d=4700 ,s6=6/2(2.17000+5.4700)=172500 افغانئ

ورونه په لاندې ډول پيسی اخلي

17000 افغانی ،21400 افغانی، 26400 افغانی ،

31100افغانی ، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چی د اريتميتيکي لړی زياتون پيداکيږي، همداسی د هندسي لړی زياتون هم پيداکيدی شي. عمومي فرمول به په پورتني ۱ - بيلګه کی ځانګړی يا ځانيزشي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لړۍ sn څخه په q پراخه شوې لړۍ کموو. په دې ډول لړۍ لړو توکو ته لړیږي:

۱۸ . ۲ الف . ۱ ځمککچیزې یا هندسي لړېپرلپسي (لنډ: لړۍ):

د ځمککچیزې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ ځمککچیزه لړۍ بلل کیږي.
د هندسي پرلپسی د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0 + 3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0 + 3.2 + 3.2^2 + 3.2^3 + .. + 3.2^{n-1}$$

.

.

جمله : (اکسپلیڅیت انځورونه):

د ځککچیزې پرلپسی د ak = a1 +(k- 1).d توکي سره جوړې پرلپسی څخه جوړې شوې هندسی لړۍ لپاره صدق کوي:

Sn = a1+a2q+a3q²+...+a1qn-1=a1(qn-1)/(q-1);

q|=0;Sn=n.a1 q = 1

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$
$$s_n \cdot q = \qquad a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$
$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \qquad\qquad - a_1q^n$$
$$s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$
$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه: اوبی د $q = 1$ لپاره د ګرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلی کوو: پرلپسی د-n ام غړي $a_n = 3.2^{n-1}$ سره ورکړ شوي.
دلته په دې توګه د لړۍ غړي لړو غړو ته رالبږيږي.

$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \dots + 24576 + 49152$ $\qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_{n-1} + a_n \quad +$

$s_{15} \cdot 2 = 6 + 12 + \dots + 49152 + 98304$ $\qquad s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \quad -$

$s_{15} - s_{15} \cdot 2 = 3 - 98304$ $\qquad s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$

$s_{15}(1-2) = 3 - 98304$ $\qquad s_n(1-q) = a_1 - a_n \cdot q$

$s_{15} = (3-98304)/(-1)$ $\qquad s_n = (a_1 - a_n \cdot q)/(1-q) = (a_1 - a_1 \cdot q^n)/(1-q)$

$s_{15} = 98401$ $\qquad s_n = a^1 \cdot (1-q^n)/(1-q)$

له کمون یا کمښت وروسته د لړۍ په کښه لور تیك(یواځی) پورته لیکی لومړی توکی او د لاندې کرښې اخرنی توکی پاتیږي، نور ټول توکی یوبل سره لرې کوي، د بیلګي په توګه $a_2 - a_1 \cdot q = 0$ او یا $a_n - a_{n-1} \cdot q = 0$
دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي ، په لومړي حالت که به مو پرلپسی
$a_1, 0, 0, 0, 0 \dots\dots$
لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي a_1, a_1, a_1, a_1سره سر او کار وي

بیلګي:

$1 - 7 ; -21 ; 63 ; -189 : \dots\dots q = -3; a_1 = 7$
غوښتونکی s_7

$s_7 = 7 \cdot ((-3)^7 - 1) / -3 - 1 = -15316 / -4 = 3829$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کنترول:

$$a_7 = a_1 . q^6 = 7 . (-3)^6 = 5103 \quad , s_7=5103.(-3)^7-1/(-3)^7-(-3)^6 :$$

$$= 5103.2188/2916 = 3829$$

۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړی

دلته غواړو چی یو ځل بیا لنډ مګر د یوه لوي سرلیك په څیر اریتمیتیکي لړۍ ته یو نظر واچوو .یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړی اریتمیتیکی لړی نوموو. د

$$ak = 15 + (k - 1).4$$

سره جوړه اریتمیتیکي پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$

$$s_2 = s_1+a_2 = 15+(15+4)=15+19=34$$

$$s_3 = s_2 +a_3 = 15+(15+4)+(15+2.4) = 15+19+23=57$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} +a_n = 15+(15+4)+(15+2.4)+..+(15+(n-2).2+(15+(n-1).4$$

.

.

.

جمله : (د اریتمیتیکی لړی اکسپلیځیت انځورونه):

د $ak = a1+(k-1).d$

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړی sn اریتمیتیکي لړی لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+..+(a_1+(n-1)d = (n /2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$
$$s_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

$$s_n + s_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \ldots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$$
$$2 \cdot s_n = n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$
$$s_n = \tfrac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

غوښتنه:

وښايي چی sn=(n/2)(2a1+(n-1)d د sn=(n /2)(a1+an)
سره په یوه مانا دي

۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړیو پولی

موږ تراوسه داسی لړیو سره سراو کار لروده چی اخرنی توکي یی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړی پایلړی بلل کیږي. داسي فکر هم کیدی شي چي د لړی اخرني غړي موجود نه وي، یعني لړی دې په خوښه دوام پیدا کولی شي. په عمل کی داسی پرابلمونو سره مخامخ کیږو چی دا مو ناپای لړیو ته هڅوي. دا څرګنده ده، چي داسی لړی اریتمیتیکی لړی نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او یا د پادیرو غړو زیاتون، په اریتمیتیي لړی کی بي مفهومه دی، ځکه چي دواړه لویي د nد ارزښت سره په ټولو پولو لویږي په هندسی لړیو کی هم په یوه ناپای لړی کی د اخرني غړي او یا زیاتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پیل غړی د|q| سره ځل له امله تل جګیږي. دا د مثبت او همداډول د منفی q لپاره باور لري.

بیلګي:

۱ - اریتمیتیکي لړی 2+3+4+5+..... یو لاس ته راوړونکی د زیاتون یا جمعی ارزښت نه لري، ځکه چی هر راتلونکی زیاته وونی د ټولو پولو لوییږي یاجګیږي۰

۲ – ځمککچیزه یا هندسي لړی 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+...... د لومړي توکي 2 = a1 او د ویش q = 1,5 سره په ټولو پولو لوییږي. یا جګیږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلومیدی شي. د پای توکوګڼ زیاتون sn او اخرنی توکی an شمیریدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - ناپای ځمککچیزه یا هندسي لړۍ

1,5-3+66-122+24-48+966-....... د a1 =1,5 او q= -2

سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چی د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جګیږي یا لوییږي .له دې سره به ځرګنده شوې وي چی کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبیلګه :

یو سخی سړی غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی . په لمړۍ میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمايي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانۍ او داسی نور. دلته a1=1000او q=1/2دي. دوخت د کموالي له امله دا لړی باید پای لړۍ وي ، مګر موږ دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.

د پای ځمککچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له فرمول $s_n = 1000(1\text{-}0{,}5^5)/(1\text{-}0{,}5)$ څخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپاي لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی موږ ته معلوم ارزښتونه کیښول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1\text{-}0{,}5^5)/(1\text{-}0{,}5)$$

اوس کیدی شي ولیکو $s = 1000(1\text{-}0{,}5^n)/(1\text{-}0{,}5) = 2000.(1\text{-}(1/2)^n)$

که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات (1/2) تل کوچنی شي.

دې مات (1 /2) باندې کیدی شي، چی د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.

دلته روښانوي چی په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ

1000+500+250+125+65,50+32,75+......

جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نزدي کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سړی زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کیدی شي٠

پرلپسی او د پرلپسی لړۍ په لوړو شمیرپوهنوکی غوره رول لوبوي« ډیرې ښوونی (اوبښونې) په دې ولاړې دي، چی ایا یوه ټیك ټاکلی پرلپسی یوې معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چی په اول حالت کی پرلپسی(konvergent لیمټ لرونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاپوله لرونکي(بلل لکیږي او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمټ یا پوله نه لرونکی) بلل کیږي.

بیلګه :

د ... مخ په اول او په دریمې بیلګو کی راوړل شوې پرلپسی دیورګنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲ –مه بیلګه کی پرلپسی کونورګنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورګنت ده یعني ددې پرلپسي پوله صفردی. او ۴ -مه بیلګه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعني پوله یی ۳ دی.

پرلپسی شته چی د جګیدو سره یوه ټاکلی ګڼ ته په خوښه ورنزدې کیدی شي.د دې پرلپسی د په خوښه لویو غړو او د دې ګڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیږي، چی په جبشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .
موږ د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جبشمیري، په لاندې بیلګو کی څیړو.

د پرلپسیو غړي

1 ; 1 /2; 1 /3 ; 1 /4 ;....| 0 ; 1 / 3 ; 2 / 4 ; 3 /5 ; 4 /6;.. | 3 /29 /4 ; 15 /8 : 33 /16

1;1/2;1/3;1/4;..|0;1/3;2/4;3/5;4/6;..
|3/29/4;15/8;33/16

د لاندې سره

$a_k = 1/k$ | $a_k = (k-1)/(k+1)$ | $a_k = 2+(-1/2)^k$

د k د جګیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې ګڼونو ته نزدي کوي

g = 0 | , g = 1 | g = 2

د ګراف ټکي یی تل د جګیدونکی غړی نمرې k سره د

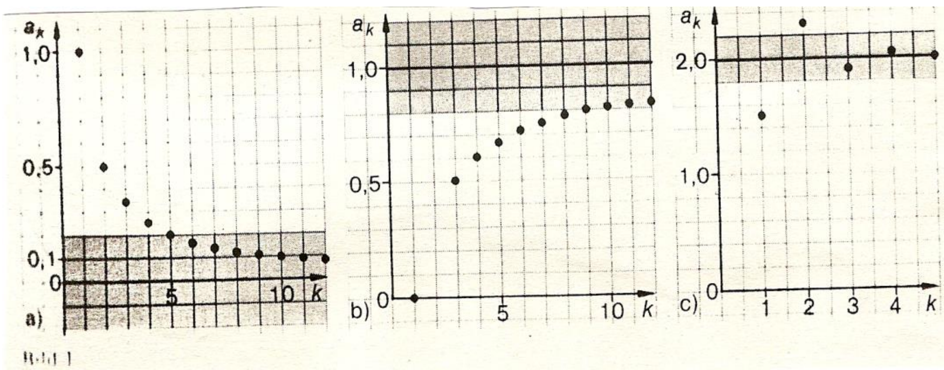
دx - محور سره غبرګ | دx - محور سره غبرګ | x -محور ته
د y = 2 سره | د y=1 سره او په ریښتونی
له لاندې او پورته بدل | له لاندې راتلونکي
له پورته راتلونکي
راتلونکی

که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=2$ سره   د $y = 1$ سره   د $y = 0$ سره

نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې دیفرنځ یا کمون

$\lvert a_k - 0\rvert$	$\lvert 1 - a_k\rvert$	$\lvert a_k - 2\rvert$

دا مانا لري، چی د جګیدونکی k نمرې توکیه خورا کوچنی کیدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غړی ak لپاره دا کمون د بیلګي په توګه له 0,0001 کوچنی کیدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$$|a_k - 0| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{1}{k} < 0.0001$$
$$k > 10000$$

$$|1 - a_k| < 0{,}0001$$
$$\left|1 - \frac{k-1}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{(k+1)-(k-1)}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{2}{k+1} < 0.0001$$
$$\frac{2}{0{,}0001} < k+1$$
$$19999 < k$$

$$|a_k - 2| < 0{,}0001$$
$$\left|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| < 0{,}0001$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0{,}0001$$
$$k \cdot \lg\tfrac{1}{2} < \lg 0{,}0001 \,\|: \lg\tfrac{1}{2} < 0\ (!!)$$
$$k > \frac{\lg 0{,}0001}{\lg\frac{1}{2}}$$
$$k > \frac{-4}{-0{,}3010}$$
$$k > 13{,}29$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$k > 10000$ | $k > 19999$ | $k > 13$

سره کمون $| a k - g |$ له 0,0001 کوچنی دی .
د ګراف لپاره باور لري، چی دا ټول ټکي د یوې پټۍ یا تسمې په دننه کی پراته دي
سور یي 2.0,0001 په کرښه د مساوات

$y = 0$ | $y = 1$ | $y = 2$

$y = 0$ $y = 1$ $y = 2$

سره پروت وي .
که دا د 0,0001 په ځاي کی یو په خوښه کوچنی رییل ګڼ ورکړ شي، او وله دې وغوښتل شي چی کمون یی له دې ګڼ کوچنی دی نو په ورته توګه مو لاندېنامساواتو ته لارښودوي.

$\|a_k - 0\| < \varepsilon$	$\|a_k - 1\| < \varepsilon$	$\|a_k - 2\| < \varepsilon$
$\left\|\frac{1}{k} - 0\right\| < \varepsilon$	$\left\|\frac{k-1}{k+1} - 1\right\| < \varepsilon$	$\left\|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right\| < \varepsilon$
$\frac{1}{k} < \varepsilon$	$\left\|\frac{(k-1)-(k+1)}{k+1}\right\| < \varepsilon$	$\left\|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\| < \varepsilon$
$k > \frac{1}{\varepsilon}$	$\left\|\frac{-2}{k+1}\right\| < \varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$
	$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg\varepsilon \,\|: \lg\frac{1}{2} < 0$ (!!)
	$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$	$k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$
	$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$	

دا په دې مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$k > 1/\varepsilon$ | $k > 2/\varepsilon - 1$ | $k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$

سره کمون $\dfrac{q^n}{1-q}$ دی .

پرلپسی له دې خویونو سره کونورګنت بلل کیږي او ګڼ g یی پوله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۸ .۱ :

يوه پرله پسی کونورګنځ Konvergent (لاتين convergere يو د بل په لور ور ځغليدل يعني يو بل ته ورنزدېکيدل(بلل کيږي يعني د يوې ټاکلی پولی په لور هڅيږی، کله چی د هغی غړي د جګيدونکی ايندکس n سره يوې پولی ته په خوښه نزدې شي. يوه لړۍ کونورګنت يا پوله لرونکی بلل کيږي، کله چی د برخه زياتون پرلپسی د جګيدونکی n سره يوې پولی ته په خوښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅيږي صفرپرلپسی يی بولو هغه پرلپسی چی يوې ټاکلی پولی ته نه هڅيږي .ديورګنت بلل کيږی ») دا وروسته ه تر څيړنی لاندې نيول شوي دي.

جمله :

د ځمککچيزې يا هندسي لړی پولې تج ت لنې يا کونور ګنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=|q|<1$$

که $|q|<1$ وي ، پس د پای ځمککچيزې لړی لپاره د زياتون فرمول داسی دی

$$s_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

د q^n ارزښت څخه تېرېدی شو يعنې ترې صرفنظر کيدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځککچيزې لړۍ ...+a1+a1.q+a1.q²+a1.q3 د زياتون sn سره پوله تيك هلته لري، کله چی$|q|<1$ s = a1 / (1-q)

$n=n_0(\varepsilon)$;..(18.7)

وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

هره پرلپسی د $(b \in R; n, k \in N)$ $a_k = \dfrac{b}{k^n}$ سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = cq^n (c \in R$ لپاره د1>|q| سره یوه صفرپرلپسی ده۰

دلته غواړو چې دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو.
د یوې پرلپسی د غړو an ځانیونی څیړنه د تل جګیدونکي n لپاره،وایو چی:
که n د oe (ناپای) په لوروهڅیږي او یا لنډ n—›oe ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیايي او یا کونورګنځ (convergence). موږ پرلپسی{ 1/n}={an} په پام کی نیسو، د جګیدونکي n سره، ګورو چی د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه پورې ور نزدې کیږي .
که سړی هرڅومره کوچنی ګڼ $\varepsilon > 0$ وټاکي د یوه معلوم($n = n_0(\varepsilon)$ د لته) $n_0(\varepsilon)$ د ε په واک کې دی) څخه وروسته ټول ګڼونه د0 په ε -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon). \tag{18.1}$$

سړي کړی شي چی دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د) ۱۸ . ۱ (له امله دی

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{18.2}$$

د

= 100 / 1

لپاره . n0 = 100 نو | an | < 1 / 100 د ټولو n > 100 لپاره، یعني د n = 101, n
102 , n = 103........=لپاره. د = 1 / 1000000 لپاره لرو = ( ) n0
1000000پس, | an | < 1/ 1000000 د ټول n > 1000000 لپاره

په لاندې حالت کی سړی وایي: چی پرلپسی
/n{ 1 {
کنورګنت ده. هغه د پولې a = 0 لور ته کونورګنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n} \to 0 \qquad (18.3)$$

(د 1/n لیمس د n—>oe لپاره په 0 مساوي دی او یا ساده 1/nد0 په لور ځي)

د $\{a_n\} = \{(-1)^n(1+\frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څیړنه کره لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی an د+1 لورته نزدې کیږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د1- لورته نزدې کیږي. د لته سړی د دوه پولو +1 او 1- څخه نه غږیږي بلکې دپرلپسی ددوه ډیرۍ شوو ټکو یا ځاې راټولشوو ټکو څخه . پرلپسی کونورګنت نه ده بلکه دیورګنت (divergence(ټیګ : ناټاکلی دیورګنس)ده ۰

پرلپسی {an}={n2} هم دیورګنت ده. دا چې an د جګیدونکی n سره د oe یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوي ارزښت K څخه اوړي یا جګیږي، نو سړی د oeپه لور د ټاکلی دیورګنت څخه غږیږي.

$$\lim_{n\to 0} n^2 = +\infty \vee n^2 \to +\infty; ....(18.4)$$

په پورته کې $\vee$ د یا لپاره ځاې په ځاې ده

له دې پیل یادونوڅخه اوس باید د پولو(حدونو) کلیمی کره وپیژندل شي:

پیژند ۱۸ . ۲ :

یو پرلپسی $\{a_n\}$ { an } پوله یا حد a لري

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \to a; ....(18.5)$$

که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon > 0$

< 0

لپاره یو $n_0 = n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n - a| < \varepsilon; ....(18.6)$$

د ټولو $n = n_0(\varepsilon); ....(18.7)$

وایو چی پرلپسی } an { کونورګنت یا په بل عبارت پرلپسی } an { د پولی a په لور کونورګنت کیږي .که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورګنت بللکیږي(یا دیورګنت کیږي) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یوې دیورګنتی پرلپسی } an { و هر (په خوښه لوی) ګن K لپاره یو
)n0 = n0(K
داسی موجود وي چی باوري وي

$$a_n > K \quad \text{یا} \quad a_n < -K \qquad (18.8)$$

د ټول

$$n > n_0 (K) \qquad (18.9)$$

نو د پرلپسی ځرګند یا معلوم دیورګنت بلل کیږي د + oe په لور اویا - oe په لوراو
ددې لپاره لیکي

$$\lim_{n\to\infty} a = +\infty \iff (\text{په همدې ډول}) \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad (18.10)$$

یا لنډ:

$$a_n \to +\infty \Rightarrow (\text{یا په همدې ډول}) \; a_n \to -\infty \qquad (18.11)$$

که یوه پرلپسی دیورګنت او ټاکلی دیورګنت نه وي، نو ناټاکلی دیورګنت بلل کیږي.
ددې پرلپس، $\{a_n\} = \{n/n+1\}$ څخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

اتکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله a = 1 لري، یعني $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي :

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1 > n \iff n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ داسی موجود دی چی $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

دا ساده بیلګه د تعریف ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا نه وايي چی پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چی پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی . مخکي له دې چی کونورګنځ

اټکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a=1$ لري، یعني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < \varepsilon$$

د $n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon) \Leftrightarrow n+1 > n$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ داسی موجود دی چی $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر $0<$

$\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$

داسی شته دی چی $|a_n-1|<\varepsilon$،

د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی .

دا ساده بیلګه د پیژند ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا دا نه وايي چی پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چی پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz)وښوولی شو، نو پولې a ته اړتیا شته دی . مخکي له دې چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونورګنځ (ټولې تج تلنه) وښايو نو بايد پوله مو پيژندلي وي يا کم له کمه مو ګومان په راغلی وي.
په ټوليزه(عمومي) توګه د $n_0(\varepsilon)$ شميرل هم د ستونځو ډك دي. د پولی عملي شميرلو لپاره داسی عمليو يا کاره ونو ته اړتيا ده، چی بی د پيژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپيدا کړی شو. له دې پرابلم سره ۱۸ . ٤ -امه برخه ځان مشغولوي.
کله کله دا بسوالی يا بسيا کوي چی سړی دومره پوه شي چی ايا پوله وجود لري يا شته دئ (ايا کونورګنت کيږی) بی له دې چی هغه وپيژني او يا يی وشميري. داسی د موجوديت ويناوي يواځي د کونورګنځ کريتيرين (- خويونه) کولی شي، له کومو څخه چی لاندې يو ورکول کيږي. دې ته بايد ګوته ونيسو چی دا کريتيرين د مخه د پولی پو هيدل ضرور نه نيسي) دا د مخه نيونه نه ده يعني فرضيه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱:

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی an کونورګنت ده ٠

دا کريتيريوم څرګند د ليدلو دی. که يوه پرلپسی تل جګيږي (کميږی ،ټيټيږي) او ټاکلی يا معلوم پای ارزښت K څخه نه اوړي(K څخه نه ټيټيږي) نو بايد an يوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله يواځي په يوځاي کی کيدی شي.

يادونه : څه ګنونه چی په يوځاي کي سره ډير راټول شي ما ورته ډيری ليکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډيری مي د ډيری ياني د سيټ لپاره کارولی ، نو دلته ليکم، چې »راپنډ» شي٠

جمله ۱۸ . ۱ د بيلګي په توګه په دريمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوګاريتم بنسټ په څيرګنې e سره اړيکو يا رابطو کی استعمال لري . سړی د يو څه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورګنت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پوله $e = 2,71828$ ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{18.12}$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کی غواړو چی قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چی د پیړندلشوو پرلپسی د کونورګنت څخه د نورو کونورګنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چی د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي.
لاندې بنسټیزه جمله ښاي چی د ځانګړو شرایطو لاندې د ګڼونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د ګڼونو سره.

جلمه ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای)پوله ارزښت a اوb ولري ، یانې

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \tag{18.13}$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \tag{18.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \tag{18.15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b},\ b_n \neq 0, b \neq 0, \tag{18.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b,\ a_n > 0, a > 0, \tag{18.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a,\ a_n > 0, a > 0. \tag{18.18}$$

دا جمله دوه ګوني وینا کوي: که د پرلپسیو غړو an او bn د کونورګنت عددونو پرلپسي د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنځ یا لوګاریتم نیولو ، د یوې نوې پرلپسي یا ترادف غړي لاس ته راولي نو دا نوې پرلپسي (ترادف) کونورګنت ده او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورګنتو پرلپسیو یا ترادفون جمعه،تفریق،ضرب(زیاتون، کمون، ځل)، ویش ، پوتنځ او لوګاریتم دی.
په لاندې کی غواړو یوائې اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو) . نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر
< 0
ته یو
$(n1)$ (او یو $n2$)
داسی شته دی، چي باوري کوي $|a_n - a| < \varepsilon$ دتولو $n > n_1(\varepsilon),$ لپاره ،
$|b_n - b| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_2(\varepsilon),$ لپاره‌پس معتبر دي
$|a_n - a| < \varepsilon$ او $|b_n - b| < \varepsilon$ د ټول $n > n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$
اوس باید یوائې وښایو چی د یوه ټاکلي n چه $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$
د هر ε لاندې راټیټیدلی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ډ ټولو $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$ لپاره
په دې توګه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.
د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیك په پام کی ونیول شي چی پرلپسی $\{an\}$ او $\{bn\}$ څرګند پای پولی ارزښتونه a او b باید ولري. که د بیلګي په توګه $a_n \to \infty,$ او $b_n \to \infty,$ وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال !) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه ناټاکلي افادې په لورځی یعنی $\infty - \infty,$

$$(a_n - b_n) \to \infty - \infty. \tag{18.19}$$

که باور ولري $a_n \to 0, b_n \to \infty,$ نو سړی د اجازې نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله ناټاکلی افاده لاس ته راولي:

$$(a_n \cdot b_n) \to 0 \cdot \infty. \tag{18.20}$$

په لاندې کې .bzw د همداسې‌په معنا دی.

$$a_n \to 0,\ b_n \to 0 \quad \text{bzw.} \quad a_n \to \infty,\ b_n \to \infty,$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\infty}{\infty}. \tag{18.21}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۸ . ۱۷) استعمال مو د $a_n \to 0,\ b_n \to 0$ همداسي د $a_n \to \infty,\ b_n \to 0$ همداسي $a_n \to 1,\ b_n \to \infty$ حالتونو کې مو درې نورو ناټاکلو افادو ته لاربنود وي.

$$a_n^{b_n} \to 0^0 \text{ bzw. } a_n^{b_n} \to \infty^0 \text{ bzw. } a_n^{b_n} \to 1^{\infty}. \qquad (18.22)$$

په پورته انځورشوو اړیکو کی لاندې افادې

$$\infty - \infty,\quad 0 \cdot \infty,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^{\infty} \qquad (18.23)$$

ناټاکلی افادې بلل کیږي.
داسي پرلپسی چی د جملي ۱۸ . ۲ فورمال استعمال ځخه ناټاکلو افادو ته لاښنودوي ، دیورګنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورګنت وي. دا یوې ځانګړې ځیړنی ته اړ دي.

مخکی له دې چی داپوښتنی ځوابوو، نو باید یوځو تیپیکي پرلپسی وځیړل شي، کومی مو چی په نامه ټاکلو افادو ته لاربنود وي، که څه هم د جملی ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیي پوره نه وي.
که an —>+oe او bn —>+oe باور ولري نو طبعآ لاس ته راځي

$a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$	.........(18.24)
$a_n . b_n \to \infty . \infty = \infty$	.........(18.25)
$a_n - b_n \to \infty - \infty = \infty$	.........(18.26)

دا اړیکي (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعآ د ناڅرګندې پولی ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.
که a <— an او oe <— bn وي، نو باور لري :

$$a_n + b_n \to a + \infty = \infty, \qquad (18.27)$$
$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = \infty,\ a > 0, \qquad (18.28)$$
$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = -\infty,\ a < 0, \qquad (18.29)$$
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{\infty} = 0, \qquad (18.30)$$
$$a_n^{b_n} \to a^{\infty} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1, \end{cases} \qquad (18.31)$$
$$a_n^{-b_n} \to a^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{für } a > 1, \end{cases} \qquad (18.32)$$
$$b_n^{a_n} \to \infty^a = \infty,\ a > 0. \qquad (18.33)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \to 0,\ b_n \to b, \tag{18.34}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{b}{0} = \infty,\ b > 0, a_n > 0, \tag{18.35}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0,\ a_n > 0, \end{cases} \tag{18.36}$$

$$\log a_n \to \log 0 = -\infty, a_n > 0. \tag{18.37}$$

د $a_n \to 0$ او $b_n \to \infty$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{\infty} = 0,\ a_n > 0, \tag{18.38}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\infty}{0} = \infty,\ a_n > 0, \tag{18.39}$$

$$a_n{}^{b_n} \to 0^\infty = 0,\ a_n > 0. \tag{18.40}$$

په دې همدا اوس ښوول شوي اړیکو کی لاندې افادې تاکلی افادی دي (نیونه د (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کې ونیول شي) :

$$\infty + \infty = \infty,\ a + \infty = \infty,\ \infty \cdot \infty = \infty,\ a \cdot \infty = \infty,$$
$$\frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty,\ \frac{0}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{0} = \infty,$$
$$\infty^\infty = \infty,\ a^\infty = \infty\ (a > 1),\ a^\infty = 0\ (0 < a < 1), \tag{18.41}$$
$$0^\infty = 0, 0^a = 0\ (a > 0),\ 0^a = \infty\ (a < 0),$$
$$\infty^a = \infty\ (a > 0),\ \infty^a = 0\ (a < 0),\ \log 0 = -\infty.$$

په لاندې بیلګه کی به یو څو ګنونپرلپسی ورکړ شي، کومی چی د تاکلو افادې په لور لاربنودوي) بیایي :)

بیلګه ۱۸ . ۳:

$$n^2 = n \cdot n \to \infty \cdot \infty = \infty,\qquad \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \to \infty^{\frac{1}{2}} = \infty,\qquad \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$2^n \to 2^\infty = \infty,\qquad \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0^\infty = 0,\qquad \log\frac{1}{n} \to \log 0 = -\infty,$$

$$\frac{n}{\sin\frac{1}{n}} \to \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty,\qquad n \cdot \log\frac{1}{n} \to \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه پرلپسی چې د ناټاکلو افادو(۱۸ . ۲۳) . په لور مو لاربنودوي، څه ستونځي پيښوي. دا د هوښيارو فورمبدلولو يا ښه بدلون په بنسټ په داسی پرلپسو بدلېږي چې څرګنده – يا ټاکلې افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بيايي يا چې د هغي کونورګنتځانښيونې معلوم دي . لومړی دې يو څو ځانګړې پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ غړو سره د نا ټاکلی افادې 1^∞ په لور بيايي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت e لري. سړی ښوولی شي (دلته دې دا نه ښوول کيږی) ، چې دا پولی ځانښيونه ساتلي پاتی کيږي، که څوك د $an = 1/n$ په ځاي يوه په خوښه د صفر پرلپسی $a_n \to 0, a_n \neq 0$ وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی $\{a_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad a_n \neq 0, \tag{18.42}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \tag{18.43}$$

بيلګه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بيلګي په توګه لاس ته راځي:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n\cdot(-1)} = \left(\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = \left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \to e^a, \quad \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n} \to \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{1^3}{1^3}\cdot\frac{(e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\to e^0=1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n\to e^\infty=\infty.$$

د $a_n \to 0$ لپاره پرلپسی sinxn)/n) د ناټاکلی افادې 0/0 په لور ځي.
لاندې باور لري :
جمله ۱۸ . ۴: د هرې په خوښه صفر پرلپسی

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, a_n \neq 0,$	(18.44)

لپاره باور لري (د لندې الماني ژباړه= an په لینده کچ)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \qquad (18.45)$$

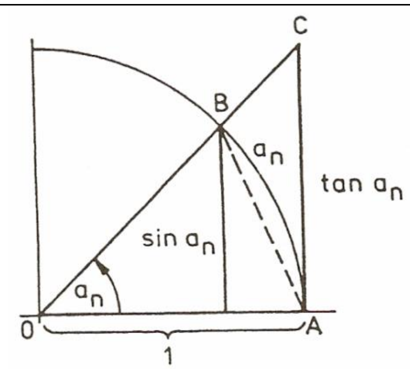


Bild 18.1

اوبونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$ له امله او لهدې امله

چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n}=\frac{\sin a_n}{a_n}$ دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵
) یواځې د an> 0 لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک څخه ګټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ . ۱) د
درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1\cdot\sin a_n}{2}$,

د ګردی سکتور یا ګردیبرخه OABمنځهوارې
څخهکوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي $\frac{1^2\cdot a_n}{2}$,
OACد منځهوارې. $\frac{1\cdot\tan a_n}{2}$

څخه کوچنی دی. له دې امله باور لري
$\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبنونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

له امله او له دې امله چی $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$

دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یوائې د $an > 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک ځخه ګټه اخلو؟؟؟ ځیره ش ۱۸ .

۱) د درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردی سکتور یا ګردیبرخه OAB

منځهوارې $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$,

ځخهکوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي OAC د منځهوارې. $\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$

ځخه کوچنی دی.

له دې امله باور لري $\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

او ورپسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1,\ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n}\ ,\ \text{also}\ \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د $\cos a_n \to 1$ له امله $a_n \to 0$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري۰

بیلګه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$n^2 \cdot \sin\frac{1}{n} = n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$n \cdot \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1,$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

بیلګه ۱۸ . ۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پرلپسی $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\},$ ،

چې د ناټاکلی افادې $\frac{\infty}{\infty}$ په لور مو هڅوي کوښښ کیږي چې د مات باندې او ماتلاندې په یوه کڼ وویشل شي، چې یو ټاکلی وینه یا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2-n+1}{2n^2-1}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{3}{2}, \qquad \frac{6n^3+n-1}{7n^4+n^2+1}=\frac{\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\to\frac{0}{7}=0,$$

$$\frac{6n^3+n-1}{2n^2-1}=\frac{6n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{\infty}{2}=\infty, \quad \frac{\sqrt{n^2-1}+n-1}{n+1}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to\frac{2}{1}=2.$$

بیلګه ۱۸ . ۷ : پرلپسې $\{a_n-b_n\}$ ، چې ناټاکلې افادې $\infty-\infty$ ته مو لاربښودوي، کید ی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړې:

$$a_n-b_n=\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}\to\frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولې ته و هڅیږي، نو یوه ټاکلې افاده بیا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2+5n+2}-2n=\frac{4n^2+5n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n+2}+2n}=\frac{5+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}\to\frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{-1}{+0}\to-\infty,$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

تمرینونه:

د ورکړ شوې پرلپسې $\{a_n\}$ یا ترادف پوله ارزښت a وشمیرئ (که شتون وري)! $n_0(\varepsilon)$ وټاکئ، داسې، چې د ټولو $n>n_0(\varepsilon)$ (18.6) لپاره باور ولري.

1. a) $a_n=\frac{n+1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a_n = n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$ d) $a_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

د لاندې پرلپسیو $\{a_n\}$ پوله ارزښت وشمیرئ، که شتونولري.

.1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$ b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$ d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n}\right)^2$ f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2-\sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$ h) $a_n = \frac{3+(-1)^n+2n}{1-3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$ j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$ l) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$

.2. a) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$ b) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n$ d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)(n+3)}{n+2}\right)^n$ f) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$ h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1}\cdot\sin(2n^{-1})]$ b) $a_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}$

c) $a_n = n\cdot\tan\frac{1}{n}$ d) $a_n = \sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2\cdot\cos\frac{1}{n^2}\cdot\tan\frac{1}{n^2}$ f) $a_n = \sin\frac{1}{n} - n\cdot\cos\frac{1}{n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

19 پوله (حد)"The Limit"

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسې) لرو:

(1) 1 / 2 , 1 / 3 , 1 / 4 , ... ,1 / n

(2) 3 / 2 , 4 / 3 , 5 / 4, ..., (n+1) / n

(3) 2,4,6,...2n

که n د ناپای په لور یاني $n \to \infty$ ته لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (۱) د صفر په لور، (۲) د یو په لور او (۳) د ناپاي په لور ځي.

د Limit مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تیرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د یوه ښار د قلعې نوم هم Limitوو. په ریاضیاتو کې ، لکه په ترادفونو (پرلپسې) کې مو چې ولیدل لیمیټ د پولې یا حد مفهوم لري.

د پولې (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوه فنکشن یا تابع سلوک یا کاروایي داسې وڅیړو لکه ځنګه ، چې د فنکشن یا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت - x– محور (abscissa)) باندې پرلبپسې یا ترادفونه یوې پولې یا حد(تکي) ته ورنږدېکیدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسې یا ترادفونه په پروت محور یوې پولې ارزښت ته ځي. وبه ګورو، چې پوله یا حد په ریاضیاتو کې ددې لپاره کارول کیږي، چې مشتق وپیژنو

فعالیت :

-ایا تاسو په ورځني ژوند کې د پولې(حد) د کلمې سره بلد یاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلگه راوړی شئ، چې یوې پولې ته له دواړو لورو، له ښی و کیڼ لورته او همداډول له کیڼ و ښې لورته نزدی شی یا لاړ شئ؟

په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

یادونه: موږ له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټیک زموږ غوښتنه په گوته کوي.

فعالیت ۱ : یوه تابع $f(x) = x + 2$ په پام کې ونیسئ، چې پروتولاړسیستم یا سیستم قیمت وضعیه کې ټکی $P(2,4)$ لري

۱ - د تابع جدول وکاږئ.

۲ – د تابع گراف وکاږئ

۳ - $f(2)$ پیداکړئ او د x خوزښت(حرکت) باندې بحث وکړئ که x د 2 ارزښت ته دواړو لورونزدې شي

۴ - د x پولې ته تلنه په گراف(ځیره) کې روښانه کړئ.

بیلگه ۱ :

یوه تابع $f(x)=2x$ او یوټکی P_0 دې ورکړ شوی وي، چې کواوردینات($3/6$) لري.

۱) د تابع جدول وکاږئ

۲) د تابع کراف یا ځیره , وکاږئ

۳) $f(3)$ پیداکړئ او د $f(x)$ تلنه باندې بحث وکړئ که x د "3" ارزښت ته نزدې شي

۴) د $f(x)$ پولې ته تلنه په ځېره کې روښانه کړئ.

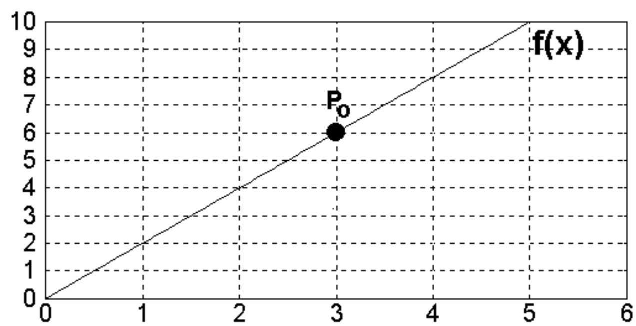
اوس غواړو دا پورته فعالیت روښانه کړو:

۱) د تابع جدول (دولی یې کران لوستونکي پوره کوي)

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲) د تابع ښیره



۳) $f(3)=6$ او غواړو د دري ارزښتونو ښخه چي له ښۍ او کيڼي لور و ۳ ته ورنزدې کيکيږي و ګورو، چي په دې دري ارزښتونو کې چيرته ځي. ددې لپاره لاندې ارزښتونه په دوه جدولونو کې ښيږو

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چي له کيڼ لور وکښته ۲ ته نزدې کيږو او له ښي لور له کښته و پورته لورته هم ۲ ته نزدې کيږو. بل جدول پروت کاږو

له ښي و کيڼ لور ته له کيڼ و ښي لورته

⟶ 1 ⟵

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

------------→ 6 ←------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

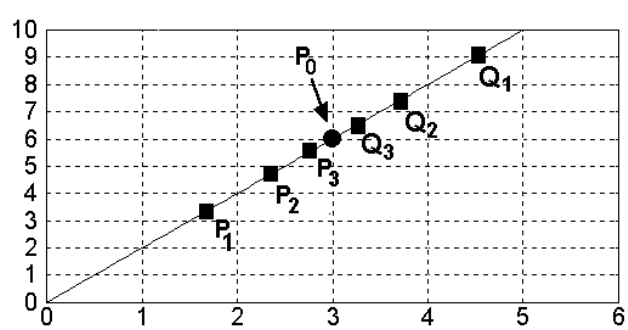
په درې پړاوونو کې د ،، f(3) " قېمت د "f(x) " قېمتونو سره پرتله کيږي. که "x" و "3" ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که "x " و "3" ته ورنږدې شي، نو د f(x) ،،پوله (حد)،، برابر په 6 دئ او دا داسې ليکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته ګراف په لاندې توګه رسموو او ښي او کيڼ لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نخښه کوو.

د لاندې څېړې له مخې ټکي ... P_1, P_2, P_3, په پام کې نيسو، چې ټکي P_0 ته تل له کيڼ لور نږدې کيږي. او همداسې ټکي ... Q_1, Q_2, Q_3, چې له ښی لور ټکي P_0 ته نږودې کيږي.

کتل کيږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و ټکي P_0 ته نږدې کيږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و ۶ نږدې کيږي (د ټکي $P_0(3,6)$ -قېمت له امله)



که په ګراف کې ځای x=3 ته نږدې شو، نو تابع ارزښت يا فنکشن ارزښت و قېمت(ارزښت) ۶ ته نږدې کيږي.

وايو: ۶ د فنکشنf(x) پوله ارزښت دئ د x-->3 لپاره (لوستل: x د 3 (درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو ليکدول ليکښه(په پرله پسې يا ترادف کې) پيژندلی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

یادونه: د تابع پوله یا حد په هغه ځای کې چې تابع تعریف نه وي هم کیدی شي شته وي:

په پورته کې مو د یوه تابع f(x) حد په x=3 ځای کې تر څېړنې لاندې ونیو . دلته تابع په x =3 کې پیژند یا تعریف درلود.

اړیین نه ده ، چې تابع د x=3 په ځای کې تعر یف وي، ځکه چې پوله ارزښت د x لپاره یوائې د x=3 په نزدې کې تشریح شوې.

پام : په ځنو فنکشونو یا توابعو کې ،،پوله یا حد ،، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی ـ لکه د مخه ـ مګر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو .

بیلګه ۱ :

تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوې

۱) د تابع جدول او ګراف وکاږی!

که صور د x-1 سره لنډ کړو، نو لرو :

$$f(x) = x + 1$$

د تابع "f(x) " خوزښت تر بحث لاندې ونیسیکه "x" و "1" ته نزدې شي یا همداسې که $x \to 1$.

له دواړو یانې له ګراف او جدول ځخه موږ لیکو چې f(x) د ریل عدد"1" په لور هڅیږي. نو

ځیره دې ګران
لوستونکي وباسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعریف(پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

یادونه : په پورته ډول تابع به سملاسي پسي وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

پیژند (تعریف) :
تابع $f(x)$ یوه پوله L لري ، که x د یوه ریل عدد د c په لورترلی لاړ شي،او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to c} f(x) = L$

فعالیت : ایا دا پیژند رښتیا دی، که $f(c) \neq L$ وي؟

فعالیت: که ولرو: $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بې له دې مطلق ارزښت څنګه لیکو؟

- ایا دا هغو اعداو کارولی شو، چې یو لله بل سره د شمېرنیزو نخښنو له لارې ترلي وي، یعنې چې اعداد یو له بل سره د جمعې، تفریق ... له لارې سره ترلي وي؟

فعالیت: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه وي ، څه بلل کیږي

بیلګه 2 : تابع $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ راکړ شوی

1) تابع ولیکی، بې له دې، چې سومبول "| |" وکاروی:

2) د تابع ګراف وکاږی
3) د $f(x)$ ارزښت پیدا کړی، که x له ښي لور و 1 ته نږدې شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

4) د f(x) ارزښت پيدا کړی که "x" له کيڼ لور و 1- ته نژدې شي

5) وښاياست چې تابع f(x) څو پوله ارزښتونه لري .

يادونه: که يوه تابع چې په صورت او مخرج کې داړونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفرځايونه له منځه تلی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بې تعريف ده (يا تشيا؟**functional gap**) لري.

بنوونه :

۱) تابع بې له سومبول "|" داسې ليکو:

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2) د تابع ګراف انځوروو :

که څېره ونه کښل شوه ساده ده

3) د f(x) ارزښت که x له ښي لور و 1 ته نژدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

4) د f(x) پوله ارزښت که "x" له کيڼ لور 1- ته نژدې شي، په لاندې ډول دی.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=-1$$

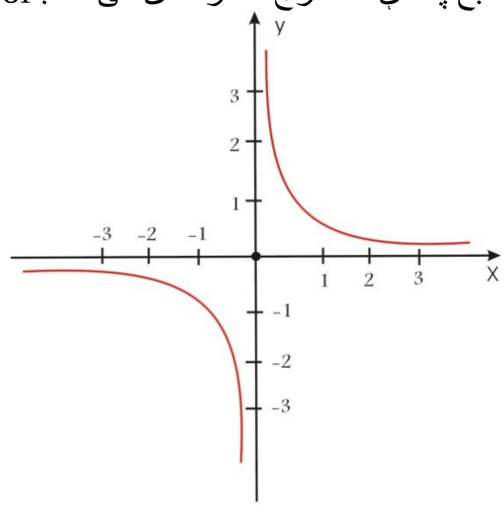
5) ګورو چې x ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (-1) ته نژدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري يعني $\lim_{x\to \pm 1} f(x)=\pm 1$ ، نو له دې امله f(x) پوله نه لري

بيلګه ۳ : تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ لرو، چې $X\neq 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ په x = 0 ځای کې تابع ارزښت نه لري یانې په کې x=0 تعریف نه ده. دا په صفرځای کې قطب(Pol) لري(۱).لاندې ځېره دې وکل شي.

(۱) یادونه : هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کی قطبPol لري.



وx=0 ته د نزدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\frac{1}{n}$ ټاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=n$ دی.

دا د n>0 لپاره یو نامحدود سعودي ترادف دی،

او د n<0 لپاره نزولي- یا متناقص ترادف دی.

دا په دې معنی، چې تابع f(x) په 0 ځای کې حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قضیه : که تابع " f(x) " همغه پوله (حد) "L" ولري که "x" له ښی یا کیڼ لورې وه "c" ته نزدې شي، نو پوله(حد) شته دی او د "L" سره برابره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حدونو خویونه یا خواص : " **Properties of Limits** "

فعالیت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کټمټ توابعو Identity function حدونه وشمیرئ

د لیمیټ خویونو څخه کار واخلئ

د پولینوم تابعو حد (پوله) پیدا کړئ

پوهیږو : په ریاضیاتو (شمیرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع(زیاتون، ضرب(ځل) وېش او زنحیرونه compositon . دلته دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = (x)$ شته، که دواړه توابع سره یوځای ګړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x^2$ او داسې نور

هڅه:د توابعو $f(x) = x, g(x) = x - 2,$ څخه کار واخلئ، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړئ

فعالیت :

ایا د یوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پیدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3\lim_{x\to 2}$$

نو دا تابع ولیکئ.

یادونه: د پورته کارونې په څیر همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتیا دی

د یوې ثابتې پوله ارزښت: که a او b ثابتې وي، نو $\lim_{x\to a} c = c$ باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کتمټ یا ایډنټیک تابعو $f(x) = I(x) = x$ لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقیقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کیږي. دا ،، ټیک داسې ده لکه،، چې $f(x) = I(x)$ و c ته نږدې شي

فعالیتونه:

1)که $f(x) = x$ ،$g(x) = 2$ وي ، نو لرو :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \quad , \quad 1) \quad \lim_{x\to 1} g(x) = 2$$

2) که وي $h(x) = f(x) + g(x)$ لرو

$$h(x) = x + 2$$

3) د$h(x)$ ګراف

رسم دې ګران لوستونکي د ځانونو لپاره وکاږي

4)

$$\longrightarrow 1 \longleftarrow$$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$$\longrightarrow 3 \longleftarrow$$

تاسو په یاد ولرئ یا ولیکئ

$\lim_{x\to 1} h(x) =$	$\lim_{x\to 1} x + 2 = 3$

او $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هڅې

۱) که $f(x) = -2$ ، $h(x) = x$ وي، پیداکړی

a) $f(x) \pm h(x)$

b) $f(x) . h(x)$

۲) وهڅیرۍ، چې د پورته توابعو د a) او b)لپاره پولې وټاکی، که x عدد3 ته نږدې شي.

۳) که $g(x) = x$ وي،نو پیداکړی $\lim_{x\to 4} 4x$.

> ۴) که $h(x) = x$ ، $f(x) = -2$ وي پیدا کړی
>
> a) $f(x) + h(x)$
>
> b) $\lim_{x\to 2}(f(x) + h(x))$
>
> c) $\lim_{x\to 2} h(x) + \lim_{x\to 2} f(x)$

بیلګه ۳ : د $g(x) = \sqrt{3-x}$ ګراف وکاږۍ او پیدا کړی

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$,　b) $\lim_{x\to -1} g(x)$;　c) $\lim_{x\to 3^-} g(x)$

حل:

دلته دې ګراف وکښل شي....

له ګراف څخه

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 1,$$

الف- په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له ګراف څخه $\lim_{x\to -1} g(x) = 2$

يادونه : $\lim_{x\to -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)} = \sqrt{0} = 0$

ګڼ دلا يل شته چې پولې شميرنه ساده کوي، مونږ. به دا لاندې بې له ثبوته ومنو که f او g توابع وي C او L او M رييل عددونه وي، داسې چې باور ولري :

نو $\lim_{x\to c} f(x) = L$, او $\lim_{x\to c} g(x) = M$,

1) $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} ((f(x) + g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c} (f-g)(x) =$

$\lim_{x\to c} ((f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c} (f.g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) . g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x) = L . M$

4) $\lim_{x\to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$; $(M\neq 0)$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(د $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x ارزښتونو لپاره چې c ته نږدې کيږي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : موږ لاندې تابع لرو:

$f(x) =$	$x^2 - 1$	$x \le 0$
	$x - 1$	$o < x < 2$
	$2x + 1$	$x \ge 2$

پیدا کړی

a) $\lim_{x\to -2} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim_{x\to 4} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$ e) $\lim_{x\to 1} f(x)$

حل :

a) $\lim_{x\to -2} (f(x) = \lim_{x\to -2} (x^2-1) = (-2)^2 - 1 = 3$

b) $\lim_{x\to 0} f(x); \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1$

$= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2-1) = -1$

حد شته او $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ دی:

c) $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} (2x+1) = 2\times 4 + 1 = 9$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$;

له ښي لور $\lim_{x\to 2^+} (2x + 1) = 2\times 2 + 1 = 5$

له کیڼ لور $\lim_{x\to 2^-} (x-1) = 2 - 1 = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله پوله (حد) نه شته

$$e)\ \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x-1) = 0$$

بیلګه: $\lim_{x\to 2} f(x)$ ، پیدا کړی، که $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ وي

حل:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= 2\lim_{x\to 2} x^2 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$2 + 5 = 7\times 4 - 3 \times= 2$$

فعالیت : که $\lim_{x\to -2} f(x) = 3$ نو پیدا کړی $\lim_{x\to -2} (f(x))^n$

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیټ ټیک داسي شمیرل کیږي، لکه د یوه فنکشن لیمیټ

بیلګه ۶ :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$ وي دې

$\lim_{x\to 3} f(x)$ ، پیدا کړی

حل : $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی

که x و 3 نزدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\times 3 + 5}{2\times 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

د راشنل- نسبتي- يا كسري فنكشنونو پولې

موږ دا لاندې د پولينومونو ويش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \ldots + b_0} \;; b_0 \neq 0$$

په پورته پولينوم ويش كې كه x=o وي، نو $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي د $b_0 \neq 0$ سره.

كه n<m وي او x ناپاى ته لاړ شي، پولينومويش صفر ته ځي

كه n>m وي او x ناپاى ته لاړ شي، د پولينوم ويش د ناپاى په لور ځي.

كه n = m وي، نو $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ لرو

پام : د نسبتي يا كسري فنكشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پيداكړو.

ددې لپاره چې د ،،ويباندو،، توابعو پولې پيداكړو، كه شته وي، نو د مختلو لارو يا متودونو څخه كار اخلو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د پولینومي توابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي x ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر ، چې د جمعې . تفریق،ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ نو د تابع خواص د $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم ویش، چې ګویاتابع ده پوله یا حد وشمېرو.

. بیلګه ۱ : پیداکړئ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$

که $x = 1,$ وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2} = \frac{(1)^2+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

)Substitue(ځاي په ځای کړو $x = 1$) که

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ نو لاس ته راځي

بیلګه ۲ : پیدا کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل : تابع په $x = 0$ کې تعریف دی، نو لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3} = \frac{0-1}{0+3} = -\frac{1}{3}$$

بیلګه ۳ ؛ پیداکړئ : $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف ده، نو لرو

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x+1} = 0 = \frac{0}{2} = \frac{1^2+1-2}{1+1} =$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله(حد) پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴ : پیداکړئ $\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل : دا چې تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف نه ده، نو پوله(حد) د تابع د حل له لارې نه شي پیداکېدی. دا کېدی شي داسې پیدا کړو، چې تابع په ضریبونو تجزیه کړو .

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2} \lim_{x\to2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)} =$$

د تابع پوله (حد) که x و 2 ته نزدې شي، دا مانا لري، چې $x \neq 2$ دی.

دا راشنل فنکشن (ګونګه؟ تابع) رالنډيږي: $(x-4)$ $\lim_{x\to2}$ او لاندې پوله لري:

$$\lim_{x\to2}(x-4) = 2-4 = -2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګور، چې تابع په $x = 16$ کې تعریف نه ده یانې $x \neq 16$.

په یاد ولرئ چې : $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$ - د $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$ + جوړه(مزدوج) دی،او بر عکس.

حل: د جوړې(مزدوج) سره یې ضرب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\times\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

$$=\lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

بیلگه ۶ : پیدا کړی $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع په $x=3$ کې تعریف نه ده ، نو مخرج او صورت د محرج په مزدوج ضربوو او لرو:

$$=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$

$$=\lim_{x\to3} -1(\sqrt{x+1}+2)\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= -(\sqrt{3+1}+2) = -4$$

بیلگه ۷ : پیداکړی $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف نه ده، نو په لاندې توگه مخ ته ځو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

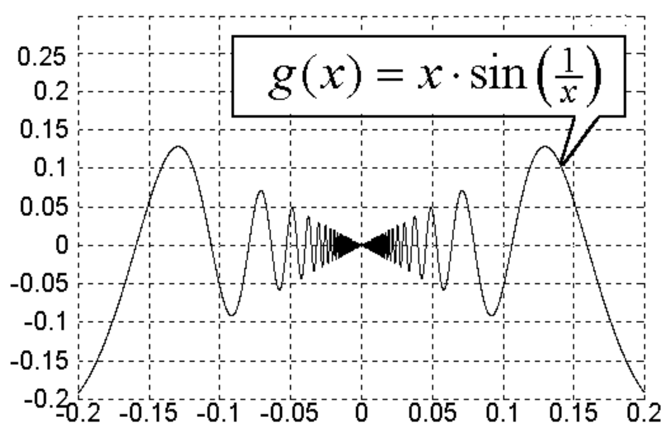
$$= \lim_{x\to 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$= \frac{10}{-2} = -5$$

د مثلثاتي توابعو پولې



بیلګه:

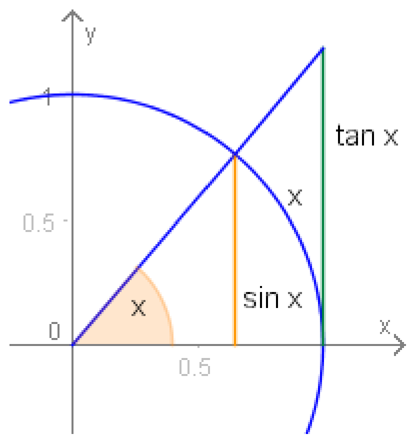
(c) ketabton.com: The Digital Library

قضيه ؛ که x په راديان ورکړ شوی وي ،
نو $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ غواړو وټاکو.

يادونه : تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ناجوړه(طاق) دی

د دې لپاره چې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ پيدا کړو، غواړو مخ له مخه لړ فکر په کار واچوو.

د ښووني لپاره ترې کار اخستلو په موخه دا مخامخ ځېړه باسو او په لاندې توګه مخ ته ځو:



په يوه انټروال $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ کې د رسم له حالته سملاسي لاندې نا برابرون يا نامسوات باور لري

$$\sin x\le x\le \tan x$$

موږ له دې سره لرو $\sin x\le x\le \frac{\sin x}{\cos x}$ او $x>0$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x}\le \frac{1}{x}\le \frac{1}{\sin x}$$

او د $\sin x$ سره ضرب (ځل) له امله لاندې نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x\le \frac{\sin x}{x}\le 1$$

د پولي ته تګ له امله لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\leq \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad , \quad 1 = \lim_{x\to +0} \cos x$$

دا په دې معنا دی، چې **غوښتونکې پوله ارزښت** 1 **دی.**

د دې ښوونې سره موږ ښی پوله ارزښت پېداکړ، د کيڼ پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته ځو او پوله ارزښت د $x < 0$ لپاره پيدا کوو، يعني له دې څخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و ليکو ، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha}$$

(4..............

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha}}$$

د مساواتو (4) + (3) څخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

بيلګه ۱ : حل کړی $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

حل : وي دې $2x = \alpha$ که $x \to 0$ نو $\alpha \to 0$ او

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2\sin 2x}{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\times 1 = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$

بیلګه ۲ : وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي ; او $x\text{->}0$ ، نو $y\text{->}0$ هم

$$\frac{5}{2}\,\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}\,\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} = \frac{\sin 5x}{5x}$$ او

$$= \frac{5}{2}\,\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو $$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\,\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}$$

$$1 = \frac{5}{2}\times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په دریګوډي ګچ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

بیلګه : وښایاست : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې $3x= \theta$، نو $x= \theta /3$ ، که $\theta \to 0$ نو $x\text{->}0$

$$\frac{\tan 3x}{x} \quad 3\,\frac{\tan\theta}{\theta} = \frac{3\tan 3x}{(3x)} =$$ له دې امله

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $3 = 3 \times 1 = 3$

بیلګه : حل کړی $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan 2x}{7x}$

حل : وي دې $2x = y$ ، نو $x = \frac{y}{2}$ دی

که $x \to 0$ وي،نو $y \to 0$ دی

له دې امله

$$\frac{5\tan 2x}{7x} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2\tan 2x}{2x}$$

$$= \frac{10}{7}\,\frac{\tan 2x}{2x}$$

$$= \frac{10}{7}\,\frac{\tan y}{y}$$

نو

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x} = \lim_{y\to 0}\frac{10}{7}\,\frac{\tan y}{y}$$

$$= \frac{10}{7}\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}$$

$$= \frac{10}{7} \times 1 = \frac{10}{7}$$

پای

وهڅیرې ، چې وښایاست:

(c) ketabton.com: The Digital Library

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

الف) تانجنت tan x د sin x او cos x په ترمونو ولیکی

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د sin x او cos x په ترمونو و لیکی

پ) پوله پیدا کړی

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولری:

$$\cos^2 x + \text{sim}^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \begin{cases}\cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 - 2\sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1\end{cases}$$

بیلګه ۵ : حل کړی $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

حل : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x$$

$$0 = 0 \times 1 \times= 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۶ : وشمیرئ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3\tan 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{3\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan}{\theta}}{3\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{4}$$

بیلگه ۷ : وشمیری ؛ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin -x}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin x}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$=2 \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 10 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x)$$

$$= 10 \times 1 \times 1 = 10$$

بيلګه ۸ : پيدا کړئ $\lim_{x\to \alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha}$

حل :

$$\lim_{x\to \alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to \alpha} \frac{2\cos 3(x+\alpha)\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2 \lim_{x\to \alpha} \cos 3(x+a) \lim_{x\to \alpha} \frac{\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\cos 6\alpha \lim_{x\to \alpha} \frac{3\sin 3(x-\alpha)}{3(x-\alpha)}$$

وي دې $x-\alpha = y,\ x \to \alpha \Rightarrow y \to 0$ نو لاس ته راځي

$$= 2\cos 6\alpha\ (3) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 6\cos 6\alpha \cdot 1 = 6\cos 6\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ : مثلثاتي کتمتوالی

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

بیلګه ۹ : حل کړئ $\lim_{x\to0}\frac{|\tan x|}{x}$

حل : $x > o$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to0^+} + \frac{\tan x}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to0^-} - \frac{\tan x}{x}$$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{x}$$

$$= -1$$

لرو $\lim_{x\to0^+}\frac{|\tan x|}{x} \neq \lim_{x\to0^-}\frac{|\tan x|}{x}$

ګورو، چې د پورته تابع پوله یا لیمیټ نه شته

ناپرېکیدنه(متمادیت)"Continuity"

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې لولو ، چې یو فنکشن یا یو تابع په یوه ټکي یا یوه اینتروال کې څنګه ځان نیسي یا کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې ټوب وهي، یا پرې کیږي او که یا په نه پرېکیدني توګه د اینتروال په دننه کې ځغلي.

د تابعو ناپرېکیدنه Continuous functions

په دې موضوع کې مورږ د د یوې تابع د ناپرېکیدنې(متمادیت) په هکله څرنه کوو او د ناپرېکیدنې یا متمادیت پیژند(تعریف) ورکوو.

// رسمه // (3) $f(x) = x^2 - 1$

// رسمه // (2) $f(x) = \frac{1}{x}$

// رسمه // (1) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

دا رسمونه دې هم ګران زده کوونکي وکاږي، زه د رسم کولو ستونځې لرم(تمرین)

b دې د تابع f په پیژندورشو یا تعریفساحه کې یو حقیقي(رییل) عدد وي. تابع f په b کې ناپرېکیدونکې (متمادي) ،بلل کیږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع $f(x) = x^2 - 1$ او تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په ټکي x=b کې ناپرېکیدونکې دي.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ په x=o کې ناپرېکیدونکې نه ده یانې پرېکیدونکې ده یا ټوپ وهي.

تابع په x=a کې پرېکیدونکې ده، که پرې شي(تشیا ولري)، ټوپ ووهي او یا ماته شي.

لرو $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په x = o کې نه شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱ :　وي دې $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \; ; & x \geq 1 \\ 1 - x \; ; & x < 1 \end{cases}$

الف) ګراف وکاږی　　　ګراف

ب) پیدا کړی $\lim_{x \to 3} f(x)$

پ) پیداکړی $\lim_{x \to 1} f(x)$

که تابع په x=3 او x=1 کې نابرېکیدونکې وي

حل :

الف) ګراف کېن لور ته کښل شوی دی

ب) $\lim_{x \to 3} f(x) = (2x + 1) = 7$

$f(3) = 7$

پ)

$$f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3 \lim_{x \to 1^+}$$

$$f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - x = 0 \lim_{x \to 1^-}$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$f(x) \neq \lim_{x \to ^-1} f(x) \lim_{x \to ^+1}$$

له دې امله تابع په $x = 3$ ناپرېکیدونکې او $x = 1$ کې پرېکیدونکې ده یا نامتمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ : وي دې $f(x) = \frac{x^3 + x}{x}; \quad x \neq 0$

$=3 \quad ;$

// رسمه // الف) فنکشن رسم کړی

ب) بحث وکړی، چې تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کې ناپرېکیدونکي ده او که نه

حل : الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	1	2	5

ب) $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x\to2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f پوله (حد) شته او $\lim_{x\to2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په $x = 2$ کې متمادي يا نه پرېکیدونکی دی

وي دې $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to0^-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دا مانا لري چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ په دې مانا دی چې $f(0) = 3$.

دا دا مانا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(o)$

تابع په $x = 0$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکدونکې(نامتمادي) ده

بیلګه ۳: **وي دې**

$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ ، $x \neq -3$

ایا تابع په $x = -3$ کې ناپرېکېدونکې ده؟

حل) تابع $f(-3)$ تعریف نه دی، له دې امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف) :

f دې یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي.

تابع f په $x = c$ کې ناپرېکیدونکی بلل کیږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

۱) $f(x)$ تعریف دی   ۲) که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي)

۳) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي ، نو تابع په وازاینتروال (a, b) کې هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۴ : وي دې $f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \leq 1$

$= 4+x \quad ; \quad x > 1$,

وګورئ، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په $x = 1$ کې f تعریف دئ

$$f(1) = 3.$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4+x) = 5$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې پرېکېدونکې (نامتمادي) ده

بیلګه ۵ : وي دې

$=2x^2 + 1 \; ; \; x < 2$

$f(x) = \quad 3 \qquad x = 2$

$=x + 3 \;\; ; \; x > 2$

د تابع $f(x)$ متمادیت په $x = 2$ کې تر بحث لاندې ونیسئ

حل : تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې تعریف ده او لرو $f(2) = 3$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 3) = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\lim_{x\to^{+}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} f(x)$$

$$\lim_{x\to^{-}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$)

دا په دې مانا دی، چې تابع په $x = 2$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

د ناپرېکیدونکو یا متمادي توابعو خویونه

فعالیت:

۱) د توابعو f او g جمع (زیاتون) پیداکړی

$$(f+g)(x) = \ldots\ldots$$

۲) د f او g توابع په x=2کې متمادي(ناپرېکیدونکي= دي، نو :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ldots\ldots.. \ \& \ \lim_{x\to a} g(x) = \ldots\ldots$$

۳) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروی

$$\lim_{x\to a} (f + g)(x) = \lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$$

$$\ldots : \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (f + g)$$

(a)

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله (f+g) په x=a کې متمادي دي.

که تابع f اوg په x=c کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په x=c کې متمادي ده

۱) د توابعو جمع $f + g$

۲) د توابعو تفريق(کمون) $f - g$

۳) د توابعو ضرب(ځل) $f.g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بيلګه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ۱) f او g په x=1 کې متمادي دي.

۲) وښيئ، چې الف) $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په x=1کې متمادي که نامتمادي دي

حل :

$$1)\ \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$\lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = 2;$ نو f په x = 1کې متمادي دئ

نوg په x = 1 کې متمادي دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم خوي وځيرئ

2) a) $\sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$

۲) الف)

$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کې متمادي ده

ب) b) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x).\ g(x)$

$= (f.g)(x)$

نو د ناپرېکيدونکو- يا متمادي توابعو ضرب (حل) په $x = 1$ کې متمادي دئ

بيلګه ۲ : وي دې

$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 3x - 2;$

وځيرئ، چې ايا $f(x).\ g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده

حل :

$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$

$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$

$f(x).\ g(x) = 3x^2 + x - 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2} f(x).\, g(x) = 3(4) + 2 -2 = 12$$

$$= \lim_{x\to 2} f(x).\ \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$= f(2)\ .\ g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې $f(x).g(x)$ متمادي دی.

په کيڼ لور بند ايتروال $[a,b]$ کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي يا ښايي، چيرته چې $f(a) \neq f(b)$. دی.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ نو ګراف له ټکي $(b, f(b))$ څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي)کرښه $y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي .

(انځور راځي)

له پورته څخه ليکلی شو:

که تابع f په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي(ناپرېکېدونکې) اوk د b او ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه يو عددc د f(a) اوf(b) ترمنځ شته داسې چې $f(c) = k$ دی

بيلګه ۳ : وي دې $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ x \in [1,2]$

وښايی، چې يو $c \in (1,2)$ شته داسې،چې $f(c) = 11$ **وي.**

حل : $f(x)$ يو پولينوم دی نو f په بند اينتروال $[1,2]$ کې متمادي دی. لرو

$$f(1) =1^3 + 4\ (1) = 5;\ f(2) = 8 + 4\ (2) = 16$$

$f(1) \neq f(2)$ او $5 < 11 < 16$

له دې امله يو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ : وي دې

$f(x) = \ 2x + 4; \ \ -1 \le x < 2$

$; \ \ 2 \le x \le 20 |x-10| \ =$

نو

الف) و ازمایی، چې تابع متمادي ده　ب) و ازمایی، چې یو $c \in (-1, 20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړی.

حل :

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2x^2 + 4 = 8$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 10 - 2 = 8$

له دې امله لرو

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 8$

$f(x) = 10 - 2 = 8$

ګورو چې تابع په $[-1, 20]$ کې متمادي دی

b) $f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$

$f(20) = |20-10| = 10 \quad \Rightarrow \ f(-1) \ne f(20)$

په دې اساس لرو　$2 < 6 < 10$

له دې امله لرو　$c \in (-1, 20): \ f(c) = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$

$= 6 \Rightarrow |x-10|$

$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$

یا $10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$

د c ارزښت دی $1, 4, 16$

بیلګه ۵ : وي دې

$f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$

وښایی چې $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته د کومې لپاره چې باور لري $f(c)=4$ او c پیداکړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي(ناپرېکېدونکی) دی

$f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$

$f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ نو موږ لرو :

تابع f متمادي ده او لرو $1 < 4 < 5$

دا په دې مانا چې $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ شته، د کوم لپاره چې $f(c) = 4$ صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د ګراف څخه څرګندیږي، چې f په ایتروال [a,b] متمادي دی ، f(a) او f(b) متضادې مخنخښې(علامې) لري، نو c د f(a) او f(b) ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د K=0 سره کم له کمه یو C د a او b ترمنځ شته، چې لاس ته ترې راځي f(c) = 0 .

دا په دې مانا چې x=c د f(x) = 0 مساواتو یو حل دی . انځور شته

بیلګه ۶ : وي دې $f(x) = x^3 + 5x - 23$

وښایی، چې تابع f د x -محور په اینتروال (2.3) کې غوڅوي.

حل : f پولینومتابع ده ، نو f په اینتروال کې [2,3] متمادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

اود متضادو مخنخښو(عالمو) سره $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د $c \in (2,3)$ لرو چې $f(c) = 0$ دی

د څپرکي ټولګه " Chapter Summary "

پیژند: تابع f(x) یو حد L لري، کهx ترلیي یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. دا په دې معني چې د f(x) لپاره، چې ترلی و L ته ځي دا دی، چې x ترلیclose to و c ته لاړشي او داسې یې لیکو : $\lim_{x \to c} f(x) = L$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قصيه : که f(x) همغه پوله ارزښت L ولري ،که x د ښى يا کيڼي لور و c ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د L سره برابر دى.

د پوله ارزښت يا حد خويونه :

که f او g توابع وي، c;L او M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x\to c} f(x)=L$

او $\lim_{x\to c} g(x)=M$ ، نو لاندې لرو:

$$1)\ \lim_{x\to c}(f+g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)=L+M$$

$$2)\ \lim_{x\to c}(f-g)(x)=\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)=L-M$$

$$3)\ \lim_{x\to c}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c} g(x)=L\cdot M$$

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M};\ (M\neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$$

(د $f(x)\geq 0$ او د x د ټولو ارزښتونو لپاره ، چې c ته ور نزدې کيږي.

قضيه : که x په راديان ورکړ شوى وي، نو لرو : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

قضيه : که x په راديان ورکړ شوى وي، نو لر: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

پيژند : f دې يو تابع وي، چې د ټولو x لپاره په يو واز انتروال کې چې x = c ولري ،تعريف وى، نو وايو چې f په x = c کې متمادي، د لاندې شرايطو لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1) f (x) تعریف دی 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دی

3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټول $x \in (a, b)$ لپارره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b (کې متمادي ده.

پېژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال [a, b]کې متمادي ده، که تابع له ښي لور په x = a ې متمادي وي او له کیڼ لور په x = b کې او د واز انتروال (a, b) په هر ارزښت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه : که f او g په x = c کې متمادي وي، نو دا لاندې توابع هر یو په x = c کې متمادي دی.

اول) د جمعي f+g تابع

دویم) د تفریق f-g تابع

دریم) د ضرب f.g تابع

څلورم) د ویش تابع

د منځني ارزښت قضیه: که تابع f په بند انتروال [a,b]کې متمادي وي او k د f(a) او f(b)ترمنځ یو عدد وي، نو کم له کمه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

ترنه

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت (حد)

اول : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ۵ وېشنه په يوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي يانې □□ .

گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نزدې کيږي.

دويم :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\mp}$$

د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي يانې □□ .

گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نزدې کيږي.

دريم :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x^2 - 2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^{+}$$

په مخرج کې فقط x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت کيږي.که ۵ په يوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو يو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، يانې
گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط له پورته لور ور نزدې کېدنې سره .

څلورم :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{x^2 - 2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^{-}$$

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت ميږي.. د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت عدد باندې يو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي يانې □ -.

گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط کښته گراف ته ور نزدې کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرېښودنې - یا ترې صرفنظر کونې اصول

اول :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\quad\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$$

په صورت کې د x توانونه، په مخرج کې د x^2 توانه په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي.
که ۱ په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد ووېشل شي. نو □□ ترې لاس ته راځي.

څېره G_f پروت اسیمپتوت(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\quad\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

- په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیونو او له ټولو ثابتو تریږو (صرفدظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول پوله ارزښتونه □□ لاس ته راځي.

څېره G_f مایله اسیمپتوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\quad\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

په صورته او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تېرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولې پولې په روښانه توګه -2/3 راکوي.

څیره G_f پرته اسیمپتوت راکوي ، چې $y=-2/3$ ده.

خلورم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

په صورت کې د x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو (صرف دظر پرې کوو) . که په ووېشل شي ، نو یو کوچنې مثبت یا منفي عدد یاني $0^{\mp}$ ترې لاس ته راځي.

څېره G_f یو پروت اسیمتوت $y = 0$ لري،چې له پورته او کښته لور ورنزدې کیږي.

شمیرنیز حلونه

دویم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(قوسونو) راوستني او بیا د x^2 سرره لنډوني وروسته مخرچ د ۱ په لور ځي او صورت د $+\infty$ په لور ، نو

ترمونه $2/x$ او $1 / x$ و صفر ته نزدې کیږي.

څیره G_f یوه مایله اسیومپتوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لویه ده.

دریم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}$$

- که x^2 له نوکانو راووېستل شي او بيا لنډ شي،نو صورت د صفر په لور ځي يا صفر ته نزدي کيږي;مخرج ,۱ ته نزدې کيږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخنخښه ټاکي.

خېړه پرته اسيمپتوت لري له پورته او کښته نزدې کيدنې سره.

ځلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x يعنې x^4 له نوکانو دباندې نيسو او بيا په ترتيب شمېرنيزه عمليه مخ ته بياوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټوليز خويونه :

او ل : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\qquad \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته بیلګه کې داسې مخ ته تللي ي،چې په صورت کې له ټولو عددونو تېرېږو، چې د خپلواکې متحولې توان له ۱ کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو۲ څخه کوچنې توان څخه تېرېږو. ګورو، چې په صورت کې پاتېکیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناباې په لور ځي.

دویم : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \qquad 0^{\pm}$

په پورته بېلګه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو، چې لاس ته رانه یې یو یې د یوه ثابت عدد وېشل وي په x . چې د x سره تابع و $0^{\pm}$ ته ځي.

بیلګه ۳ : لرو : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له 2x څخه تېرېږو او د x^2 سره لنډوني وروسته د x^2 سره لنډیږي او په دې ډول لاندې پایله لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= -\frac{2}{3}$$

بیلګه ۴ : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= \qquad 0^{-}$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تېرېږو او بیا له لنډوني وروسته یو ثابت عدد په ناپای وېشل کیږي، چې پایله یې 0^{-} دی، یعنې لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= 0^{-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹ . ۵ تمرينونه

۱ . د بلواکو پولی

۱ . ۱ لاندې پولې وټاکي

1.1.1. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

1.1.2. a) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{1+x}$ d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{32+x^5}$

1.1.3. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

1.1.4. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

1.1.5. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\dfrac{\cos x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$

l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1-\tan x}$

۱.۲ په ورکړشوو ځایونو کی د لاندي بلواکو کینې او ښی پولې وټاکې

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

b) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$ für $x = 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ für $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ für $x = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

g) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ für $x = 1$

h) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2}$ für $x = 0$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ für $x = 1$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x = -1$

l) $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}\, x$ für $x = -1$

۲ . ناپریکیدونکی بلواك : لاندي بلواك د کوم لپاره پریکیدونکی ځایونه لري، دا د کوم ډول دی او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ لکیدی شي.

a) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $y = \dfrac{x+2}{|x+2|} \cdot x$

c) $y = \dfrac{1-x}{1-|x|}$

d) $y = \dfrac{x+2}{x+2} + \dfrac{1}{x+1}$

e) $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x}-2}$

f) $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

g) $y = \sin\dfrac{1}{x}$

h) $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

i) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

j) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

k) $y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$

l) $y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰ . مشتقشمیرنه(رابیلیدنه)

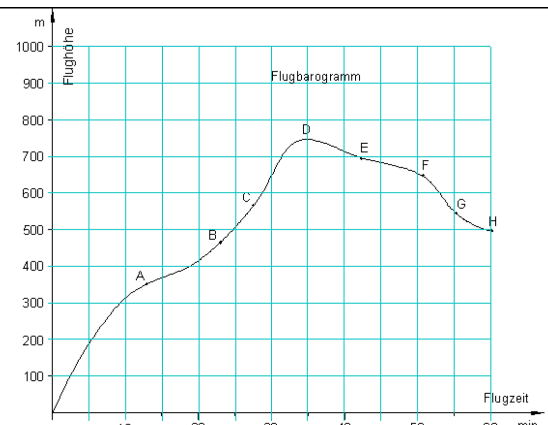
II.1.د تابع تغیر منځ ارزښت (منځنی قیمت) Average rate of change

دکتاب په دې برخه کې مونږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو ، تر څېړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېر راوړم:

که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږیږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی ، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګېدنه)

په الوتکوکې د الوتنېدلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پېنتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

-ایا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالی زیات دی؟

-ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

-ایا د یوې کرښې او منحني جګوالی هرچېرته توپیر لري او که نه ؟

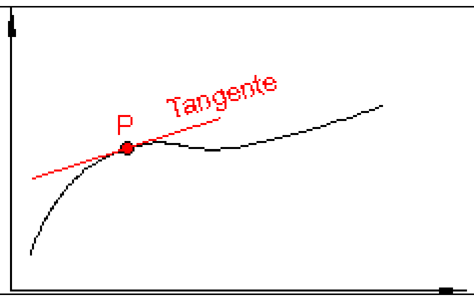
لاس ته راوړنه :

۱ ـ ګورو، چې په یوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچېرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په ګوته کړو، چې هلته میل څېړل کیږي.

۲ ـ په لاندې بیلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده)کرښې میل هرچېرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جګوالي څخه غږیږو.

بریښي چې لاندې پېژند یا تعریف عاقلانه دی:

پیژند (تعریف): د یوې تابع ګراف میل (جګوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د ګراف سره برابر دی



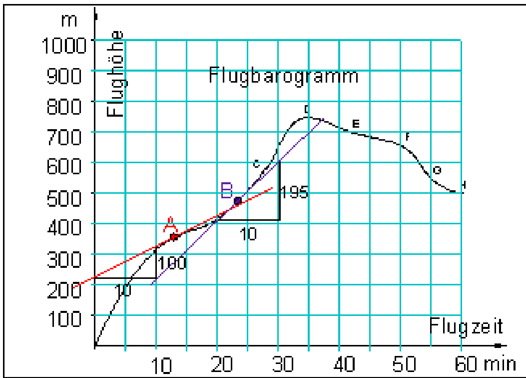
لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپېریال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کیږي.

ددې پېژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه ګراف میل د یوې کرښې میل دی.

د ګراف د جګیدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځورو، چې ګراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جګیدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل یا ساده ډول شمیرل کېدی شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د A په ټکي کي جګيدنه :

$$\frac{100\ m}{10\ min} = 10\ \frac{m}{min}$$

د B په ټکي کي جګيدنه :

$$\frac{195\ m}{10\ min} = 19,5\ \frac{m}{min}$$

زموږ د بيلګي لپاره ميل يا جګيدنه په يوه ټاکلي ټکي کي د لحظوي (سملاسي) ميل د چټکتيا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې $12,5\ min$ ، د ميل ياجګيدني چټکتيا(سرعت) نږدې $10\frac{m}{min}$ ده

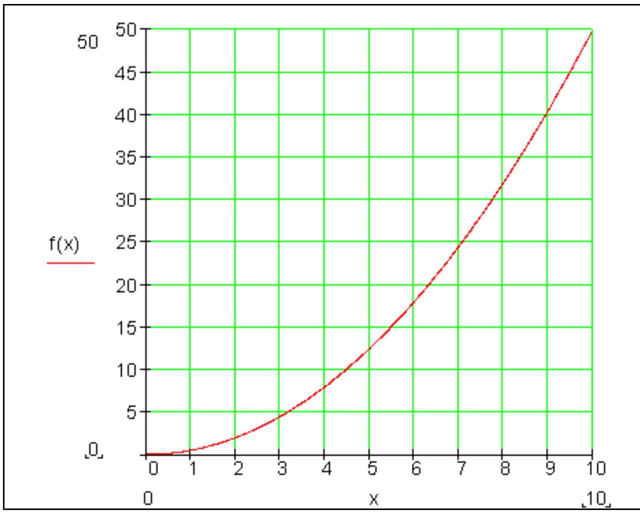
د B په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې $23,0\ min$ ، د جګيدني چټکتيا(سرعت) نږدې $19,5\frac{m}{min}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د ليدني له مخې تعريف شوی ، چې د لمستکي چاپيريال ته خورا ډېر نږدې کيږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف ميل د A اوB په ټکو کې هم يواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

II.2 په يوه ټکي کې د تابع دګراف ميل (جګيدنه):

معلومه ده ، چې يو ريلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتيا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زياتوي.وهلې لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زياتيږي. د تمځای څخه لريوالی د چټکتيا يا سرعت په واک کې ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلى شو.

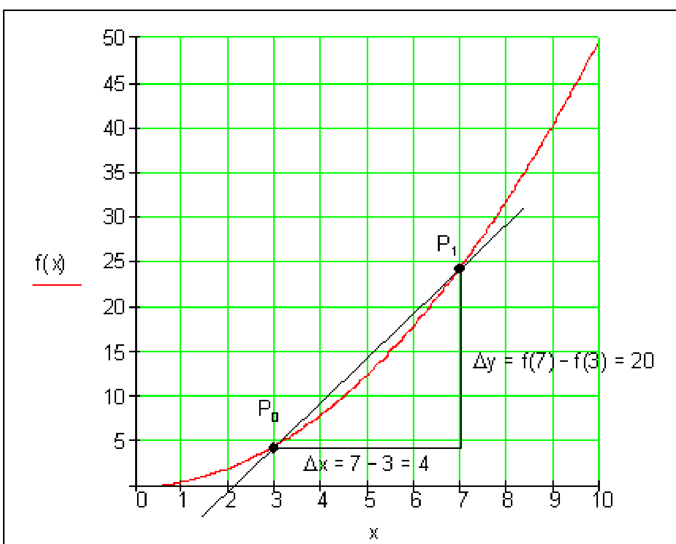
دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ليکو

$s = f(x) = 0,5x^2$

مخامخ : د تابع ګراف

اوس بايد منځنى ارزښت(منځنى چګوالى) Averagerat of change د ۳ ـمې او ۷ ـمې ثانيى ترمنځ وشمېرل شي.

ددې لپاره اړونده سيکانت انځوروو او د هغې چګوالى شميرو.



اوس دې د تغير ارزښت (منځنى چګوالى) د ۳ ـمې او ۴ ـمې ثانيو ترمنځ وشميرل شي.

په دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا چګوالى څومره دى؟

د منځنى چګوالي داسې مخ ته بوزى، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمځ واټن تل کوچنى شي،داسې چې ټکى P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزيږي.

د ۳ ـمې او ۷ـمې دقيقي ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{24,5 - 4,5}{7 - 3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳ ـمې او ۴ ـمې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{8 - 4,5}{4 - 3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنږدې کیدنې شمیرنه

$\text{Intervall } [3; x]$	$[3; 4]$	$[3; 3,1]$	$[3; 3,01]$	$[3; 3,001]$
$\Delta x = x - 3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x) - f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګووته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنزدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګېدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنزدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.
که موږ فیزیکي لویي (واحدونه) په خپله بېلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دئ

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

II.3 د لحضوي(د سترګو رپ) تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3;\Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت جګوالی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5\cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9+6\Delta x+(\Delta x)^2\right]-0,5\cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5\cdot 9+3\Delta x+0,5(\Delta x)^2-0,5\cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3+0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3+0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي ($\Delta x \to 0$)، نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور ري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$$

II.4کمښت ویش(د تفاضل(؟) ویش) Difference quotient

په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو.

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي:

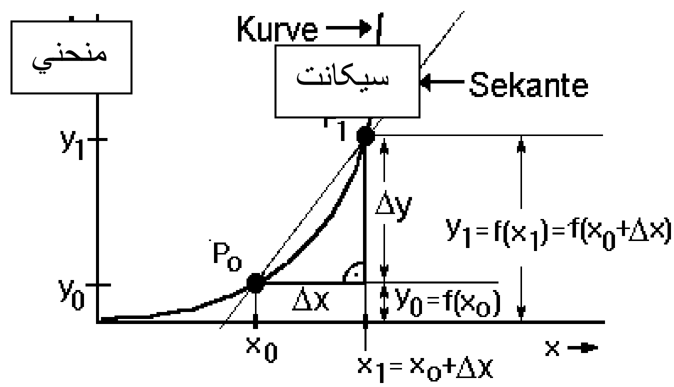
کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seconce) پيژند : قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي(لاندې څېړه وګورئ)



پایله : د قاطع(غوڅووني‌secant) میل یا جګیدنه(جګوالی): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو ،،میل (جګوالی) ،، یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

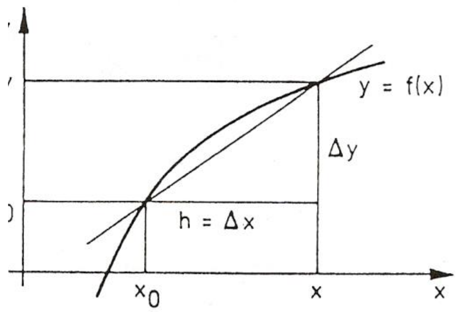
$$m_s=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_S=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پيژند(تعریف)

د $y=f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څېره دې وکتل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پیژند لپاره خیره

نو د تفاضل – یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمېرنه ده. دا ټکي د x – محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

بیلګه:

د $y=f(x)=3x^2-5x+4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

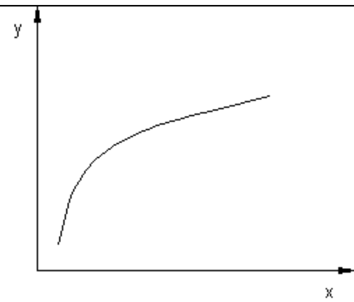
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}$$
$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}$$
$$=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}$$
$$=6x+3h-5$$

II .2 مشتق Diffrentialquotient

(c) ketabton.com: The Digital Library

II.2.1 د غوڅوونې(تقاطع) ځګوالي ښخه و د تانجنت ځګوالي یا ځګیدنې ته

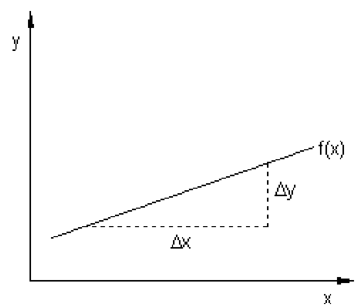
یو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.



که د تابع ځګیدنې حالت په پام کې ونیسو ،نو ګورو چې د تابع ځګیدنه په نزدې ټولو ټکو کې توپیر لري.

یوه ثابته ځګیدنه، لکه په لانیز تابع ا $f(x) = a_1x + a_0$ کې د

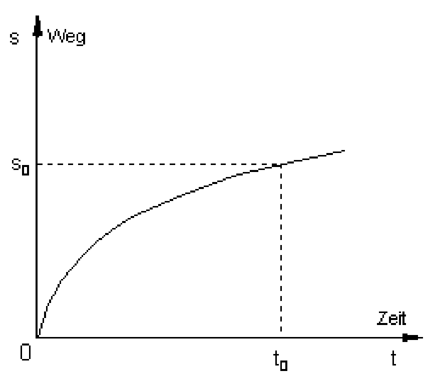
$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konstant}$$



په زیاتو وختونو اړیینه ده ، چې د تغیرحالت(د ځګیدنې حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړو.

نو له دې امله لحظوی چټکتیا(همغه وختیزه – یا سملاسي) $v(t_0)$ په لار-وخت دیاګرام کې وڅیړو.

د مشتقشمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي.

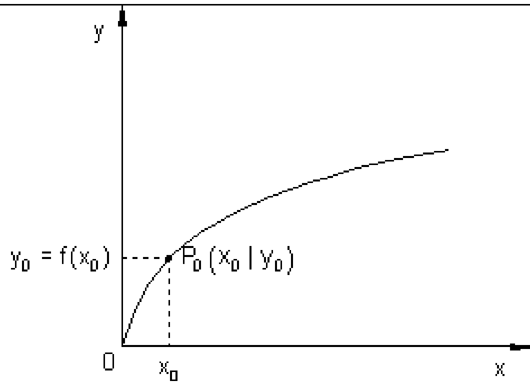


$t_0 \triangleq$	په پام کې نیولی سترګو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترګو رپ پورې وهلې لار

د یوه تابع د ځګېدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نیونه بلل کیږي.

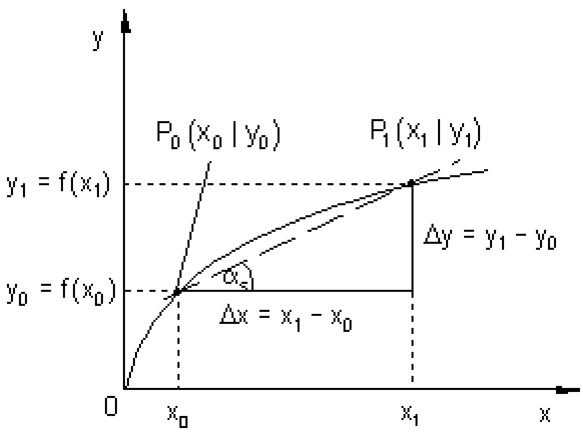
(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تابع $y = f(x)$ او د هغه ګراف دې ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کې ورکړ شوی وي. ددې جګوالی پيداکړی شي.



ددې پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته ځو، چې لومړی جګوالی په نزدې توګه (تقريبي) پيدا کوو.

ددې لپاره يو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0 ټکي په نزدې کې ټاکو.



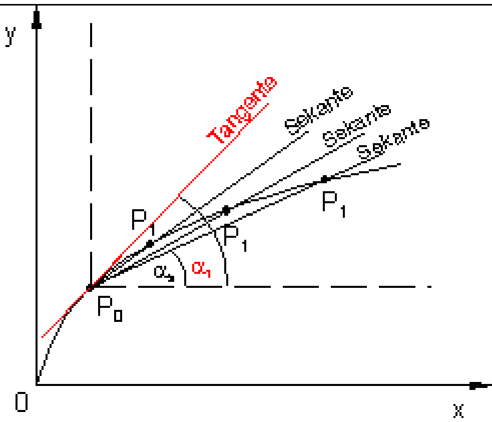
کرښه، چې دواړه ټکي سره تړي ،يعني سيکانت، يو جګوالی ښايي، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی جګوالی،، په ګوته کوي.

$$\tan \alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$\alpha_s \triangleq$	د سيکانت د جګېدو کونج
$a_s \triangleq$	د سيکانت د جګېدوضريب

دا د جګواليمثلث له لارې ټاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نږدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنږدې کړو، نو د پولي حالت په څېر یوه کرښه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي. د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.	 α_t = د تانجنت د جګوالي (میلان -) کونج a_t = د تنجنت د جګوالي ضریب
داحالت یا تلنلار کیدی شي د ریاضي له لارې د پوله ارزښت په څېر افاده شي.	$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t$ $\lim_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$

II.2.2.کمبنتویش او مشتق Diference quotient and diferentialquotien

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ارزښت)

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات بنی خوا ځای په ځای کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

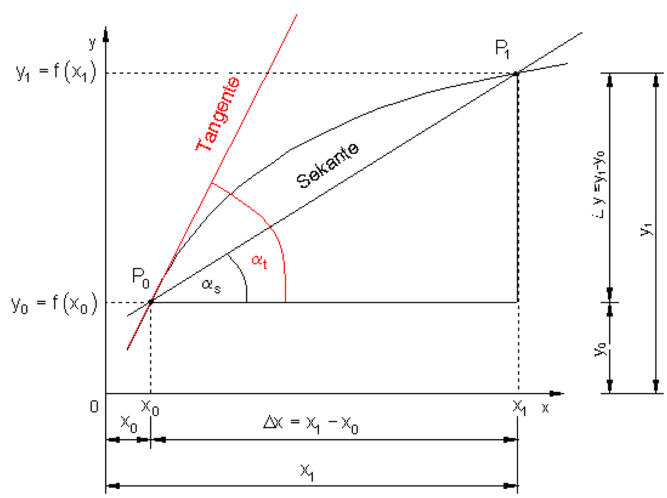
د تنجنت جګېدني سره د حد (پوله ارزښت) له لاري لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق يا لحظوي – يا د سترګو رپ تغير ارزښت دی

يا لنډ:

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient تر څېرنې لاندې نيسو:

د يوې کرښې ميل يا جګيدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکيدی شي.

کرښه $y=f(x)=mx+a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

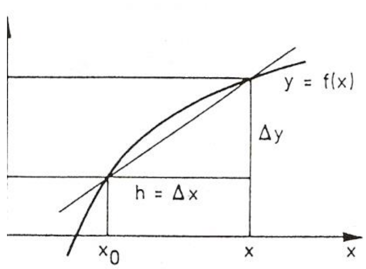
II.6 د غوڅوونې(قاطع seconce) پیژند:

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

پایله: د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

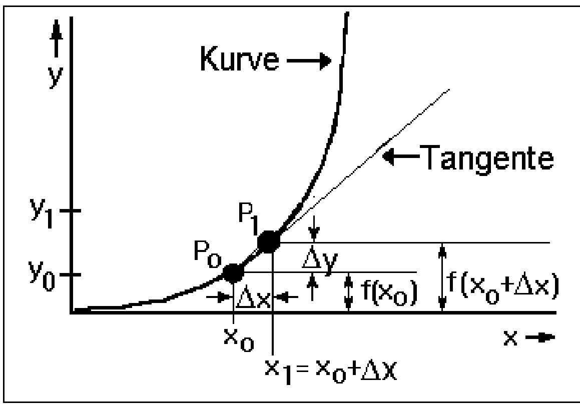
په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پېژند(تعریف): د $y=f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ $=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	د پیژند لپاره څیره 

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f تابع غوځي میل لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو وېش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.
د یوه تابع د میل یا ځګیدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نیونه بلل کیږي.



مشتق شمیرنه = د یوې منحني میل
Differential caculation)

تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.

پایله : د تانجنت ځګیدنه : د تانجنت ځګېدنه د قاطع د ځګېدنې ،،حد ،،دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivativeکلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو : derivative د رابیلیدنې په مانا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو،چې همدا معنا لرییعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعریف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وېش) x- > x0 او(همداسې)⇔ (x->0او یا په (همدې ډول⇔
h- > 0 لپاره یو حد ولري , نو د y = f(x) تابع د $x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري اود دې لپاره لیکو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};...$$

دا حد یا پوله داسې ښایو

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{x=x_0} = f'(x);$$

د x_0 ځاي کی د $y = f(x)$ تابع له مشتق(Derivativ, یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بېلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوښ په لاندې ډول دی:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x)+2)-(x_0^2-3x_0+2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-3x_0-3\Delta x+2-x_0^2+3x_0-2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0+\Delta x-3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0+\Delta x-3) = 2x_0-3.$$

د دې لپاره دا لاندې پېژند ورکوو:

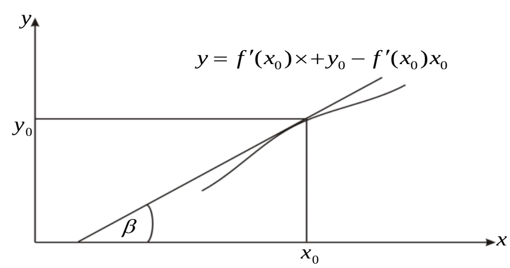
(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند 2:

که يو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړوي، نو هغه لاندنۍ کرښه چی د (x_0, y_0) ټکي څخه تيريږي او ميل يا جګوالی يې $f'(x) = \tan\beta$ دیپه لاندي ډول ليکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0, y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني $y = f(x)$ تانجنت بلل کيږي(پرتله مخامخ شکل)



موږ اوس د څو بنسټيزو توابعو مشتق شميرنه تر څيړنې لاندې نيسو.

بيلګه ۱:

د يوې ثابتي مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت يې يوثابت دی
ثابت $y = f(x) = c = Const$

نو د هر x_0ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = f'(x_0) = 0$$

بيلګه ۲:

يوه $f(x)=x$ خطي(کرښيزه)تابع لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ : د $y=f(x)=c.u(x)$ دوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضرب شوی وي. یعنې

له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

$$f(x_0)=c\,u(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

پیژند (تعریف): دفرنخیالوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

Der Differentialquotient $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$

heißt Ableitung der Funktion f (x) an der Stelle x_0

د x_0 په ځای کې د تابع f(x) مشتق یا رابیلیدنه بل کیږي

تعریف (پیژند): د تابع لومړی مشتق یا رابېلېدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګېدنه ورکوي، چې د تابع ګراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګېدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جګېدنه هم بولي.

تانجنتجګېدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

Tangentensteigung in $P_0(x_0 \mid y_0)$

$$a_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بېلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.
غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$	$x = x_0:$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

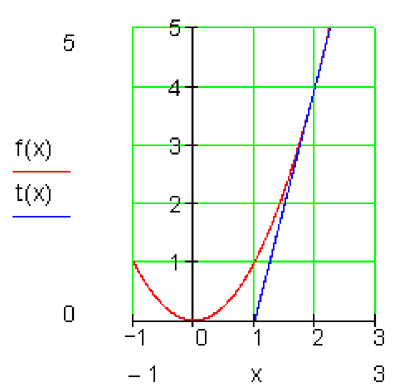
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د $x_0=2$ په ځای کې د تابع $y=f(x)=x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0=2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

پایله یې کېدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسي ډول چې د $P_0(x_0|y_0)=P_0(2|4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګېدنه لاس ته راوړو.



لکه پورته بېلګه کې: $y=f(x)=x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

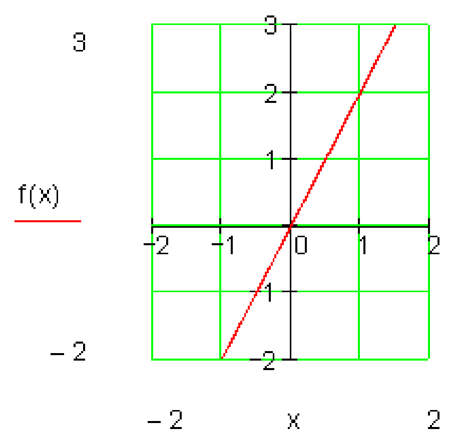
$$y=f(x)=x^2\ \Rightarrow\ f'(x_0)=2x_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	2

ګراف يوه کرښه $f'(x)=2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کيږي:
پام: که د يوې تابع مشتق ونيول شي، نو بيرته يوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکيږي.

د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنست تابع انځوروي، له دې امله دا د ميل تابع هم بلل کيږي.



بيلګه: د $f(x)=x^3$ تابع دې وركړ شوی دی.

فعاليت: ګران لوستونکي دې د $f(x)=x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

مونږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پيدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

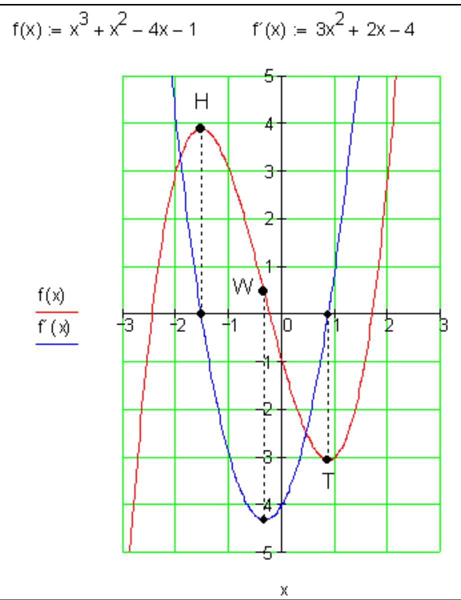
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $f'(x_0)=3x_0^2$

د وضعیه کمیاتو – یا پروتولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق: مخامخ ځیره وګورئ: تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$ د تابع مشتق(شین رنګه): $f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چې بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.	

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیداکړئ او د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ده

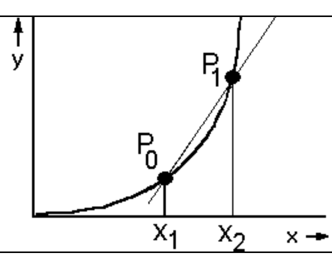
د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

	د مشتق تابع	تابع
$f'(x)=1\cdot x^0$	$f'(x)=1$	$f(x)=x$
$f'(x)=2\cdot x^1$	$f'(x)=2\cdot x$	$f(x)=x^2$
$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f(x)=x^3$
$f'(x)=-x^{-2}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$
$f'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

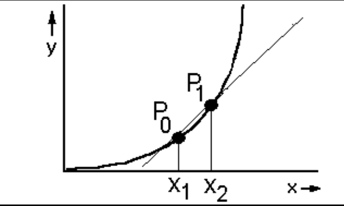
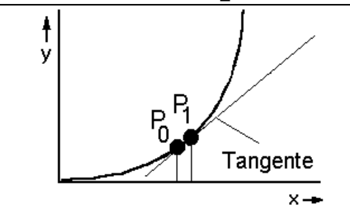
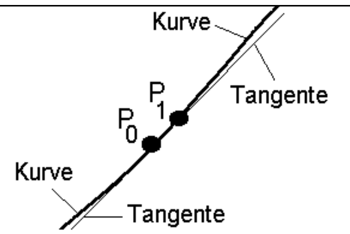
که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو ګومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري.

بیلګه: $f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}\Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$

د تانجنت تعریف او خویونه:

<table>
<tr>
<td>مخامخ ځېږه یو منحني او یوه قاتع په ټکو P_0 او P_1 کې ښایي.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

	اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1په لور و خوځيږي. پام : ددې سره قاطع خپل میل تغیروي
	بالاخره غواړو، چېP_1 ټکی وP_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي
	چې دا پوره وپېژندلی شو د ټکو P_1 اوP_0 په شاو خواْزوو یا لويه وو: که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.

د دې خويونو غوره غوره والی یا لاس ته راوړنه(پايله):
ومو ليدل، چې د تانجنت میل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني میل هم دی. له دې دا پايله لرو، چې که څوک غواړي د منحني میل په P_0 ټکي پیدا کړي، بسیا کوی، چې د تانجنت جګوالی یا میل په P_0 ټکي کې پیدا کړي.

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پيل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په$P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: :

د   سره ليکو:

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت يو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)\cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 = f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېړه لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad ,P(2,f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځاي کې دا لاندې لرو:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2)+3 = x-2+3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \;\;,\;\; P(2\,|\,f(2))$$

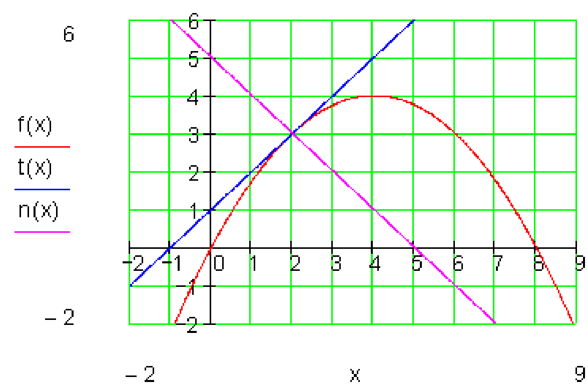
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2)+3 = -x+2+3 = \underline{\underline{-x+5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرئ ټکی دی:

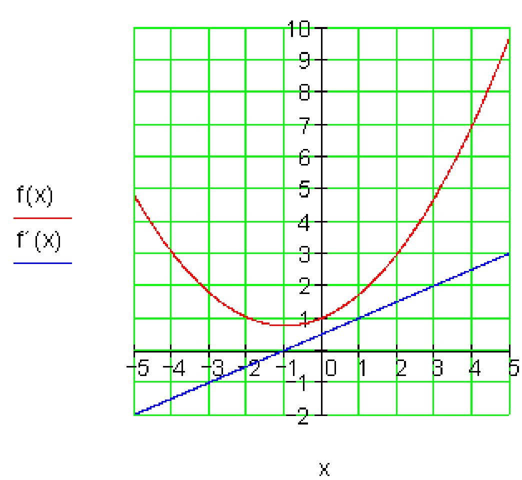
$S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرئ ټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعنې د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ $f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه: تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$

تانجنت دې پيداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

لاس ته راوړنه(پايله):

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګيدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګيدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

په بيديا کې جګوالی **Steigungen in der Landschaft**

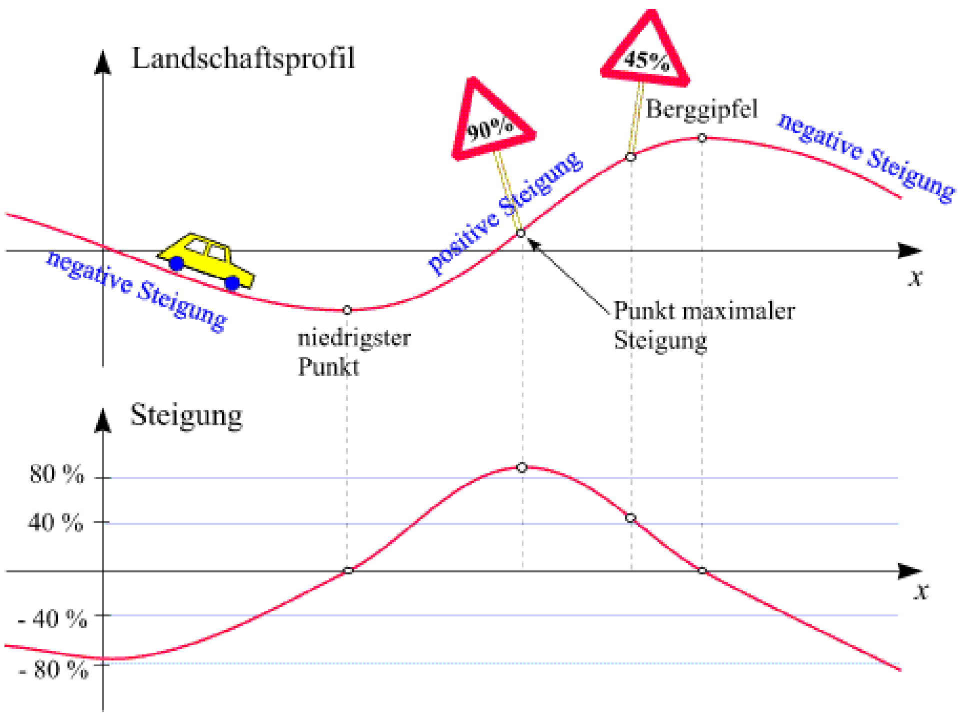
لاندې د د تابع ګراف د سرک په څير په فکر کې راولو، چې په بيديا کې جګ او ټيټيږي يا

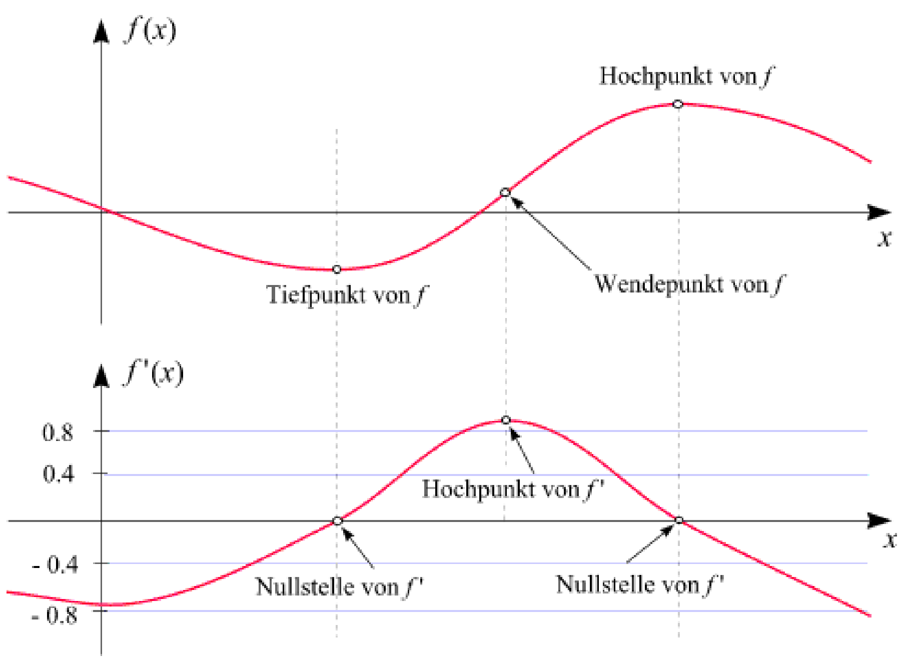
کښتپورته ځغلي، نو په ښه توګه يې رسمولی شو، چې د ګراف خويونه د مشتق سره په اړيکو کې راځي:

دپورته څيرو پښتو: له کيڼ لور کښته ښي لور ته: بيديا يا کرونده، منفي جګوالی، جګوالی،(بله کرښه) خورا ټيټ ټکی،(شي لورته بله کرښه(مثبته جګيدنه، (پسې کرښه) د غره څوکه، د خورا جګې جګيدنې ټکی، (اخره(کميز يا منفي جګيدنه.

د سرک کښته يا لاندې لور ته د ځانګړي دياګرام سره د سرک جګيدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې يوه دويمه منحني ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library





(c) ketabton.com: The Digital Library

دپورته پښتو: له پورته کښته له کيڼ وښي لور ته: د f جګ ټکی، د f ټيټ ټکی، د f اوړونټکی يا د انعطاف ټکی، د f' جګ ټکی، د f' صفرځای، د f' صفرځای.

دياګرامونه په کره توره وګوری او وهڅيږئ، چې د دويمې منحني خويونه د لومړی منحني له خويونو را برسيره کړی.
چيرته چې سرک خورا ټيټ ټکی لري، هلته د جګيدني ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځايه تيرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توره که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.دا ټيک هغه ټکي دي، د کومو په چاپيريال کې چې منفي او مثبته جګيدنه يوبل سره رابندوي يا پولې لري.

د دې په منځ کې يو چيرته يو ټکی شتون لري، چې هلته جګيدنه ماکزيمال يا خورا لويه ده (په دې بيلګه کې 90%) .

همدې ته ورته په دويمه منحني (کږې) کې يو ه څوکه لري، مګر دا په دې بيديا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو يوه د ،،جګيدنې څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې يا منحني په ورسره بلده يا معمول رياضيکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دويمه منحني يا کږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بيا هم ټيک وګوری او وهڅdېری، چې وپوهdږی، چې دا په هره برخه کې يو د بل سره څنګه اړيکي لري.

د f(x) ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په يوه کې f(x) مينيمال (خورا ټيټ ټکی) په بل کې f(x) ماکسيمال (خورا جګ ټکی) دی.

په دې ځايونو کې f(x) صفرځايونه لري.

هغه ټکی چې هلته د f(x) ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی يا اوړونټکی بلل کيږي.

دا چې په دې ټکي کې د f(x) مشتق خورا جګ دی (په دې بيلګه کې 0,9)، دا د(f'(x عظمې نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني ښخه ښه ځرکندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

موږ د دې بیلګې ښخه همدا اوس اټکل کولای شو یا ګومان راوړی شو:
که یوه تابع $f(x)$ ولرو، نو د دې $f(x)$ تابع په هکله د $f(x)$ له مشتق ښخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.
دا موږته د ماکسیما او مینیما په هکله (چې دا دواړه د افراتي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

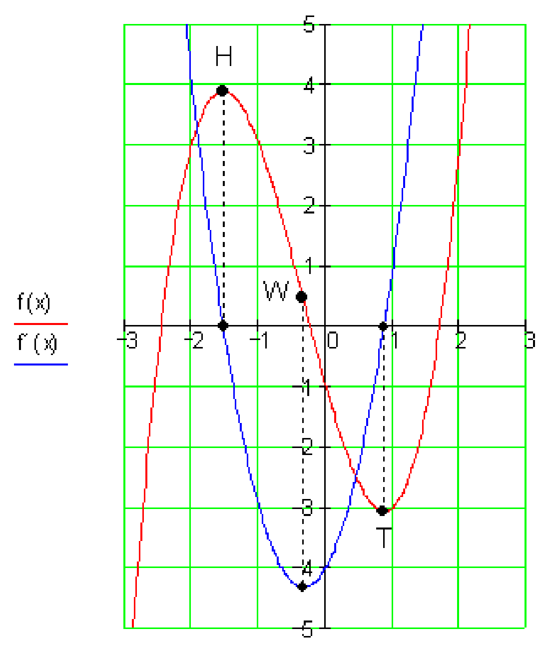
په کواوردینات (یوه پروت -ولاړ)- سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع او یا د ځګیدني (میلان) تابع بولو

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوارِو توابعو ګراف په یوه قیمتي وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) یو جګ ټکی (H) همداسې ټیټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوځوي،په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګښدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مینیموم لري، چېرته چې د(f(x جګښدنه د H او T ترمنځ په پام ونیول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

II.3.د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعې یا زیاتون قاعده یا لار):
که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، یعنې:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0 + \Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

بیلګه:
د دې ورکړ $f(x) = 5x^2 + 3x$, $u(x) = 5x^2$, $v(x) = 3x$ توابعو شتق وشمیرئ.
ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعي قاعدې تولیزه کونه:

که چیرې f_1، f_2،...... ،f_n توابع او k_1، k_2،.... ،k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي، یعنې که د دواړو لورو لیمیت نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د ویش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړی لار:

لومړی لار یا طریقه یې په لاندې ډول ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

دويمه لار: د $\frac{1}{g(x)}$: مشتق غواړو پيدا کړو او ښايوچي دی:

$$(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\qquad (*)\ (f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کيږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ وېش ولرو او وغواړو چې مشتق يې پيدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د (*) اړيکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}) + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

بیلګه:

د $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چیرې $g(x)=x^2$ او $h(x)=x^2-4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x)=2x$$

$$h'(x)=2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د ویش قانون له مخي لرو:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$=\frac{2x(x^2-4)-x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$=\frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

بیلګه:

د $y=\sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځیري تابع ده:

$$y=\sin z \quad , \quad z=x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق ورډي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx}=\frac{d\sin z}{dz}.\frac{dx^2}{dx}=\cos z.2x=2x.\cos x^2$$

بیلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول ترلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \ , \ z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx}=\frac{dz^2}{dz}.\frac{d\sin x}{dx}=2z.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمیرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7$ $h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعګانو مشتق

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ II$$

قضیه :د ساین تابع y=f(x)=sinx مشتق غواړو وښایوو چې
f'(x)=(sinx)' = cosxدی:

ددې قضیې د ښوولو له پاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د y=f(x)=sinx ساین تابع د هر x لپاره تعریف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوځخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}=\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \ .$$

د لیمیټ د برخې په پام کې لرلو سره لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\cos x_0.$$

د ساین تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\cos x_0\,,$$ (Xپه لینده کچ یا رادیان)

قضیه :

همداسي بنوول کیږي چی کوساین تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=-\sin x_0,$$ Xپه لینده کچ یا رادیان

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کي د دویم فرمول له مخې لرو:

$$=\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$=\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\ \frac{h}{2}}{h}$$

$$=-[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

قضیه : غواړو وښایو چې د تانجنت تابع $f(x) = \tan x$ مشتقوړ ده او د مشتق تابع یې $f\,'(x)=\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})$$

$$=\frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=1+\tan^2 x\ ,x\neq(2k+1).\frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غواړو د $y=\cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ږدو : $f(x)=\cos x$ او $g(x)=\frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندي توګه لیکلی شو:

$y=f(g(x))$ ، نو د زنځیري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x)) \cdot (\frac{\pi}{180} \cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin\frac{\pi x}{180}$$

بیلګي :

۱ - د $f(x) = \sin x$ تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

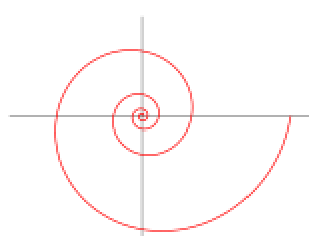
$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$

۲ - د $f(x) = x.\sin x$ تابع مشتق پیداکړئ
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
$f'(x) = 1.\sin x + x\cos x = \sin x + x.\cos x$

۳ – د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پیداکولو له پاره د ځنځیر قونو ن څخه نار اخلو.

ږدو $z = \frac{1}{x^2}$ او $u(z) = \sin z$ لا س ته راځي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

د لوګاریتم مشتق



(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه :

د لوګاریتم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یوائې د$x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړئ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$ پای.

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$
$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

مورږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$
$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2$
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$
پای

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غیر مستقیم خوندې یا په بل عبارت دننه ده.

موږ غواړو د لاندې شکل تابع یا بلواك مشتق ونیسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیرقاعدې له مخې ترځیرني نیول کیدی شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د
لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخې را پیداکیدی شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله 20-10 که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو
$y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دي

بیلګه : تابع یا بلواك $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره مشتقوړ دی. دا دې په (57-20) کې داسی $f = x,\ g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$. له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو: $dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$

(دا وروسته د ایمپلیځیت توابعو مشتق کې هم په همغه توګه رواړول شوې ده)

بیلګه: د $y = (x^2 - 1)\ln x$ د مشتق سره باید د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x > 0$ او د $f = (x^2 - 1) > 0$ له امله باید باور ولري $x^2 > 1$ او له همدې امله $|x| > 1$
پس کیدی شي چې فرمول(57-20) د $x > 1$ لپاره د $f = x_2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

بیلګه: د $f(x) = x^3.\ln 4x (x > 0)$ مشتق دې پیدا شي

د $u(x) = x^3$ د $u'(x) = 3x^2$ سره، $v(x) = \ln 4x$ د ځنځیري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4.\frac{1}{4x}\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2.\ln 4x + x^3.\frac{1}{x} = 3x^2.\ln 4x + x^2 = x^2(3\ln 4x + 1)$$

بیلګه: د $f(x) = (x^2 + 2).\lg x\ (x > 0)$ مشتق غواړو پیداکړو

د ضرب قانون: $u(x) = x^2 + 2$; $v(x) = \lg x$ د $u'(x) = 2x$ او
$v'(x) = 1 / x.l\,10$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2)\frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو مشتق

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y=b^x ,(b>0)$ د ټولو ريلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'=b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad , \ f(x)=b^x$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{b^x-b^{x_0}}{x-x_0}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x-x_0}-1}{x-x_0} \qquad , \ x-x_0=h$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h-1=k \\ h=\log_b(1+k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_b(1+k)}$$

د لوګاريتم قانون څخه لرو: $n\cdot\log x=\log x^n$ او لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b[\lim_{k \to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]} \quad , \lim_{k \to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

له پورته لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} \quad , \ \log_b e = \frac{1}{\ln b}$$

$$= b^{x_0} \cdot \ln b \ ; \quad x_0 \in IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ' : f\ '(x) = b^x \cdot \ln b \ ; \ D\ '(f) = IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$f\ '(x) = b^x \cdot \ln b$$

قضیه : د $y = f(x) = e^x$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f\ '(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نیسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د ټل کوچنیکیدونکي Δx ارزښت لپاره خیرو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمیرنې په پنسټ دا دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که x_0 د xپه ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^{x} \text{ und } f'(x) = e^{x}$$

اکسپوننشل فنکشن e^x تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

لرو:

اکسپوننشلفنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

e - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو $y = f(x) = e^x$ ، نو $y' = f'(x) = e^x$ لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښووول: که ولرو $y = b^x$ دو $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$ دی.

که b=e کړدو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = b^x . \ln e \quad = e^x \cdot \ln e \quad \Rightarrow \ln e = 1$$

$$= e^x ; x \in IR$$

$$f : f(x) = e^x ; D(f) = IR$$

$$\Rightarrow f' : f'(x) = e^x ; D(f) - IR$$

گورو چې $f(x) = e^x ; D(f) = IR$ یواځنی تابع دی، چې مشتق یې پخپله $f'(x) = e^x ; D(f) - IR$ دی

$$f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

د $a \in R^+ \setminus \{1\}$ $x \in R^+$ سره.

فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کیدی شي د $y = g(x)^{h(x)}$ بنې تابع چې $g(x) > 0$ دی، د مشتق لپاره وکارول شي

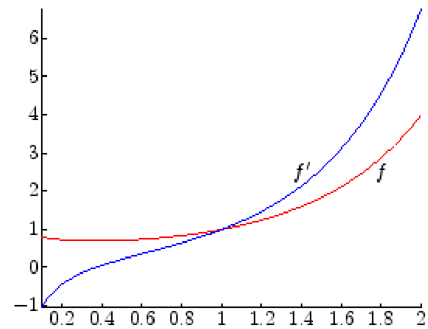
لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} \left(h(x) \ln g(x) \right) .$$

لیکونکی:(App/Höllig) اپپ ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -------



د $0 \to x$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د 0 په لور هخيږي، پس f د 0 په لور. نو تابع په صفر کې ښي لوريزه متمادي ده. د مشتق لپاره يې دا حالت ده دی.

د $x^x \to 1$ او د $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره د f تابع په صغر کې يو عمود تآنجنت لري.

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}\ .$$

)ليکونکي اپپ او هيوليګ

په طبيعت کې يې خيرنه:

د اکيوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

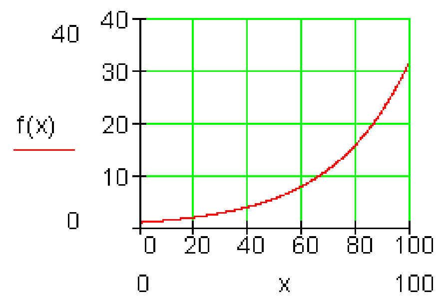
کولي باکتريا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتې ويش (حجره ويش) له لارې زياتيږي. و مساعدو شرايطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقيقو

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې ځان تجزيه کوي. د غه عمليي لپاره يو ارزښت جدول :اړ، او گراف يي کاړو. دلته
د x اووښتوني (متغيره) په دقيقو د وخت لپاره ده.
د y متحوله د باکتريا گانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100	دقيقي
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32	د بکترياګانو تعداد

پورته جدول کې : x = دقيقي y = د بکترياو تعداد



بيلگه: لرو : $f : f(x) = b^{3x^2-10};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونيسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b};\ z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x};\ x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

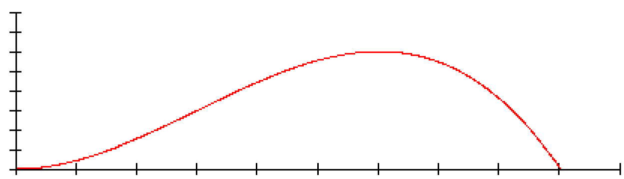
(c) ketabton.com: The Digital Library

- د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووبشتونې) x په واک کې وي.

په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څيرو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)



بيلګه: د يوه په برابرډوله بيره (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1{,}8\frac{m}{s^2}$ بيرې(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$\boxed{s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t}$$

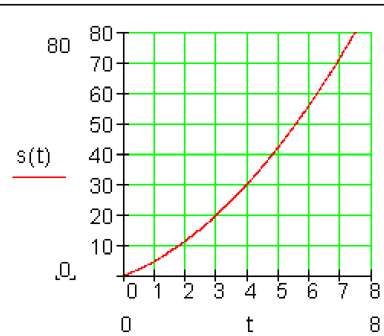
حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره

باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

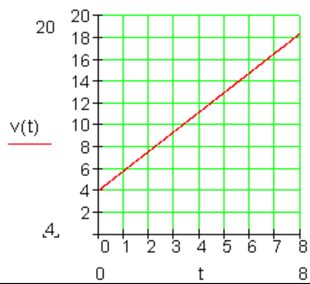
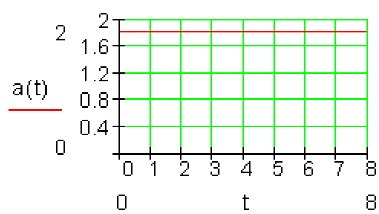
(tپه s (ثانيه) ، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:



(c) ketabton.com: The Digital Library

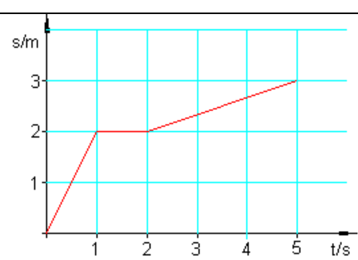
$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$ $v=s'(t)=1,8t+4$	
په v-t - ډیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته جګېدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a=1,8\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.	
د بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي: $v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$	

پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$a(t)=v'(t)=a \qquad v(t)=s'(t)=at+v_0 \qquad s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t)=s'(t).$ هم لیکو.

فعالیت:

۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی. ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

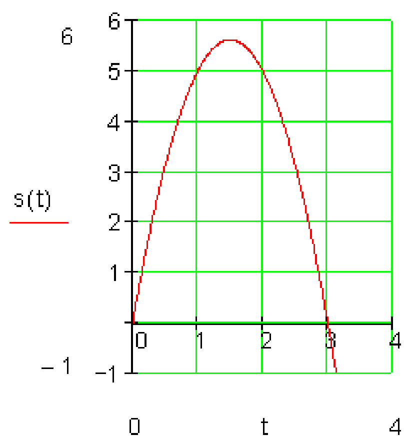
---

۲) یوه تیږه د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\ \frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کردې شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیږې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالی وشمیرئ.

۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي. الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي. د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟ ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ په لاندې ډول دی. a او v_0 وټاکئ	

پ) د اړونده بیرې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کي داسي حرکت کوي ،چي د t وخت کي $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1;2;3$ کي لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

۴ – حل:

لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \to 10$

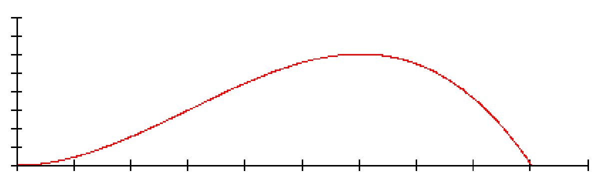
$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري:: $20 + 5\Delta x \to 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ ***لپاره باور لري*** $30 + 5\Delta x \to 30$

تمرين : لاندې د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 ; x > 0$ تابع ګراف او په ورنزدي توګه د فوټبال ميدان کې د توپ الوتنې منحني ښايي، چې لاندې څيره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسيمال) جګوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جګ دی. ايا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور لاين(د x محور) څخه په ۲ متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چي د ورپسي مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیوني سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چي د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

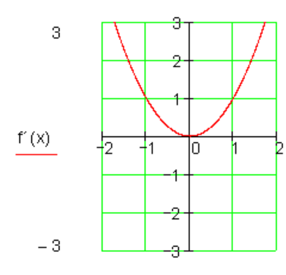
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

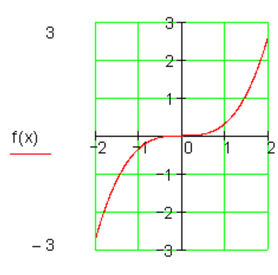
د تابع ګراف :

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$

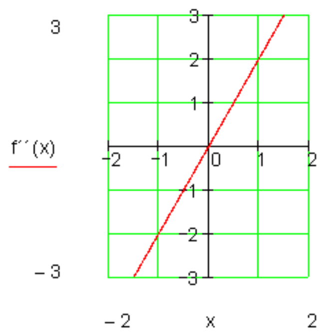


$f(x) = \frac{x^3}{3}$

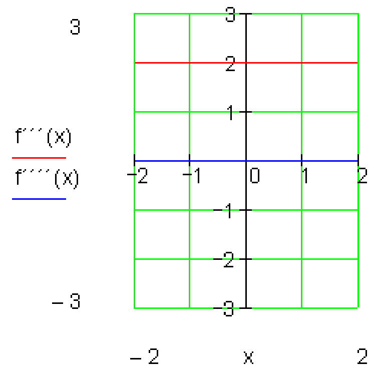


(c) ketabton.com: The Digital Library

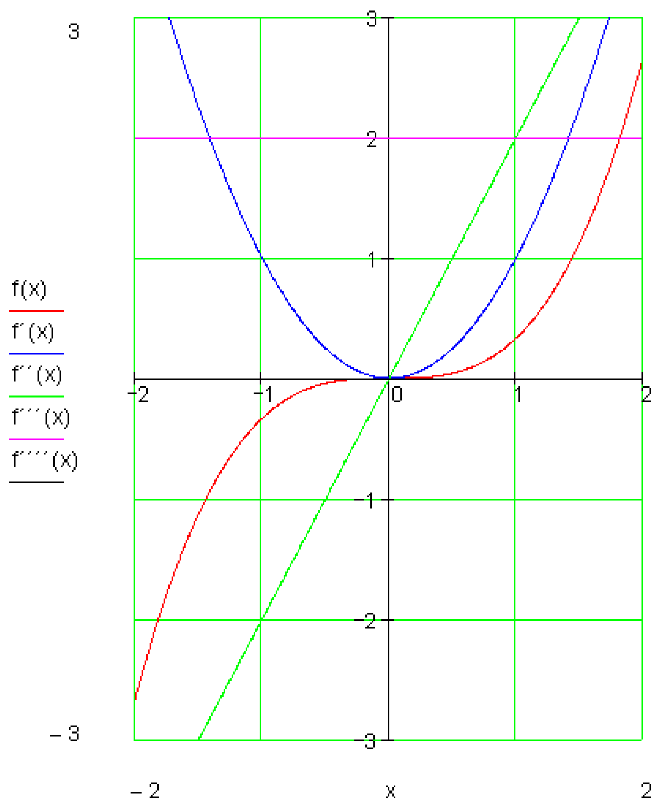
$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$



$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$



د ټولو توابعو ګراف په يوه پروت ولاړ سيستم



کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

اول :

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$
$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$
$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$
$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

ټولګه: د f(x) لومړی مشتق د(x)f مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

د(x)f دویم مشتق د f'(x) مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د f(x)دریم مشتق د f''(x) مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: ییو په خوښه ویاند تابع(x)f په خوښه د مشتق قابلیت لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- - د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیڅیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع $y = y(x)$ په ایمپلیڅیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په د x او y کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات یل برابرون تړلی یې په x پسې مشتق ونیول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په $y = y(x)$ ځنزیرې قاونو وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

بیلګه: $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورنه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیڅیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت: که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، ځنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه: یوه تابع په ایمپلیڅیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړو dy / dx پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \vee \frac{2x+y}{2y-x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیڅیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیڅیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیڅیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیڅیت یا څرګند ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

بیلګه : د $f\left(x\right) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چې په بنسټ او جګ اکسپوننت کې یې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کېدی شي: $\ln f(x) = x\ln x$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y}\, f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y}\, f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y\left(\ln x + 1\right) = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

بیلګه: دایره د r وړانګې سره مساوات $x^2 + y^2 = r^2$. لري. له دې ځنې برخې د $y =$ $f(x)$ تابع د ګراف په څېر لیکل کېدی شي. د دې مشتق د ایمپلیڅیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعریف شوي مساوات کې $y = f(x)$ ځاي په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو : $2\,x + 2\,f(x)\,f'(x) = 0$

د $f'(x)$ پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په داېرېتانجنت په ټکي (x,y) کې جګوالی $-\frac{x}{y}$ لري.

بیلګه: د بیلګیپه توګه د $E:\ x^2 + 3y^2 = 7$
له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګئ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

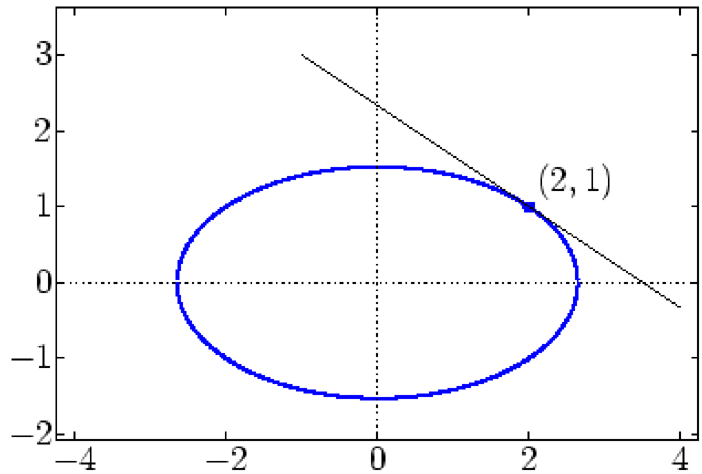
همداسې $y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$. له

دې سره کیدی شي په E باندې په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

بیرته په E د یوه ټکي د کواوردینات ایښوولو او همدا اوس د $y'(x)$ ټاکلي ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د بسټیزو مشتقونو جدول

(c) ketabton.com: The Digital Library

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\, x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \ a \ reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \ a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننیزې یا سپړنیزېي(تحلیلي) ویيني یا افادې مشتق په شننیزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونیسي.

تولګه

کمبنتویش Differenzenquotient (د سیکانت جګېدنه) یا منځنی تغېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی یا لحضوي تغیر ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\, c = cons\tan t$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

د ویش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

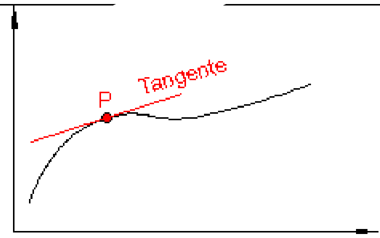
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځنځیر قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي(دا کمپيتريست سرته رسوم)

پيژند (تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی	

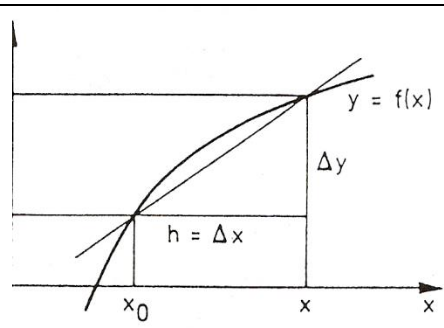
د کمښت ويش يا د تفاضل ويش **Difference quotient**

د يوې کرښې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدی شي:

کرښه y=f(x) = mx+a لرو

د دې کرښې د جګيدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پيژند(تعريف2-1 y = f(x) دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخپله تعريف شوی تابع وي، x د x_0 خخه بيل خو د چاپيريال يو په خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ ښيره دې وکتل شي). پس د تفاضل _ يا کمښتويش Differenc equtient د سيکانتي ميلان يا جګوالی شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو:	 د پيژند لپاره ښيره

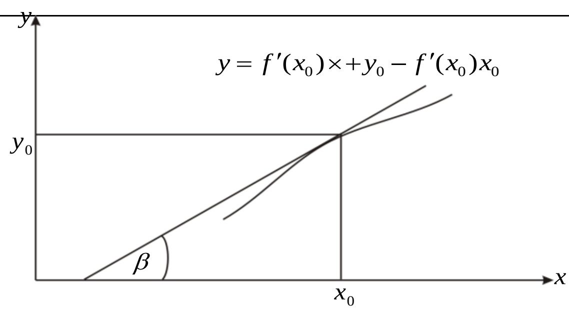
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

پیژند:که یو تابع یابلواك $y = f(x)$ د x_0 په ځاي کی د مشتق وړ(قابل اشتقاق،رابیلیدوړ) وي، نو هغه لاندنی کرښه چی د (x_0,y_0) څخه تیریږي او میلان یا جګوالی $f'(x) = \tan\beta$ یی دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = f'(x) \Leftrightarrow f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0 , y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني یا کړی $y = f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله یامقایسه لاندې خیره)



لومړی د تیرو جملو له مخې ددیفرنسیشن قاعدې د فورمال قاعدو په څیر بیا راټولوو یا رایوځاي کوو، بی له دې چې نیونی ورکړو. په استعمال کې یی بایددا نیوني کلکی تر پام لاندې ونیول شي. د لته د f(x) او $g(x)$ بلواك په f او g لنډیږي.

د مشتق نیونو یا رابیلدنومشتق قاعدو جدول

ګڼه	د قاعدې نوم	فرمول
۱	د ثابتې سره ځل(ضرب) قاعده	$(cf)' = cf'$
۲	د زیاتون – کمون قاعده	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
۳	د ځل (ضرب) قاعده	$(f \cdot g)' = f' \cdot g'$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګڼه د قاعدې نوم	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
۴ – وېشقاعده	
۵ – د زنځیروني قاعده	$y = f(z)\ ;\quad z = g(x);\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$
د په څټ یا برعکس قاعده	$y = f(x)\ ;\quad x = f^{-1}(y);\ \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x) = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x.\ln b}$

--- د یوې تابع د مشتق قابلیت

مورږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري اوهمداسې په هرځاي کې متمادي یا ناپرېکیدونکې نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.

تابع $f(x) = |x|$ په 0ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

او له دې سره $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0} = 1$

د ټولو $x < 0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې کيږ- او ښی اړخيز حد يو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوې.

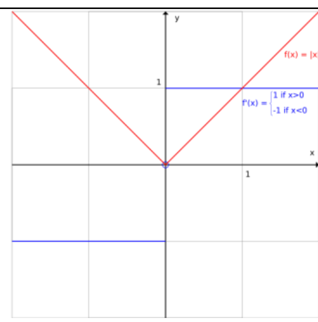
په صفر ځای کې سره له دې يو ښي اړخيز مستق ورکړ شوی، يعني لرو:

$$f'+(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

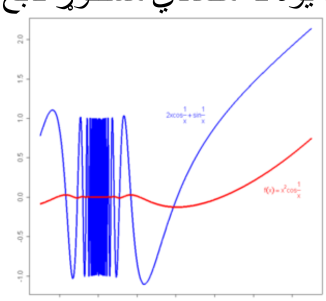
او يو کيڼ اړخيز مشتق هم:

$$f'-(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

که مخامخ گراف ته وگورو، نو وبه پوهيږو، چې يوه مشتقوړ تابع بايد گوډه نه وي يا په کوم ځای کې ماته نه وي يا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.



د يوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:



يو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که يوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، بايد نه دی چې مشتق دې يې هم متمادي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه:

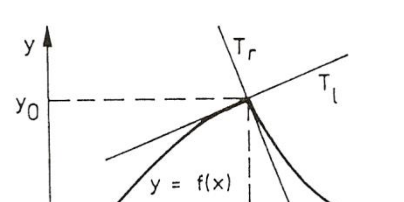
$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

يې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیټ (پولی) ته تګ ممکن وي یعني چیرته چې د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\to 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چيرته راماته وي (ځېره 4)، ګورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په ځیر د یوې تابع ځانګړي خوي دی.



که په مخامخ ځیره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_1 یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.

یوه نامتمادي(پرېکیدونکې) تابع کی د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.

اړیین یا ضروري شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټیك فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چی په یوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرګنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلګي په توګه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دې ته اړتیا ده چی وښایو، چی یوائې متمادي (نه پرېکیدونکې)توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چی مشتقوړ وي باید لږ تر لګه متمادي(نه پرېکیدونکې) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

لیمیټ یاپوله یوائې هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x)-f(x_0)->0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x)->f(x_0)$ د $x\to x_0$ لپاره.
دا د متمادیت یا ناپرېکیدنې پیژند دی.
دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0+\Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائې په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: د $y=(x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)\ ;\ a<x<b$$

که داد $x=x_0\in(a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کيڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه: د توان تابع $y=x^n,\ n=1,2,3,.....$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

پيژند: په یو د $x=x_0$ چاپیریال کي د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغې اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سړی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو په یوه واز اینتروال کي مشتق کېدونکي تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کيږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

بیلګه ۲ . ۷ :

لاندې توابع $y = c; y = x^n; y = \sin x; y = \cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2c}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \; n \geq 2,$$

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x, \qquad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x \; .$$

دا په ۲ . ۴ کی تعریف شوي کیلمی کیدی شي چی په ساده ډول په خوښه پراخه شي یعنی داکسپوننت مشتقونو ته واړول شي(n – م مستق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي) .

د $y=f(x)$ تابع دلته n –واره مشتقوړ ده، که n – م مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^ny}{d^nx} = \frac{d^nf(x)}{d^nx} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx};..$$

جمله:

که د$y=f(x)$ تابع د $x0$ په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي یا ناپرېکیدونکي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی پوله یا حد شته دئ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یوائی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی دx->x0 لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانیf(x)-f(x0)->0 لاړ شي.
نو باور لري: f(x)->f(x0) د x->x0 لپاره.
دا د ناپرېکیدني یا متمادیت تعیف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق (f'(x پهٔ لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پوري اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دئ. لکه څنګه چی په ناپرېکیدنه یا متمادیت کی(۱۹ - څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف :

د y=f(x) یوه تابع په واز اینتروال(a,b) کی، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځاي کی د مشتق قابلیت ولري د مشتق (f'(x0 سره.
دا په بند اینتروال[a,b] کی مشتقوړ بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتقوړ هم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه ګراف به مرسته تابع او د هغه په څنګ تابع د بیلګی به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرني لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله:

د معکوس تابع مشتق : که (y = f(x د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او همهلته د 0 =| (x) f' سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د (y = f (x سره مشتقوړ دی او باوري دی

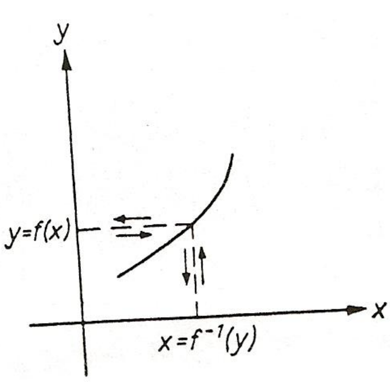
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له 0<- x اوهم 0<-y او معکوس څخه، د (y = f(x+ x)-f(x سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

بالاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y = f(x) = x^n; n = 1,2,3,4.....$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توګه معکوس تابع، نو لرو:

$\frac{dy}{dx} = f'(x) nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره. له دې امله د $y > 0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{y}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n).x^{n-1}$$

بیلګه: دا $y = x^{\frac{m}{n}}$ تابع د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپونټ یا په«جګ عدد» کیدی شي چی د مخه څیړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m \quad , \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپونټ کسري اکسپونټ ته پراخ شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټېتابع مشتق ځاي په ځاي شوی. له کيڼ و ښي لور ته اول درځ نمره ده دويم درځ يی تابع $f(x)$ ښای او په دريم درځ کی يی مشتق $f'(x)$ ځاي په ځای دي او په څلورم درځ کی د راپيداشوې پارامتر او د متحولې x نيونی ځای په ځاي شوي. که چيرې د واريابلی يا پارامتر لپاره نيونی نه وي شوي نو په خوښه نيول کيدی شي.

جدول د بنسټتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	وړاند نيونه يا فرضيه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	$n \;\; ganz, \;\; x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \;\; x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \;\; a \;\; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \;\; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$
15	$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
16	$Arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
17	$Arc\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$Arc\cot$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنګه د جدول20-1په مرسته کيدی شي چی کم له کمه په فورمال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزې(تحليلي) ويينې يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونی په نظر کي ونيسي.

بيلګه20-18: د زياتون قاعده کيدی شي د څل قاعدې په مرسته د يوې ثابتی سره يوځاي يا ګډه شي او ډيرو زياتونکو يا د جمعې اعضاو باندې استعمال شي. لکه لاندي

$$y = f(x) = 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6\sqrt{x^3}$$
$$= 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته tan x يواځي د $x \neq (2k+1)$ او د x^3 له امله يواځي د $x > o$ لپاره رابيليدوړ دی او ددې بنديزونو (محدوديتونو) له امله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dy/dx = f'(x) = 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 6.(3/2).x^{)3/2)-1}$$
$$= 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 9\sqrt{x}$$

لکه چی بنسټیز بلواك او له دوي ټولی راجوړې شوي سپړنیزې افادې هرچیرته متمادي یا ناپریکیدونکی وې، چیرته چي تعریف شوي وې. نو د جدول 20-2 له مخی بنسټیز بلواك یواځي تعریف ډیري کی رابیلیدوړدی، په دې کي کوم تغیر نه راځي که په دې بلواکو څلور بنسټیزې عملي استعمال شي. یعني لاندې جمله باوري ده .

جمله20-8: د بنسټیز بلواکو د څلورو بنسټیزو عملیو له لارې جوړې شوي شننیزې (تحلیلي) افادې د دوي تعریفډیري په دننه کی رابیلیدوړ ده.

که څوك ځنځیري بلواك جوړوي نو دا وینا باید نوره هم رابنده یا محدوده شي

بیلګه20-19: دا بلواك $y = \sqrt{(x-1)^{2}(x+1)} = (x^{3} - x^{2} - x + 1)^{\frac{1}{2}}$

د $(x-1)^{2}(x+1) > 0$ ، پس د $x+1>0$ یعني $x>-1$ تعریف دی او هلته هم نه پریکیدونکی یا متمادي (د $x=-1$ په غاړه طبعآ ښی اړخیز) ده.

دا په ځانګړې توګه د $x=1$ لپاره هم ناپریکیدونکی یا متمادي دی(20-7دې وکتل شي)د پیژنددېری یا تعریف ډیری دننه $x>-1$ دی، او هلته تابع یا بلواك په واقعیت کی نه پریکیدونکی یا متمادي دی .اوس نو مخ ته پروت تابع یا بلواك تړلی(ځنځیري) ورکړ شوی:

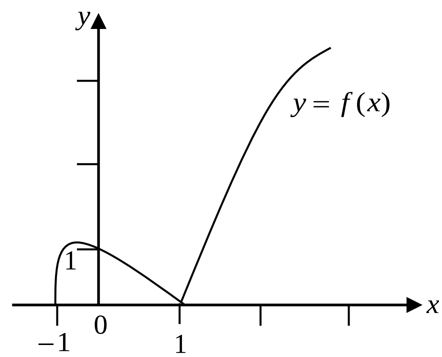
$$y = f(z) = \sqrt{2} = z^{\frac{1}{2}}$$
$$z = g(x) = (x-1)^{2}(x+1) = x^{3} - x^{2} - x + 1$$

$$z = g(x) = (x-1)2(x+1) = x3 - x2 - x + 1$$

بلواك $z = g(x)$ د ټولو x لپاره مشتقوړ یا رابیلیدوړ دی، تابع $y = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ له دې امله ځنځیري قاعده یواځی د $z > 0$ لپاره صدق کوي، پس د $x>-1,\ x \neq 1$ لپاره. هلته باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2-2x-1)=\frac{3x^2-2x-1}{2\cdot\sqrt{(x-1)^2(x+1}}$$



د یو ځنځیري تابع مشتقوړوالی د هغه- x ارزښتونو لپاره باور لري یاهلته ډاډوړ دی، کوم چي د د ننني تابع یا بلواك په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دنننی تابع ارزښت د دباندني تابع د د تعریف ډیری په دننه کي پروت وي. که د - x ارزښتونو ډیری د بند تعریفډیري دننه وښایي ، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه شننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفډیري په دننه کی رابیلدوړ ده.

بیلګه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه تړلي بلواك کی د ننني بلواك پخپله یو تړلی بلواك وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y=f(z),\;\; z=g(u),\;\; u=h(x)$$

پس د $y=f(g(h(x)))$

ځنځیري قاعده

$$dy/dx=(dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواك یا تابع

$$y=Arc\sin\sqrt{1-x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو داسې تابع دئ. دلته لرو:

$$y = f(z) = Arc\sin z, \qquad z = g(u) = u^{1/2}, u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته h(x) رابیلیدوړ دی، g(u) یواځی د $u > 0$ لپاره رابیلید وړ دی، پس د 1- ، $x_2 > 0$ او یا $x_2 < 0$ یاد $|x| < 1$ ، او $f(z`)$ د $|z| < 1$ لپاره، پس د $1 - x_2 < 1$ لپاره پس د $-x_2 < 11$ 1 لپاره په دې مانا چې $x_2 > 0$ د $|x| > 0$ لپاره.

رابیلیدوړوالی یواځې د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$0 < |x| < 1 <=> -1 < x < 0$ او یا

$$0 < x < 1 <=> |x| < 1 \quad x |= 0 \qquad (20.53)$$

دپیژندډېرې پا تعر یفډیرۍ دننه $|x| < 1$ دی. د تعریفډیري محدودیت(20-53 = دی.

فنکشن یا بلواك (20-52) یواځی همدلته تعریف او د (20-51) له مخې باور لري:

$$\frac{dArc\sin\sqrt{1-x^2}}{dx} = \frac{dArc\sin z}{dz} \cdot \frac{du^{\frac{1}{2}}}{du} \cdot \frac{d(1-x^2)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \;\; 0 < x < 1, \\ +\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \; -1 < x < 0 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غیر مستقیم خوندې یا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواك دیفرنځیشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیرقاعدې له مخې ترڅیرني نیول کیدی شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخی را پیداکیدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot = \frac{1}{v} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot (g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$

$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

جمله : که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو $y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دی.

بیلګه : تابع $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره رابیلیدوړ دی. دا دې داسی ځاې په $f = x,\ g = x$ ځاې شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$ له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلکه: د $y=(x^2-1)^{\ln x},\ x>1$ دیفرنسیشن سره باید د $g=\ln x$ له امله وغوښتل شي چی $x>0$ او د $f=(x^2-1)>0$ له امله باید باور ولري $x^2>1$ او له همدې امله $|x|>1$ پس کیدی شي چی د $x>1$ لپاره د $f=x^2-1$ او $g=\ln x$ سره استعمال شي:

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(x^2-1)+\frac{(\ln x)\cdot(2x)}{x^2-1}\right)$$
$$=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x}+\frac{2x\ln x}{x^2-1}\right),\quad x>1$$

بیلگه یا تمرین: د $y=f(x)=x^n; n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې توگه $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}}; y\geq 0$ یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو : $\frac{dy}{dx}=f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره له دې امله د $y>0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy}=\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{1-n}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلگه -- د $y=x^{\frac{m}{n}}\ , m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت

یا په«جگ عدد» کیدی شي چی د مخه څېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق ونیول شي، چې د $x>0$ لپاره باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m \quad , \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبيعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بيلګه : يوه بډای چی په يوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډيری) M توليد کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فيکس يا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کيدې شي چي سملاسی د دې توليد په ټولسټ (ټولډيری) M کی توليد کړي ، په يوه زخيره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته يی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخيره کونې) لګښتونه راپيد کيږي(ددې د زخيرې لپاره ځاي او هلته بيا اچول او وړل). يا هم کيدی شي چی توليد په لږه کچه يا اندازه توليد شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخيره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر ټل توليد په دې ډول توليد باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه يی بولو.
کومه ډيری x (ازاده لويه) بايد توليد شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟
د زخيرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سره يعنی چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتيا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل بايد تغير وخوري يعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرته چی F ثابت(همغه) يا په کلکه ايښول شوي لګښتونه دي، Lد زخيرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لويه x د

(c) ketabton.com: The Digital Library

توليدديرى M څخه نه شي سترېدلى ، لوئيدلى يا غټيدلى. له دې امله صدق کوي 0 $\leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستريدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

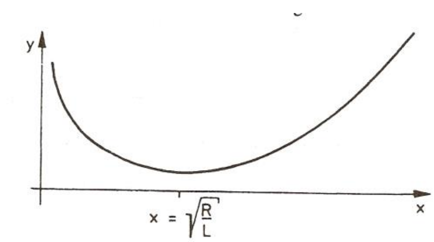
$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \leq x \leq M$$

(لمړى f(x) دوه واره ديفرنځيال کيږي يا يي دوه واره رابيليدنه نيول کيږي:

$$f'(x) = L - R/x^2, \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مينيوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R / L$ ؟؟؟

د $0 \leq x$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل يو نسبي مينيموم مخ ته لرو



د کږې تګلار په څيره ۲۰ . ۱۵ کى انځور شوې.

څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مينيموم مو مخته پروت دى. که $x = (R / L) > M$ وي، نو يو منيموم په څنډه $x = M$ لرو.

نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2L$.
پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخيرې لګښتونو L څخه زيات لوي شي، نو سملاسى دې ټول توليد $x = M$ صورت ونيس. که د ذخيرې لګښتونه د چمتووالى لګښت څخه کم وي، کيدى شي کوچنى ازاد x توليد شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي:

$R = 1000 < M^2L = 108 . 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x = R / L = 1000 / 10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید

ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړیږد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره

صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .

یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي.   پای

د رول قضیه (Rolle)

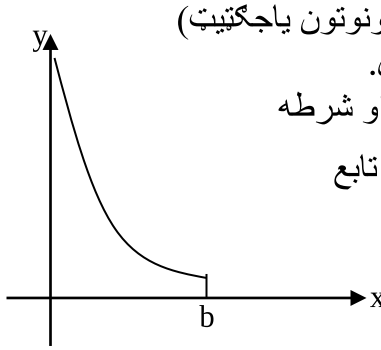
ننوتنه :

که د f یوه تابع په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوc د a اوb ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عددk د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی

د وایرشتراس قضیهWeierstrass

که د fیوه تابع په بند اینتراوال[a,b]کې متمادي یا ناپرېکیدونکې وي، نوfپه دېاینتراوال کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.
کیدی شي چی یو یوغږیز (monoton مونوتون یاجګټیټ)
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.
د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه
حتمي دی. د بیلګې په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع
په نیم بنداینتروال [0,b)کی متمادي ده،
مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې



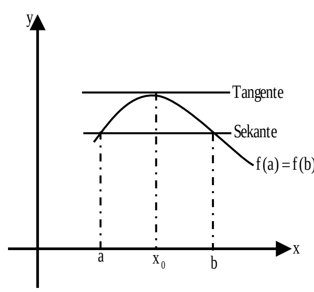
(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه اعظمي ټکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ويش ترمنځ داسی نږدې اړيکي وجود لري، کومې چی د انالیوزې په منځ ارزښت قضيو کی تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسی ترلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضيه:



يوه د f تابع دې په بند اينتروال[a,b]
کې متمادي وي د(f(a)=f(b سره
او په واز ايتروال(a,b) کی مشتقوړ،
نو لږ تر لږه يوځاي $c \in (a,b)$ شته دی
د $f'(x_0)=0$ سره.
حل :

۱) کهf ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
۲) که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چیfثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د (f(a)=f(b سره نامساوي دی . په دې اساس د اينتروال په دننه کی يو مونوتون (جګټيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کيدی شي چی عمومي شي.

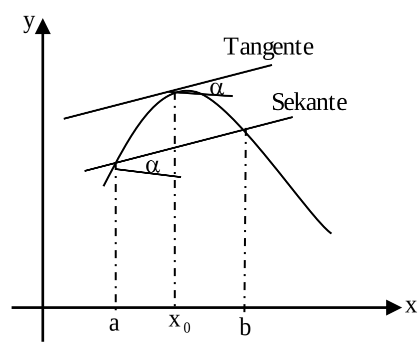
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ایا یوې مایئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جګوالي) سره جوړیدلی شي؟

ځواب یی لاندې قضیه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=f(x)$ تابع په بند اینتروال$[a,b]$کی متمادي او په واز اینتروال (a,b)کی د مشتق وړ وي ، نو هلته یوځاي $x \in (a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چی لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



(خیره ښه نه ده انځور شوې تیک دې
د الفا د کونج لاندې ضلعې باید د x محور سره غبرګې وي)
حل:
دا پرابلم په یوه مرستندوې تابع داسی تعریفیږي، چی د رول قضیه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامخ ته کوو:

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

د مرستندوې تابع په څیر د مشتق تابع جوړیږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باور لري:h(a)=h(b)=0 . برسيره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په [a,b]کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چی يو ځاي $x\in(a,b)$شته دی د h'(x)=0 سره، چی له هغې لرو:

$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ يعني } f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

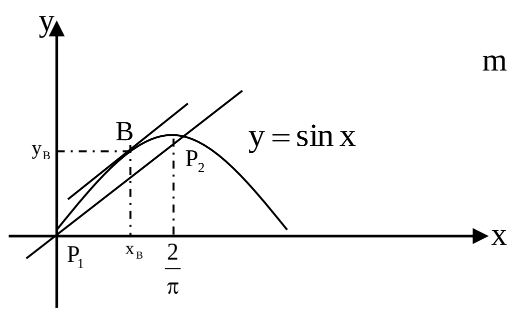
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلګې نوره هم روښانه کړي.

بيلګه :

د f(x)=sinx يوه تابع دې داسې ورکړشوې وي،چې په يوه ټکي $B(X_B,Y_B)$کی تانجنت د منحني مماس وي، اوکوم چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ټکو کی همغه ميل يا جګوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوڅي) ميل ياجګوالی:

$$m=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{\pi}$$



د منحني ميل د $B(x_B:y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B)=\cos x_B=\frac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B=\arccos\frac{2}{\pi}=0{,}88$ او $f(x_B)=f(0{,}88)=0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88:0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y=\frac{2}{\pi}(x-0{,}88)+0{,}77$

د منځ قضی د عموميت څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پراخه شوې یا غزېدلې منځقضیه :

که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینتروال[a,b]کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b)د مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري ، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځاي $x_0 \in (a,b)$وجودلري چې لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او v=g(x) مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې $x = g^{-1}(v)$

که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځيري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځيرې قاعدې له مخې يې دا مشتق لاس ته راځي:

که په u=h(x) تابع د $v_1 = g(a)$ او $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قيمت قضيه استعمال شي، نو د ځای $v_0 \in (v_1;v_2)$ په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

له دې څخه د h(v)=f(x),v=g(x) او $x_0 = g^{-1}(v_0)$سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

•

•

•

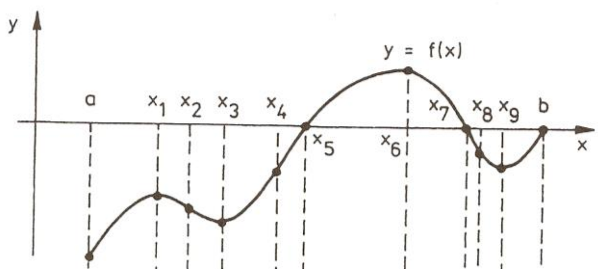
•

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغړیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغړیز، برابرېوله)

جګیدونکي(متزاید)، ټیټېدونکي(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکي توابع)



که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینتروال کې $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$) وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې(- ټیټیدونکې) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) کره یا ټینګه مونوتون جګیدونکې (همغږیز ټیټیدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \ne x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

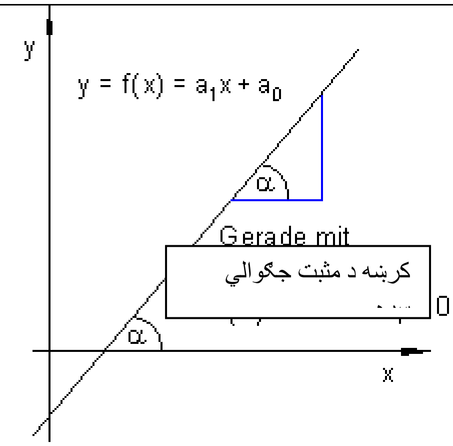
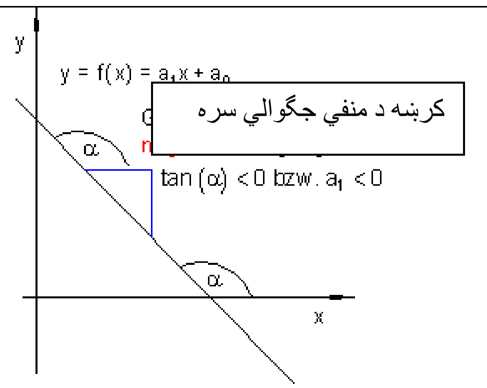
د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوتون ټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \ne x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغرېزوالی (یکنواخت) Monotony جګېدنوالی، د جګېدنوالی جملې

دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښيز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنا نه لري. ددې لپاره مسئول يې ثابته جګېدنه يا ثابت ميل $a_1 = \tan(\alpha)$, دی، چېرته چې α د کرښې او مثبت لوريز د x -محور ترمنځ زاويه(کونج) ده. په مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت ميل سره $\tan\alpha > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$	
که $0 < \alpha < 90^0$ يا $0 < a_1 < \infty$ وي ، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې(⇔)، نو کرښه جګيږي. دا دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګيږي. په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې(⇔ $a_1 < 0$)	داپورته داسې دی: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^0 < \alpha < 180^0$ يا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$ ، نو کرښه ټيټيږي يا لويږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت f(x) کوچنی کيږي.

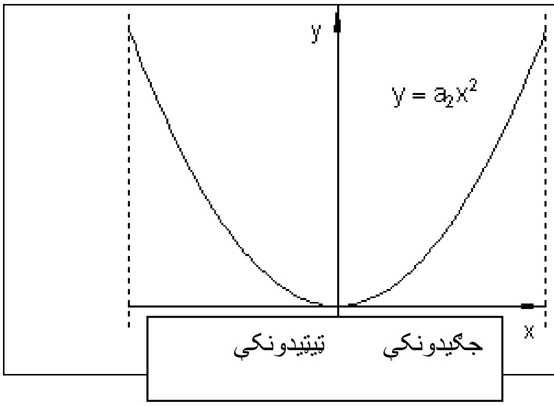
په پورته دواړو حالتونو کې د همغږيزې تابع (يا د جګ-ټيټېدونکي تابع) غږېزو او له يوه مونوتون جګېدونکي تابع ښخه، که $a_1 > 0$ وي. له يوې مونوتون ټيټېدونکي تابع ښخه ، که $a_1 < 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت اینسول کېدی شي.

له دې امله د تابع $f(x)=a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اینتروال $I_1=\{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع f(x) مونوتون ټيټيږي. او په اینتروال $I_2=\{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې f(x) مونوتون جګيږي.



لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګېدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګېدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنې له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جګېدنه >0 ← منحني مونوتون جګیږي

د تانجنت جګېدنه < 0 ← منخني مونوتون ټيټيږي

د تانجنت جګېدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

روښانه ده چې د$f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع میل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضیه په لاندې ډول فرمولوو .

قضیه: د$f(x)$ تابع دې په اینتروال Iکې مشتقوړ وي.

۱ که د $f(x)$ تابع په اینتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$لپاره

که $f(x)$ په اینتروال I کې مونوتون ټيټيدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

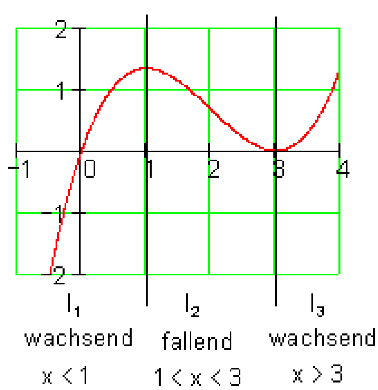
۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دتولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اینتروال I کي مونوتون جګیدونکي ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د تولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ایترولIال کي مونوتون تیتيږدونکي ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د تولو $x \in I$ لپاره، نو$f(x)$ په اینتروال Iکي په کلکه مونوتون جګیدونکي ده

که $f'(x) < 0$ وي د تولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اینتروال Iکي په کلکه مونوتون تیتیدوني ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعریفساحو) تاکنه:

بلګه: د تابع ګراف څخه زیات وخت کیدی شي د مونوتوني ساحي لږ یا زیات تیک و لوستل شي. لاندي ګراف لرو: مخامخ له بني – وکيڼ لور ته:جګیدونکي، تیتیدونکي جګیدونکي	$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ 

د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګيږدونکی دی.

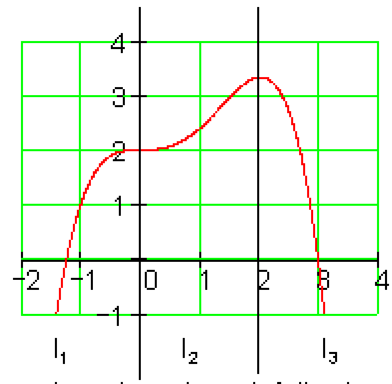
د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوتون تیتیږدونکي ده.

د $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګیږدونکي ده.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بیلګه:

پورته له ښي – وکیڼ لور ته: جګیدونکي، جګیدونکي، ټیټیدونکي

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ ، لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګېدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټیټېدونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراپي ټکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x)=0 او f''(x)>0 ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او f '' (x) < 0 ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(اصغرېټکی)او که جګ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

١ – دا اړیکي یواځي د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف ست په دننه کی پروت وي او هلته د y = f (x) تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

٢ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

٣– شرایط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

بیلګه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

گراف: که گراف دې ګران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيين شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، يعني دلته يو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دويم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکي مخ ته لرو.

بيلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شنني څخه لاندې پيژند ته راځو:

پيژند : د $x = x_0$ په چاپيريال کی د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګټکی په همدې دل نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) \le f(x_0)$$

جمله : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې مقايسه شي): چيرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغې لپاره لرو$f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$دې يواکستريموم و لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : (د يوه افراطي ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته يو افراطي ټکی لري. خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښی لور انحنا يا کوږوالی اوله کيڼ لور انحنا يا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په يوه اينټروال کې د مشتقوړ تابع f دويم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اينټروال کې ګراف کيڼ کوږ شوی يا کيڼه انحنا لري او که دويم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ يا ښی انحنا لري.

دوه ځيري (د لاندې بېلګې ځيره و باسی ؟-)

بيلګه:

ټول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کيڼکوږدی(کيڼه انحنا لري(ننوتی يا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب يا وتلی دی)؟

دويم مشتق: (لومړی مشتق(

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x)= 6x-4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کیڼ ګوړوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوړوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه: د مات راشنل تابع $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ګراف یو های پارړابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کړه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوړوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوړوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوړ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه : د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوړوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

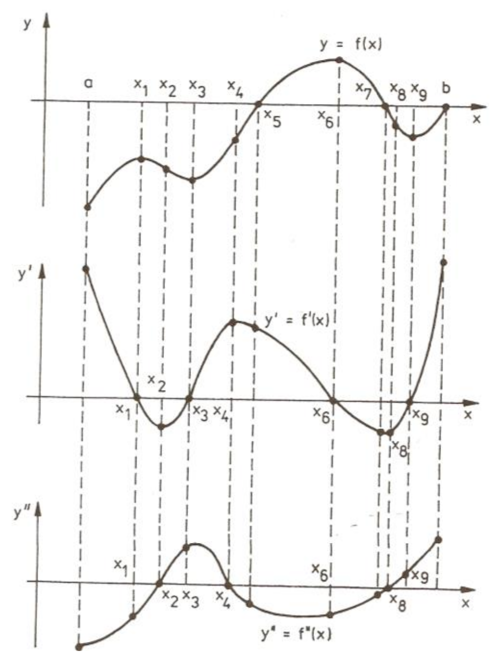
(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتقونه د $x \in R^{+}$ پاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $f''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کیڼه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کیڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)



یادونه: ولې اوړنټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ...... موږ له پورته خیرې اټکل کولی شو چی : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولرو$f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په ځتې):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

۴ - شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ – شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

ګورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 \quad , f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 \quad , f'''(x) = 0$$

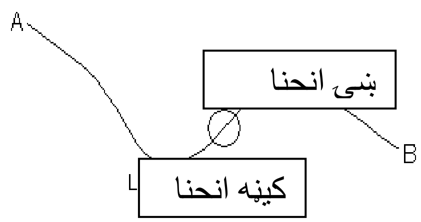
ګورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

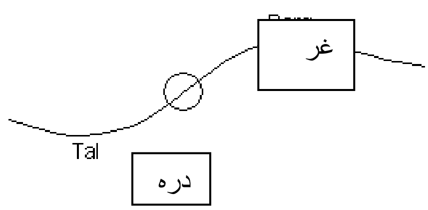
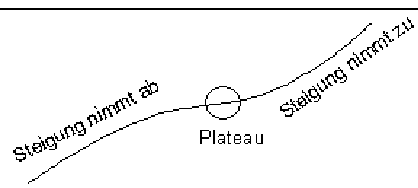
د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بایسکل ځغاستي چي له A ځخه ځغلي د منحنی ځخه تېرېږي او B ته رسيږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کي په پام کي ولري. د کیڼي منحني(د کیڼ لوري د انډل حالت) ځخه وروسته د ښی لورې منحني کي ځغلي.	

د کیڼي- او ښی منحني(کرېږ) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي(عمود وي)، چي دا د انډل بدلون دی له کیڼي لوري و ښی لورې ته. دا د کیڼي او ښی منحني ترمنځ اوړیدنه یاد انعطاف ټکی بلل کیږي.

تاسو له بایسکل سره په یوه غونډی ځغلی. وروسته له هغي، چي له تالي ځخه تېږېږي، نو لار په جګیدو پیل کوي. په لومړي سر کي نرم او بیا په نیغه جګیږي، بیا په دې پسي جګوالی بېرته کمیږي، چي پاس د غونډې په ځوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چېرته په غونډيپورته صفرارزښت ته رسیږي. یو چېرته په لار جګيدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.	
د بایکل ځغلونکي بل حالت، چي له ځنګ دیاګرام ځخه یي رانیسو: په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګیدنه لومړی کمیږي، چي له سره بېرته جګه شي. ددي ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتاًهواره).ً دي نسبتاً هوار ځای کي د ټوټه کربښي جګیدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونتکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.	 له کیڼ و ښي لور ته: جګیدنه کمیږي، هواره ، جګیدنه زیاتیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکی له دې چې یو لړ جملې د بحراني(جګ – ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چې دا کلیمی تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

پیژند ۲۰ . ۶ : په یوه چاپیریال x = x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) یو کیڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):   که په x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) اکستریموم لري نو لرو: f ' (x) = 0

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲دې پرتله شي): چیرته چې f ' (x)≠ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یواځې د x0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره0 = f ' (x) وي ، خو حمتي نه ده چې y = f (x)دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په y′ = f' (x) څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):   که په x = x0 کی دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: f '' (x) = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم باور لري (يادونه ۴ دې پرتله شي): چيرته چې $f''(x)\neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کيدی چي اوړونتکي موجود وي. مګرچيرته چې $f''(x)=0$ وي ، اوړونتکی شته کېدلی شي، خو اړيين يا ضرور نه ده چې هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

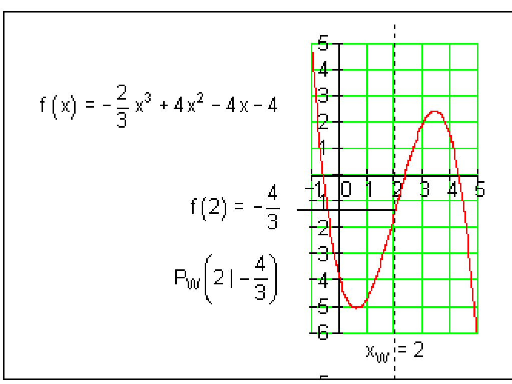
> جمله ۲۰ ، ۱۳:(د اوړونتکي يا انعطافتکي لپاره پوره کيدونکی شرطونه)که په x =x0 کی دريوار مشتقوړ تابع $y=f(x)$ لپاره وي:
>
> $f''(x)=0$, او $f'''(x)\neq 0$
>
> نو هلته يو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x)<0$ وي، نو يو کيڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x)>0$ لپاره يو ښی-کيڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننيزه يا تحليلي بيلګه:

يادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښنه کوو او د x_W سره د انعطاف – يا اوړون ټکی په نښنه کوو.

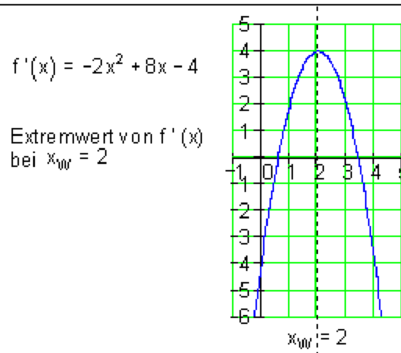
1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+4x^2-4x-4$$
$$f'(x)=-2x^2+8x-4$$
$$f''(x)=-4x+8$$
$$f'''(x)=-4$$



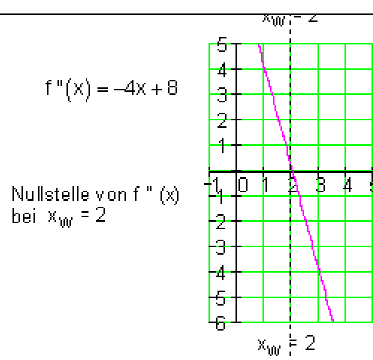
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- دویم مشتق صفر کړئ.

 د الماني پښو: د f'(x) ضفرځای په xw=2 کې	$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4x+8=0$ $\Rightarrow x_W = 2$

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

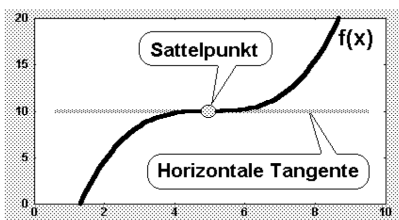
	$f'''(x_W)=f'''(2)=-4$ 4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

 د الماني پښو: د f''(x) ضفرځای په x_W=2 کې	$f(x_W)=f(2)=$ $-\frac{2}{3}(2)^3+4(2)^2-4(2)-4=-\frac{4}{3}$ $\Rightarrow P_{W\left(2\mid-\frac{4}{3}\right)}$ $P_W(21-1.33)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

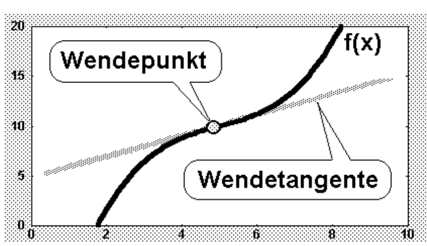
پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ ګراف کږیږي.

په یوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x)>0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کيڼ لور ته کږيږي(انحنا لري) دی.
$f''(x)<0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ ګراف ښی لور ته کږیږي(انحنا کوي)
یو زینټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

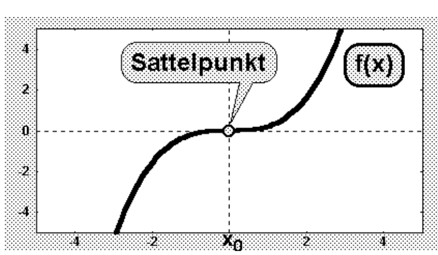


پیزند: د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت)

وي:



د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

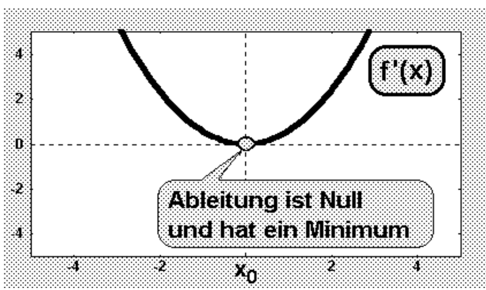


توضیح: اوس فکر کوو، چې یو زینټکی څنګه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چې یو زینټکی له ښي ــو کینه انحنا و شمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعني لومړی مشتق: د زینټکي د مخه د $f(x)$ جگوالي کمیږي، په زینټکي کې صفر ارزښت لري، او له زینټکي څخه وروسته بېرته جگیږي.

یو زینټکی (د ښي – کیڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټیټکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینټکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینټکی(ښی-کیڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جگ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.

له دې سره سم د زینټکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه:

د زینټکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کیڼ- انعطاف سره)

الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$

ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.

بل بدیل(د گرانو دوستانو وړاندیز)

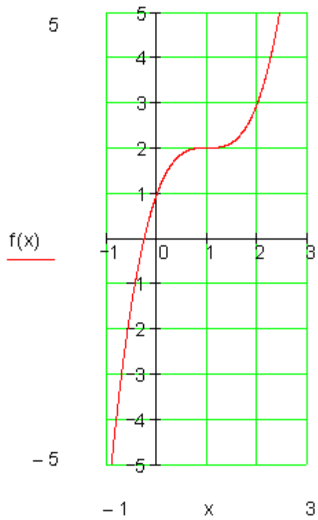
؟

\.

،

(c) ketabton.com: The Digital Library

زینتکی Der Sattelpunkt



د انعطاف ټکي یو ځانګړی حالت زینتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګیدني سره.که د کیڼ لور ورنږدې شو فکر کیږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نږدې شي فکر کوي، چې یو نسبي ټیټټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د ریاضیاتو له لورې څېړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = 1$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	1=> د $x = 1$سره د انعطاف ټکی	1=> د $x = 1$ سره زینتکی

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.
دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی.
د انعطاف ټکي پیداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پیدا کیږي لکه د تابع دګراف په یوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کیږي.
.
.
،
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2 \Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

مساوات لپاره باور لري.

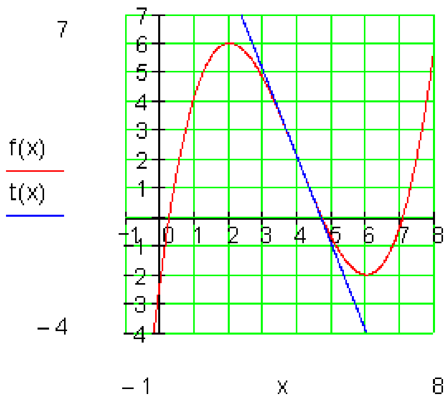
د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$

سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر څیړنی لاندې نه نیول کیږي.

د کرې یا منحني بحث (Kurven Diskusion):

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چیرته له کیڼې لور و ښی لورې ته او له ښی لورې و کیڼې لورې ته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جگ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پېژنو. موږ دې بحث ته د منحنې بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه گټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څېړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$

په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط$x \geq 0$ وڅېړل شي.

یه ټولیزه توگه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو گورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جگټکی، ټیټټکی)

د جگټکی یا نسبي جگ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی یا اوړونټکی Inflection Point :

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$

زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوڅټکی):

د x – محور سرهِ غوڅټکی: $P_{xi}(x_i \,|\, 0) \Rightarrow (x) = 0$

د y محور سره غوڅټکی(صفرځای) ټاکي $P_y(0 \,|\, y_s) \Rightarrow f(0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیړل کیږي.

د انحنا حالت او یوغږیزوالی:

د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:

$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)

یوغږیزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جګیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټیټیدونکی دی.

2- که د ټولو $x \in I$لپاره$f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروالI کې کره غښتلي مونوتون جګېدونکی ده.

که د ټولو $x \in I$ لپاره$f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلي مونوتون جګېدونکی ده.

د پېژند ورشو ژی ټکي:

د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :

د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$$P_{min}(3|-2) \qquad P_{max}(1|2)$$

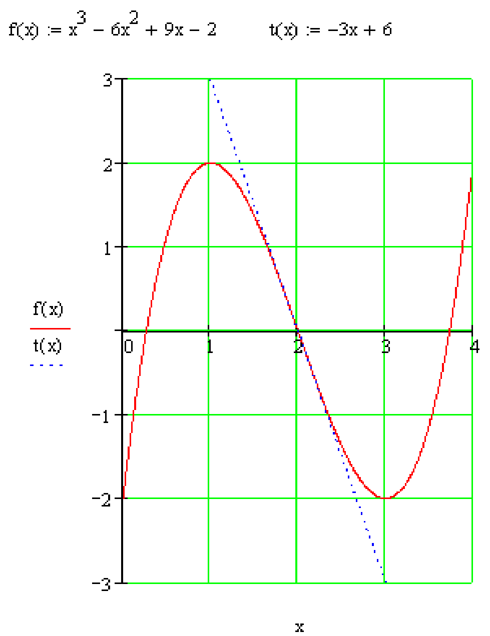
انعطاف ټکی او تانجنت

$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$



یوغږیزوالی(مونوتوني یاجګ - ټیټوالی)

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جګیږي.

په $I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جګیږي.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږوالي یا انحنا حالت:

ښی کږوالی یا انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کیڼ کږوالی یا انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جګ-ټیټ ټکو جملې یعني دا وروستي نومولی جملی اوس باید په یو لړ بیلګو استعمال شي.

دلته دي د ورکړ شوو توابعو، د پيژند سټ (- ډیری)، انعطافټکي ، جګ-ټيټټکي (اکستریموم، قطبونه، اسیومپټوتی وښوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکښل شي. دې ښوونو یا څیړنو ته د کږو خبرې اترې یا – مباحثه ویل کیږي، یعنی دلته د کږو (انحنا) د مختلفو ډولونوپه خویونو غږیږو.

موږ خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستریموم) او انعطافټکو(اړونټکو) رامعلومو یا روښانو څیرنوته متوجه کوو او د »انحنا- خبرې اترې) د انحنا(کږې)-چڼون (« د لاندې شیما له لارې مخ ته بیایو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع y = f (x) د دریمي درجی پورې مشتق پیدا کیږي، بیا له ټولو هغو ارزښتونو xiڅخه سټ M جوړیږي (۴ ټکی) چی وروسته باید ځانګړې تر څیړنی لاندې ونیول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو ابسځیز یا پراته ارزښتونه نیول کیږي. په دې پورې په ځانګړي ډول بیا تشځایونه (لوکی Lücke نیمګړتیا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکمیل شي.

۱ – د f (x) = 0 صفر ځایونو xi سټ M0 لټول کیږي.

۲ – ټول ځایونه x لټول کیږي، چی هلته y = f (x) د مشتق قابلیت نه لري او په ډیری Mکی یی نیسي. بیا د ټولو ارزښتونو xj ډیری M1 لټول کیږي، چیرته چی f′ (x) = 0 وي، (دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د yj = f (xj) تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه یی. ورپسې سړی د ټولو $x_j \in M_1$ ارزښتونه د f (xj) د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزښتونه x چیرته چی y = f (x) دوه ځله مشتقوړ نه دی د M په‌سټ کي نیول کیږ‌ي.

ورپسې بیا سړی د ټولو xk سټ M2 لټوي، چیرته چی f''(x) = 0 وي (دلته نو د انعطاف ټکي پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزښتونه yk = f (xk) .

بیا د ټول $x_k \in M_2$ لپاره دریم مشتق f '''(x) ازمائیل کیږي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری M_{21} د کومو لپاره چی f'''(xk) < 0 وي نو افقي(پراته) محور کیڼ - ښی-اا‌عطافټکی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری ، د کومو لپاره چی وي f'''(xk) > 0 نو د پراته- یا افقي محور د ښي - کیڼ - انعطافټکي جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ډیری د کومو لپاره چی f'''(xk) = 0 وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری M کی نیول کیږي.

۴ – د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطافټکي یا ا وړونټکي باندې د ډیري M ځیرنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو څو بیلګی راوړو

بیلګه : بلواك y = f (x) = x³- 6x² + 9x هرچیرته پوره زیات مشتقوړ دی.

$$0 - \ f(x) = 3x^2 - 12x + 9 , f(x) = 6x - 12, \ \ f \ (x) = 6$$

په سټ M کي یواځي $-\infty, \infty$ نیول کیږي د حد ــیا پولي تیریدنو په موخه یا هدف $: M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$M0 = \{x1 , x2\} = \{0 , 3\}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

2 - f ' (x) = 3 x2 - 12x + 9 = 0

M1 = {x3 , x4 } = {1 , 3 }, y3 = 4 , y4 = 0

مینیموf '' (x3) = f (1) = -6 < 0 , Minimum (

) ماکسیموf '' (x4) = f (3) = 6 > 0 , maximum (

M11 = {1} , M12 = { 3 }.

3 - f'' (x) = 6x - 12 = 0 ,

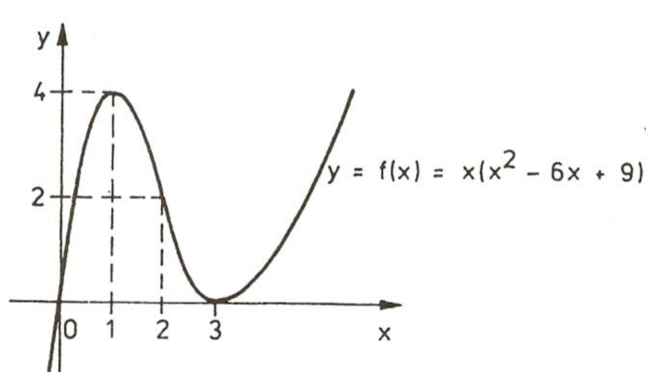
M2= { x5 } = { 2 } , y 5 = 2

f '''(x5) = f '''(2) = 6 > 0 (

بنی - کيڼ اوړيدونټکی .{ 2 } = M 22

4 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

په دې ډول د منحني تګلار په لاندې ښېره کې لاس ته راځي



بیلګه : تابع $f(x)=x^4-4x^3$ پوره په خوښه مشتقوړده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

0 - $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 24x$, $f'''(x) = 24x - 24$

په ستټ M يواځې $-\infty,\infty$ نيول كيږي: $M = \{-\infty,\infty\}$

1 - $f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0$

$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, 4\}$.

2 - $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0$

$M_1 = \{x_3\} = \{3\}$, $y_3 = -27$

دا چی د 0 = x لپاره دويم مشتق 0 = (0) '' f دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې ځيرل كيږي

$f''(x_3) = f''(3) = 36 > 0$, Minimum, $M_{12} = \{3\}$.

3 - $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0$

$M_2 = \{x_4 - x_5\} = \{0, 2\}$, $y_4 = 0$, $y_5 = -16$,

$f'''(x_4) = f'''(0) = -24 < 0$

$M_{21} = \{x_4\} = \{0\}$, انعطاټكى(كيڼ- ښى -انعطاټكى

$f'''(x_5) = f'''(2) = 24 > 0$,

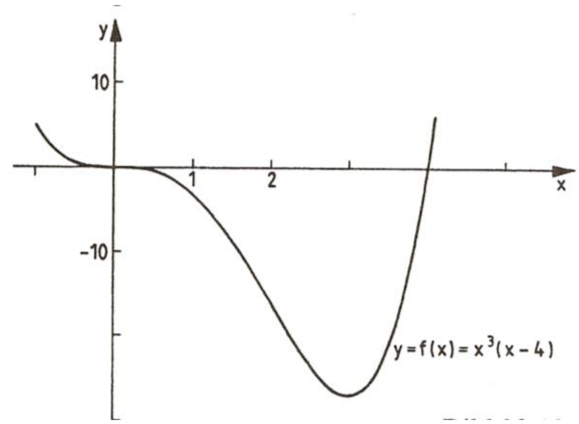
انعطافټكى(ښى - كيڼ – انعطافټكى)

$M_{22} = \{x_5\} = 2$.

4– $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې ځيرې څخه د کړې تلنشکل لاس ته راځي .



بيلګه : تابع $y = f(x) = e^{x^3}$ پوره مشتقوړ دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2e^{x^3}$$
$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3}$$
$$f'''(x) = 9x^3e^{x^3}(3x^3+2)+6e^{x^3}(6x^3+1),$$

$M = \{\infty, -\infty\}$

۱ – تابع کوم صفرځای نه لري

$f'(x) = 3x^2e^{x^3} = 0$ - ۲

يواځې د $x_1 = 0$ لپاره ارزښت لري. مګر داچي f''(0) = 0 دئ ، نو x1 = 0 د ۳ -
لاندې ځيرل کيږي

۳ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3} = 0,$$
$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}, \ y_2 = 1, \ y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنې – کینږ انعطافټکي:

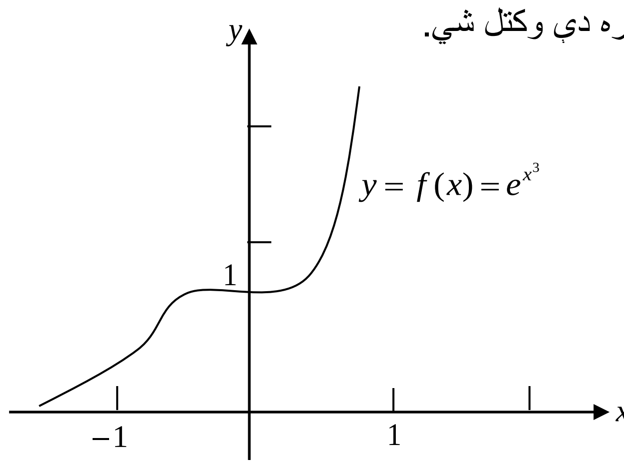
$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$
$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

کینږ- بنې انعطافټکي:

$$f'''(x_3) = f'''\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = 0 + 6\,e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3}+1\right) < 0,$$
$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

۴ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0, \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^3} = +\infty.$

لاندې ګېره دې وکتل شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}$ د ټولو x لپاره تعریف دی، مګر یواځي د = | x
$x \neq 0$لپاره مشتقوړ دی

صفر - د $x \neq 0$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$
$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته (f'''(x ته اړتیا نه پیښیږي

د M سټ له x = ± oe او x = 0 څخه جوړ دی

$M = \{-\infty, 0, \infty\}$

اول: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}=0$

د $x = -\sqrt[3]{x^2},\ x^3 = -x^2,\ x^3 + x^2 = 0$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کی x1= 0 , x2 = -1 راځي. دواړه ارزښتونه ، لکه ازماینه روښانه کوي، صفرځایونه دي:

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = (0, -1)$$

M0 = { x1 , x2 } = {0 , -1}

دویم : $f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = 0.$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0,\quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=-1,\quad \frac{8}{27x}=-1,\quad x=x_3=-\frac{8}{27},$$

$$y_3=f(x_3)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{4}{27}.$$

$$M_1=(-\frac{8}{27}).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right)=-\frac{8}{9\sqrt[3]{x^4}}<0, Maximum$$

$$M_{11}=\left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

۳ -

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0$$

د كوم له پاره شووني نه ده.

۴ - $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

هغه ځاي$x1 = 0$ ، دكوم لپاره چی $f(x)$ مشتقوړ نه دی او د كومی لپاره چی $f(0) =$ 0لرو، بايد تر اوس تر ځيرني لاندې ونيول شي

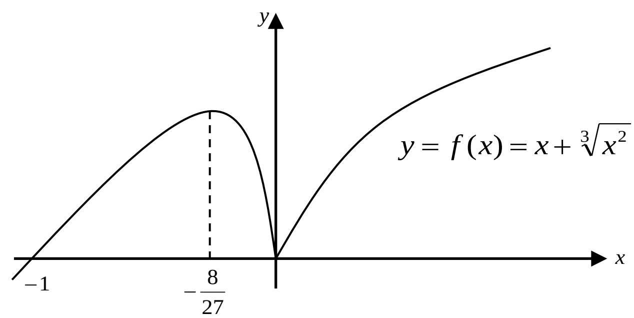
د $x > 0$ لپاره $f(x) > 0$ دی.

د $-1<x<0$ لپاره صدق كوي(د $x^2 > 0$ سره ضرب $-x^2 < x^3 < 0$) په همدې ډول(⇔ لاس ته راځي او برعس) يعني $0<-x^3<x^2$ او له دې امله $0<\sqrt[3]{-x^3}<\sqrt[3]{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

، نو $0<-x<\sqrt[3]{x^2}$ او له دې سره: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}>0,$

له دې امله د $x1 = 0$ سره یو نسبي تیټتکی (نقطه اضغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کږې یاا منحني تلنلار د لاندې ځیرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلګه کی دې د x ارزښتونه د $f''(x) = f''(x) = 0$ لپاره هم د M په سټ کی ونیول شي.

بیلګه : تابع $y=f(x)=x^4+x$ پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x)=4x^3+1,$$
$$f''(x)=12x^2,$$
$$f'''(x)=24x,$$
$$f^{(4)}(x)=24,$$
$$f^{(5)}(x)=f^{(6)}(x)=...=0$$

په M کی یواځې د ابسځیزی یعنی دپراته محور د غاړوتکی یعنی $\pm\infty$ نیول کیدي شي:

$$M=\{-\infty,+\infty\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1 $f(x) = x^4 + x = x(x3+1)0, \quad M = (0-1)$

2 $f'(x) = 4x+1 = 0$

$M_1 = \{-1/3\sqrt{4}\}, \ y_3 = -3/\ 4\sqrt[3]{4}. = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

$f''(-1/\sqrt[3]{4}) = 12(-1/\sqrt[3]{4})^2 > 0.Min, \ M_{12} = \{-1/\sqrt[3]{4}\}$

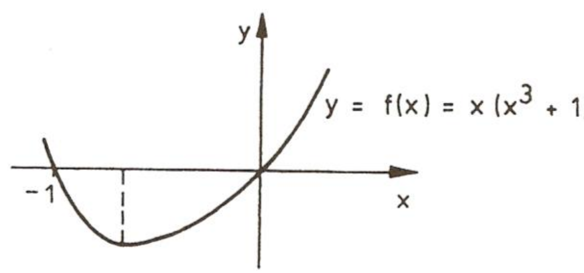
3 $f''(x) = 12x^2 = 0, \qquad M_2 = \{0\}$

$f'''(x) = 0$

4 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

د x=0 سره هیڅ اوړونتکی مخ ته نه لرو، ځکه چی f'(x) هلته اکستریموم ارزښتونه نه لري، بلکې یو اوړونتکی $y = x^3$ (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی یا پورته شوی) .

دا د ځیري ۲۰ ، ۱۳ سره سم د کږې تلنه ورکوي.



ناټاکلي حدونه یا پولې

یا د ناټاکلو افادو(وینو) حدونه یا پولې

(c) ketabton.com: The Digital Library

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو حد پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایي، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کیدی شي.

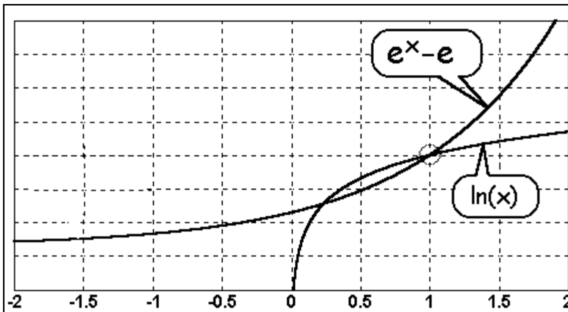
که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود x=0 لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

پیل خیرنه:

د $\frac{0}{0}$ حالت

که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

بیلګه: لاندې د الماني ښتو: صورت یا ماتباندې، مخرج یا ماتلاندې

$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$ په خیره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعنې د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه. ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکندود(لیکنډول): د افادې $\dfrac{\text{صورت} \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$

لپاره په پوله شمیرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده څېل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمیرل کیدی. د لوړې ریاضي سره دا کار شمیرنه شونی شوه(دبیلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسې به وڅیړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمیرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \qquad \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ – که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د x=1 په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده 0:0 به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u=f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

۲ – ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمیرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلګه کې.

۳ – د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نزدې برابر شي.دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001}=100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100}=100$$

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي او د دې لو، پیتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کیږي، چې مخرج او صورت (ماتباندې او ماتلاندې) همغه صفرځاي x_0ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ موخه وره (هدفمنده) نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅیړل شي، په کومو کی چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بیلګي په توګه تابع

$$f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$

صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2ولري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتیجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوي منځ ارزښتقضیي استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده :

که توابع u=f(x) اوv=g(x) د یوه $U(x_0)$چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq0$سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 دfاوgیوصفرځاي وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: تابع د پراخه شوي منځ ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره
یو xmد $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0 \wedge g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د x->x0 سره xm->x0 هم هڅه کوي.
دx->oe په حالت کی x=1/z ځاي په ځاي کوو. د زنځیري قضي په مرسته لاس ته راځي:

$$u=f(1/z)$$

د مشتق $du/dz = f(1/z)\cdot(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z}).(\frac{-1}{z^2})$ سره

، داسې چې لرو :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کی $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي ، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سري دn-پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چی $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n - م مستق په معني دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(جګعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د x->oe لپاره په غښتلې توګه جګیږي، نسبت لوګاریتم تابع lnته

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0$$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل تابع e^x دx په هرتوان تابع څخه په غښتلې جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بڼه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

له تیپ یا بڼې $\infty-\infty$ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته

ددي لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼې $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګې په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د $x\to 0$ لپاره ښایي. په کوم کی چې ضرب د ویش په ځیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0 ته:

دلته د بیلګې په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x\to 0$ لپاره تر ځیرنی لاندې نیول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بڼې بدلون یا فورم بدلون و بنسټe ته د یوې انځورونې په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونی ، د بیلګي په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او x د $x\to\infty$ $x\in R^+$ سره:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}} = e^\mu$$

د μ=1 له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بڼې ∞^0 و بڼې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته

دا کارونه په یوې بیلګي روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$ سره

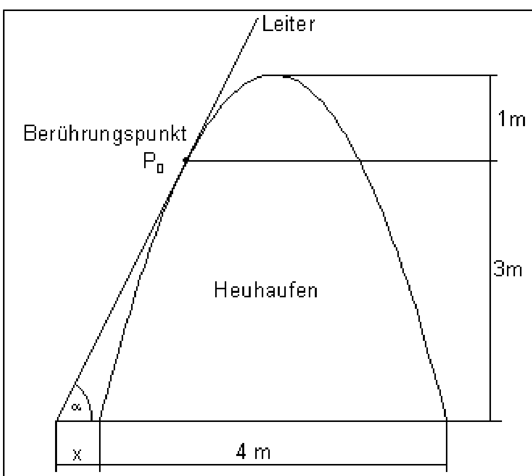
(c) ketabton.com: The Digital Library

بايد لاندې جدول كې پام وشي. لرې يا تې: شي

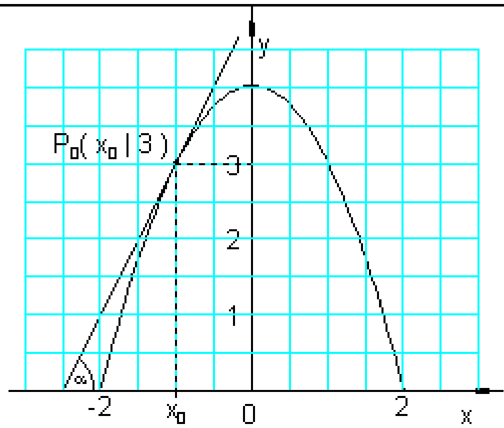
لاندې جدول د پورته ښوول شوو ښويا ډولونو د بڼی بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

بڼه بدلون يا لنډ: بدلون	$g(x)\to$	$f(x)\to$	تيپ(ډول)
$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$	0	0	$-\infty$
$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\to\frac{0}{0}$ $\wedge (Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\to\frac{\infty}{\infty}$		0	∞
$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د $f(x)>0$ سره.	0 0	0 1 0	∞

د يوې تابع د استعمال بيلګه د تانجنت له پاره :

	له ځمکې څخه د وښو په ټوپی يوه زينه اينبول کيږي. دا زينه په درې متره جګوالي ټوپی لم د وښو توپی دې د يوه کينسکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ يې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري. غواړو په دې يوه زينه کيږدو، چې د وښو ټوپی سره تانجنت جوړ کړي. په کومه زاويه(کونج)بايد دا زينه کېښول شي؟ د وښو ټوپی له بيخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زينه کينبول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرۍ(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت x_0 = -1 کاروو. زینه توپی په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \qquad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ \bar{f}(x_0) = 3$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63,4^0}}$

د زينې او د وښو ټوپې تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځايونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2,5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 0,5دی.

زينه د وښو د ټوپې له پښو څخه بايد نيم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کيږي، چې يو ګراف په تعريف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله يا قضيه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د يو څو بيلګو له لارې وڅيړل شي.

نږدې ټولو پروسو کی ، چې په عمل کی کارول کيږي يا صورت نيسي، له تاثيروونکو يا په همدې ډول د هغو ټاکلو لويو استعمال ته اړ دی، کومی چې موږ په ځانګړو يا مخصوصو پولو کی په اختيار کي لرودی شو.

موږ يواځې هغه پروسې تر څيړني لاندې نيسو چې د يوې واريابلی يا اووښتونی x په واك کی وي. دا د بل په واك کی د يوې تابع $y = f(x)$, $x \in D$ له لارې څرګندولی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که y تیول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چی f(x) مینیمال یا خورا کم شي.

که په څټ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسی لاس ته راوړل شي، چې f(x) ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك واریابل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنيك یا تخنیکپوهنی له امله ، یوائی په ټاکلو پولو کی

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلی ، په دې پورې اړه لري، چی ایا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینګ تړلی دی. دلته ځمونږ علاقه په ځانګړې توګه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو (y = f(x ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفي ورکولو سره سم(د مودالیټي پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (*)

دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

بیلګه : یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چي تیول اوږدوالی یی L دی. له دي سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورګوډیزه هواره)، چی د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د مودالیټيArt und Weise پرابلم : غوښتنه مو د یوې ځلور ضلَعي(څلورګوډې) پیداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي (-ګوډې) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ بي په b ښایو، د څیرې ۲۰ . ۱۴ له مخې) .

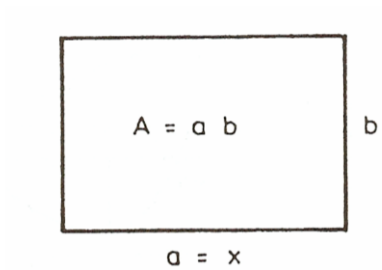
دا په سر کی دوه اغیزې لرونکي یا تاثیراچونکی لویي a او b دي. د

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله یواځي یوې اغیزمنې(تاثیراچوونکي) لویي ته اړیو د بیلګي په توګه $a = x$ ، دا ګټه (ستحه A)داسي ده $A = ab = x((L/2)-x)$

دا روښانه ده چې صدق کوي . $0 \le x \le L/2$

له دې امله د سترې ګټې پرابلم داسی دی



$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \quad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله باید ماکس د 0 او $L/2$ ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یواځي $x = L/4$ په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y''=f''(x) = -2< 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ریښتیا چې یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بیلګه : یوه بډای چې په یوه ټاکلي وخت کی تولسټ (تولډیری) M تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کیدې شي چې سملاسی د دې تولید په تولسټ (تولډیری) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي.
دلته د زېمتون (زخیره کوني) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چې تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي.
مګر تل تولید په دې ډول تولید باندې دروِل، لګښتونه منځ ته راولي، چې د چمتووالی لګښتونه یی بولو. کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چې د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چې خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه اینول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیدډیری M څخه نه شي سترېدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R /x = Min! \quad (0 \leq x \leq M$$

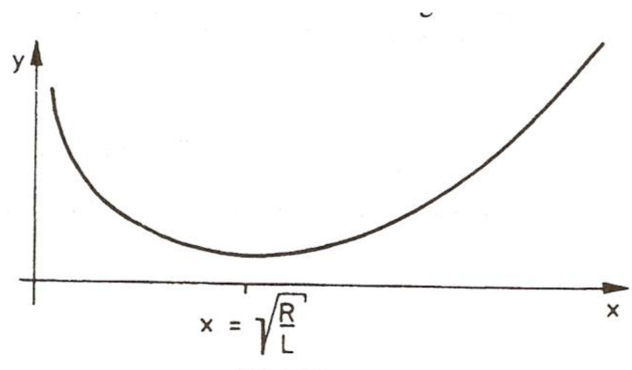
(لمړی f(x) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f '(x) = L -R/x^2 , \qquad f ''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f '(x) = 0$, پس لرو $x = R / L$ ؟؟؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $0 \geq x$ له امله $0 \geq (x)$ '' f هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرږې تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = R / L>M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2< M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي > $R = 1000$ $M^2L = 108 . 10 = 109$ستر یا غټ ازاد لګښت دی $x = R / L = 1000 / 10$ $10 = 100 =$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړيږد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېری) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښايي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابعK مشتق.

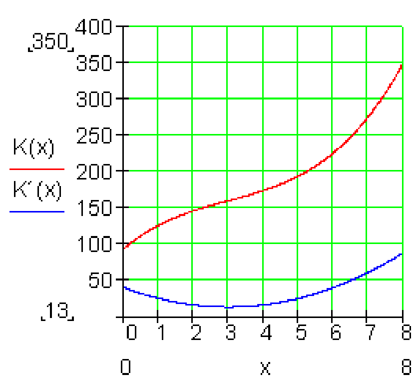
پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتفارزښت**K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګښت**K'(x)** هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکئ، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږئاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکئ:



لاندې تابع لرو:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

(c) ketabton.com: The Digital Library

خورا کم د لگښتزیاتوالی(لگښتجگېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعني هلته چي تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

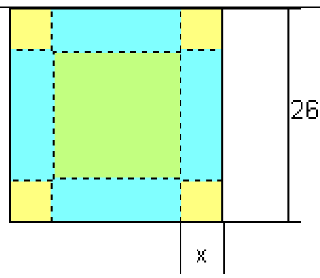
دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

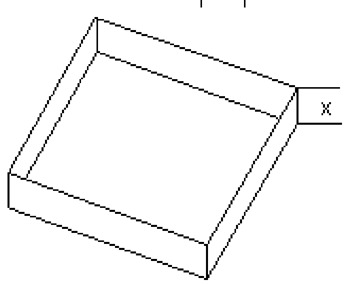
$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چي ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، جي د x جګوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکی، چي د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کي ښایي.

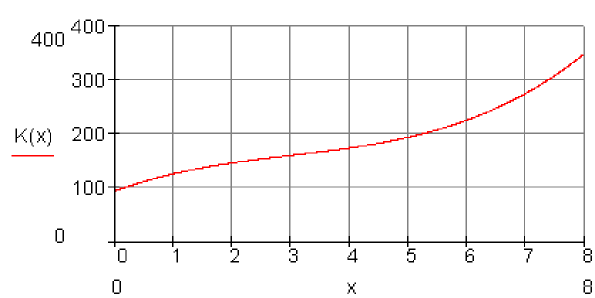
ب – گراف وکاږی او په نږدې توگه یي ماکسیما(خورا جګ) حجم و ټاکی.





- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړېکي انځوروي، داسي چي x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چي 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه:

د رول(Rolle) قضیه:
یوه د f تابع دې په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=(x)$ تابع په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اینتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو ځېړه په نوټ کې ده، دا ښه نه ده کښل شوي
هلته یوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې

لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

پراخه شوې منځقضیه:
که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضیه:
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.
1. که د $f(x)$ تابع په اینتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره
- که $f(x)$ په اینتروال کې همغږیزټیټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې همغږیز جګېدونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که $f'(x) \le 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ایتروالI کې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه همغږیزجګېدونکې ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x = x_0$په چاپیریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0ته پوره نږدی x لپاره باور ولري:

$f(x) > f(x_0)$په همدې ډول $f(x) \le f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چي $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چي د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چي $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f\ '(x)=0\ \ ,\ f\ ''(x)\neq 0$ نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پیژند: په یوه چاپیریال $x=x_0$ کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ یو کیڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چي $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کي راځي، چي د هغي لپاره $f'(x)=0$ وي ، خو حمتي نه ده چي $y=f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y'=f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: f '' (x) = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیزند: د زینتکي(کله کله برندې تکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافتکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافتکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافتکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ ســـره او د ټولـــو $x \in U(x)$ لپـــاره او x_0 د f او g یوصـــفرځاي وي، د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
ترڅو په ښي لور حد شته وي.
په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

تمرینونه:

۱ – د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د x0 په ځای کې وشمېری او د فرمول د اعتبار ورشو(ساحه) ورکړی.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = x\sqrt{x}$
d) $y = \frac{x^2+1}{x}$ e) $y = \frac{x}{x-1}$ f) $y = \sin\frac{x}{2}$

۲– د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځوني د تن دروندتکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s = f(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيلچټکتيا يا پيل سرعت $v_0 = 30\ \frac{m}{s}$ او د ځمکې بيړې(د ځمکېتعجيل) $g = 10\ \frac{m}{s^2}$. سره. دا تن يا جسم کله خپل عظمي جګوالي ته رسيږي؟

دا جګوالی څومره لوي دی
۳ – يو تن په برابر ډوله چټکتيا خوزي(حرکت کوي)، داسې چې بيړه(تعجيل) يې $a = 2\ \frac{m}{s^2}$ دی

په لاندې جدول کې د $\{(\Delta t)_n\}$ لپاره يو صفرترادف(- پرلپسې) کېږدی(د بيلګې په توګه لکه په اوله مټه(ستن) کې) او جدول پوره کړی.

له $t_0 = 3\ s$? وروسته د تن يا بدن لحظوي چټکتيا څومره ده.

۴ – د لاندې تحليلي افادو مشتق ونيسی! پام وکړی، چې د مشتقنيولو کومه قاعده په کار وړی شی

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$

c) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6\cdot\sqrt[3]{x}}{x}$

e) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f) $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g) $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h) $y = (ax^2 - b)^2$

i) $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j) $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)$

۵ – د لاندې ورکړل شوو تحليلي افادو مشتق ونيسی، او هغه ارزښتونه ترې وباسی، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۵ . ۱ –

a) $y = (x-1)(1-x^3)$

b) $y = (x^3+1)(1-x-x^2)$

c) $y = \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3}\right)$

d) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[4]{x} - 2x\right)$

۵ . ۲ -

a) $y = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$

b) $y = 4x + \frac{1}{x^2+1}$

c) $y = \frac{x-4}{4-x}$

d) $y = \frac{x^3-2x+1}{2x^3-5}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{3x^2-2}$

f) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$

g) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

h) $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$

i) $y = \frac{x^3 + 3\sqrt[3]{x}}{2x^2+x}$

j) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}+1}$

۵ . ۳ –

a) $y = \sqrt{x}\,\sin x$

b) $y = 2\sin x\,\cos x$

c) $y = 1 - \cos^2 x$

d) $y = x^3 \cos x$

e) $y = 2\sin x\,(x - \cot x)$

f) $y = \frac{\tan x}{\cot x}$

g) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

h) $y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$

i) $y = \tan x - \cot x - 2x$

j) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

۵ . ۴ –

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}$

c) $y = e^x \tan x$

d) $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

۵ . ۵ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = \frac{\ln x}{x}$ b) $y = \sin x \ \ln x$

c) $y = x^2 \ln x$ d) $y = 10 \ln e \ln x$

۵ . ۶ -

a) $y = 5^x + 2^x$ b) $y = 3^x x^3$

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

۵ . ۷ –

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

a) $y = (2x+1)^4$ b) $y = (1-x^4)^5$

c) $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^8$ d) $y = \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6$

۵ . ۸ -

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ b) $y = \sqrt{1-2x}$ c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ f) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

g) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ h) $y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

۵ . ۹ –

a) $y = 5x^2 \ \sin 2x$ b) $y = \sin^2 x$ c) $y = \sin\sqrt{\frac{x}{2}}$

d) $y = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$ e) $y = \cos\frac{1}{1+x}$ f) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

g) $y = \cot(1-3x)$ h) $y = \cot\sqrt{1-2x}$ i) $y = \sqrt{\tan x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = \frac{\cos x^2}{\pi x}$ k) $y = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$

l) $y = \left(3+\frac{2}{\cos^2 x}\right)\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ m) $y = \left(\frac{3}{\sin x}-5\right)\frac{1}{\sin x}$

n) $y = \tan\sqrt[3]{\frac{1-2x}{x}}$ o) $y = 2\sin\sqrt[3]{\frac{3}{x}}$ p) $y = \frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

۵ . ۱۰ -

a) $y = \mathrm{Arcsin}\frac{x}{a}$ b) $y = \mathrm{Arccos}\,\frac{a-x}{a}$ c) $y = \mathrm{Arctan}\frac{1}{x}$

d) $y = \mathrm{Arccos}\,\sqrt{1-x^2}$ e) $y = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\frac{2x}{1-x^2}$ f) $y = \mathrm{Arctan}\,\sqrt{\frac{x}{x+a}}$

g) $y = \mathrm{Arcsin}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $y = \mathrm{Arctan}\,\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ i) $y = \mathrm{Arccot}\,\frac{1+x}{1-x}$

j) $y = \mathrm{Arcsin}\,2x\sqrt{1-x^2}$ k) $y = \mathrm{Arctan}\frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l) $y = a\cdot\mathrm{Arc}\cos\frac{a-x}{a}-\sqrt{2ax-x^2}$

۵ . ۱۱ –

g) $y = \frac{e^{-\cos x}}{\sin x}$ h) $y = \sqrt{1-e^{-x}}$ i) $y = \frac{\sin\frac{x}{2}}{e^{2x}}$

j) $y = e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

۵ . ۱۲-

a) $y = \ln 2x$ b) $y = \ln x^2$ c) $y = (\ln x)^2$

d) $y = \ln\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{\ln x}$ f) $y = \ln\sqrt{1-x}$

g) $y = \ln\tan x$ h) $y = \ln\ln x$ i) $y = \ln\cot\frac{x}{2}$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = \ln \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ k) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

l) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)$ m) $y = \ln \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ n) $y = \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$

o) $y = \ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$ p) $y = \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$

q) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}$

۵ . ۱۳ –

a) $y = |x|$ b) $y = \sqrt{|x|}$ c) $y = \ln |x|$

d) $y = \sqrt{|\ln \cos x|}$ e) $y = \ln |\ln |x||$

۵ . ۱۴ -

a) $y = \sqrt[x]{x}$ b) $y = (x^x)^x$ c) $y = x^{(x^x)}$

d) $y = x^{\sin x}$ e) $y = (\cos x)^{\sin x}$ f) $y = a^x \cdot x^a$

g) $y = x^{e^x}$ h) $y = a^{e^x}$ i) $y = (\mathrm{Arc}\tan x)^x$

j) $y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$

۶ – تانجنت په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې په منحني $f(x)$ د x–محور سره کومه زاویه (کونج) جوړوي

a) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ b) $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 0$

c) $y = \left(x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$, $x_0 = 1$ d) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}$, $x_0 = 0$

e) $y = x\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$ f) $y = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

g) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$ h) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

i) $y = \sin(2\pi - x)$, $x_0 = \pi$ j) $y = \sqrt{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

1

(c) ketabton.com: The Digital Library

k) $y = \sin\sqrt{2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ l) $y = (x-1)e^x$, $x_0 = 0$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحني کوم ټکي کې غوڅوي، که زاویه او همداسې وي.

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x \cdot |3 - x|$

d) $y = \frac{x^2 - 3}{2x}$ e) $y = \frac{x^2 + x + 14}{x + 2}$ f) $y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3}$

۸ – د ورکړشوو تخليلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړی! و ازمايې، چې ايا د مشتق قابليت کې د يو ګونو ورشو ګانوو يا ساحو کې تغير راځي!

د -م مشتق لپاره يو عمومي فرمول ورکړی، ترهغې چې شته وي.

a) $y = x^n$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = \sqrt[4]{x^3}$

d) $y = \sqrt{1 - x^2}$ e) $y = \frac{x}{1-x}$ f) $y = \frac{1+x}{1-x}$

g) $y = \cos x$ h) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ i) $y = \sin(1-2x)$

j) $y = x^2 \sin 2x$ k) $y = \tan x$ l) $y = \tan^2 x$

m) $y = e^x \sin x$ n) $y = e^{mx}$ o) $y = e^{-x} + e^{-2x}$

p) $y = \ln x$ q) $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$ r) $y = \operatorname{Arcsin} x$

۹ - د تانجنت مساوات $y = mx + n$ په $y = f(x)$ کيږدی.

۹ . ۱ -

a) $f(x) = x^2 + 1$, $P_1(1, y_1)$ bzw. $P_2(-1, y_2)$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$, $P_1(0, y_1)$ bzw. $P_2(2, y_2)$

c) $y^2 = 1 - x$, $P_0(-3, y_0)$ d) $y^2 = x - 1$, $P_0(5, y_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۹ . ۲-

a) $f(x)=e^{-x}$, $m=-1$ b) $f(x)=-x^4+3x^2-4$, $m=0$

c) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $m=1$ d) $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $m=-1$

۱۰ – د لاندې توابعو $y=f(x)$ په څېټ تابع (برعکس تابع)$(f^{-1}(x))$ مشتق dx/dy په $P_0(x_0,y_0)$ ټکي کې وشمېرئ(جوړ کړئ)

a) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x+1$, $x_0=-1$ b) $y=x^2-2x-1+\frac{2}{x}$, $x_0=1$

c) $y=\frac{1}{2x^2-5x+9}$, $x_0=\frac{5}{4}$ d) $y=\frac{x+1}{x+2}$, $x_0=-3$

e) $y=\sqrt{1-x}$, $x_0=1$ f) $y=\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, $x_0=\frac{a}{2}$

g) $y=(x+1)\sqrt{1-x}$, $x_0=-1$ h) $y=\sin x$, $x_0=0$

i) $y=\sin(2x+3\pi)$, $x_0=-2\pi$ j) $y=\sin^2 x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$

k) $y=x\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$ l) $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x_0=\frac{3\pi}{2}$

m) $y=e^x\cos x$, $x_0=0$ n) $y=x\,e^{\cos x}$, $x_0=2\pi$

o) $y=e^x(x^3-3x^2+6x-6)$, $x_0=1$

p) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$, $x_0=x\in(-\infty,\infty),\ a\neq 0$

q) $y=\ln(x+1)$, $x_0>-1$ r) $y=\ln\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$, $|x_0|>\frac{4}{3}$

s) $y=x^{\frac{1}{x}}$, $x_0>0$, $x_0\neq e$

۱۱ – لاندې تحلیلي افادي په متماديت او مشتق والي باندې و څیړئ،

a) $y=\begin{cases}-a & \text{für } x\le 0\\ +a & \text{für } x>0\end{cases}$ b) $y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+1 & \text{für } x\le 2\\ -2 & \text{für } x>2\end{cases}$ c) $y=|x-1|$

d) $y=|\sin x|$ e) $y=-\frac{x^2}{2}$ f) $y=-|x|$

g) $y=\sqrt[3]{x^2}$ h) $y=(x+1)^3\cdot\sqrt[3]{x^2}$ i) $y=e^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

j) $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ k) $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $y = \text{Arccot}\,\frac{1}{x}$

m) $y = \text{Arcsin}\,(\sin x)$ n) $y = \text{Arctan}\,(\tan x)$ o) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p) $y^3 = 3x^2 - x^3$ q) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحني چې د پسې برابرونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اوړونټکو(نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړئ.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ c) $y = x^3(8 - x)$

d) $y = (x - a)^4 + b$ e) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ f) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ h) $y = \frac{ax^2}{ax + b}$

i) $y = \frac{a^2(a - x) + b^2 x}{x(a - x)}$ j) $y = \cos^2 x$ k) $y = \sin x\ \cos x$

l) $y = \sin 2x - 2\sin x$ m) $y = e^x \sin x$ n) $y = x\,e^x$

o) $y = x^n e^{-x}$ p) $y = e^{-x} + e^{2x}$ q) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r) $y = x \ln x$ s) $y = x \ln^2 x$ t) $y = \frac{1}{2}\ln x - \text{Arctan}\, x$

۱۳ - د دې لاندې برابرونونو سره ورکړ شوې منحني تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x\,(x + 3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x + 2)\,(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1 - x)\,(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x - 2)^2\,(x - 4)\,(x + 3)$

e) $y = \frac{1}{24}x\,(x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$
b) $y = -(x+4)^2 + 4$
c) $y = x^3 - x^2$
d) $y = x^3 - 10x$
e) $y = -x(x+3)^2$
f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$
h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$
i) $y = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$
j) $y = (1 - x)(x^2 + 6x + 8)$
k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$
l) $y = |-x(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$
b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$
c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$
d) $y = (x-2)^2(x-4)(x+3)$
e) $y = \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$
f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$
g) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$
h) $y = (x+2)^2(x-1)^3$
i) $y = x^2(x^2 - 1)^2$
j) $y = (x-4)^4(x+3)^3$

13.3. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$
b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$
c) $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$
d) $y = \frac{2x+x^2+25}{1+x^2+2x}$
e) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$
f) $y = \frac{x^2+2x+1}{2x}$
g) $y = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$
h) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-2x+1}$
i) $y = x - \frac{4}{x-1}$
j) $y = \frac{x^3+2}{2x}$
k) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$
l) $y = \frac{2x^2-6x}{x^3-3x^2+x-3}$
m) $y = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$
n) $y = \frac{5(3x^2-4)-13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

13.4. a) $y = x\sqrt{9x - x^2}$
b) $y = x^2\sqrt{25 - x^2}$
c) $y = x\sqrt{14 + 8x - x^2}$
d) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
e) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 2$
g) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$
h) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
i) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$
j) $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$
k) $y = \sqrt{(x+1)^2 - x} - \sqrt{(x-1)^2 + x}$
l) $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2 - x} + \sqrt{(x-1)^2 + x}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.5. a) $y^2 = x^3 + x + 2$ b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ c) $y^2 = x^3 - 2x + 1$

d) $y^2 = x^4(x-1)$ e) $y^2 = x^2[x(1-x)]$ f) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

g) $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ h) $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ i) $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$

13.6. a) $y = 2\sin^2 x$ b) $y = \sin 2x \cos x$ c) $y = \sin x \cos^2 x$

d) $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$ e) $y = x \sin x$ f) $y = \frac{\sin x}{x}$

g) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ h) $y = x^3 \cos x$

i) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ j) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

k) $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ l) $y = \cos 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

13.7. a) $y = e^{-2x}$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x e^{\sqrt{x}}$

d) $y = (x^2 - 1)e^x$ e) $y = e^{\tan x}$ f) $y = 2e^{-x}\sin 2x$

g) $y = e^{2x}\sin 3x$

13.8. a) $y = \ln 3x$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = x^2 \ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\,...\,(x-x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}\ \ ...\ \ \frac{N}{x-x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کېږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

بېلګه:

اصلي پولينوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيداکيږي.

د پولينوم ويش(لنډ: پولينومويش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بيايي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولينوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاينيز (کرښيز-)ضريبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولينوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضريبونو(ځلوونو) د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د x, x^2 او x_0 بايد مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A + B + C = 4 \qquad I$$
$$A - 3B - 6C = -1 \qquad II$$
$$-2A - 10B + 5C = 39 \qquad III$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \qquad V$$
$$-16B - 7C = -41 \qquad IV$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B = -72 \Rightarrow B = 3$

د $B = 3$ په V کې اینسوونه: $-16.3 - 7C = -41 \Rightarrow C = -1$

د $B = 3$ او $C = -1$ په I کې اینسوونه: $A + 3 - 1 = 4 \Rightarrow A = 2$

په ټوټه کونې فرمول کې اینسوونې سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازماینښت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز(کرښیز) ضریبونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرښیز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي نو ددې کرښیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري: $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښیزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کیږي.

بیلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پیدا کیږي.

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لاربښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسر پيل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضريبونو پرتله کونې له لارې.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \text{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \text{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \text{II}$$

دا ضرب د 4 سره او جمعه يې د IV سره : A = 2

د A = 2 اينبوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 اينبونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کېدونکي ضريب ax²+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه کېښول شي يا راوړل شئ

بيلګه:

د پولينوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پيدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولينوم کسر لاندې بڼه لري: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{c}{x+1}$ بڼې کسر سره يوځاي مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بيايي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

د ضريبونو A,B,C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

A+C = 5 I

A + B + 2C = 8 II

B + 4C = 9 III

د III کمښت (تفريق) له مساوات II څخه د I سره يې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې يا متحولې لري:

A − 2C = 5 IV

A + C = 5 I

مساواتIII منفي مساواتII : $-3C=-6\Rightarrow C=2$

د C = 2 په I ائښوولو سره : $A+4.2=9\Rightarrow B=1$

د C = 2 په III ايښوولو سره: $B+4.2=9\Rightarrow B=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا د ټوټه کونې فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

ج) نا اصلي پولينوم کسرونه:

که د يوه پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولينوم د مخرج له درجې څخه لويه وي، نو دا په پولينومويش له لارې په ټولناطق کسر او يوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بيلګه:

کسري پولينوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولينومونو ټوټه کړئ .

د پولينوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو يو نا اصلي پولينومکسر مخ ته پروت دئ.

پولينوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتي – يا باقي کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عمليه) مخ ته بيايو.مخرج په کرښيزو ضريبونو ټوټه کړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$ دی.

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځاي کوو:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$A + B = 4 \qquad \text{I}$$

$$2A - 4B = 4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

په II کې اېښوول: $2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (بښتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندې بڼه غوره کوي:

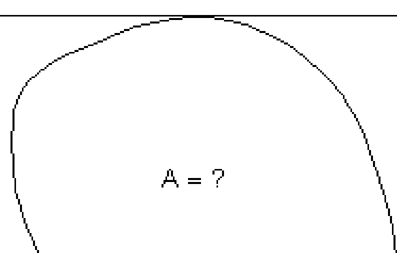
$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنه

د انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

موږ د څمککچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چې د کرښو رابند تنونو یا جسمونوسطحه او ډکی یا حجم څنګه وشمیرو.
که یوه سطحه له ګرږط(-کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟
دا مو انتیګرال شمېرنې ته رابولې.

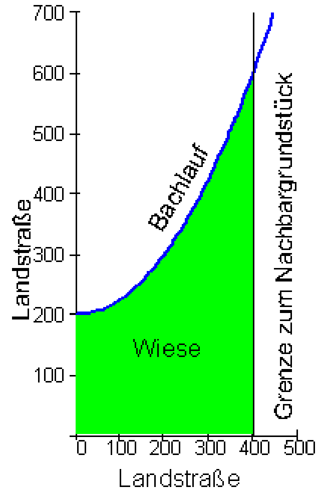
پخوانیو یونانیانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمیرلو اصول معلوم وو. دا دمشتق شمیرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پیړۍپاي کې) د طبیعي علومو پوهانو لایبنیځ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.	

پیلبیلګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ښیراه شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له ښکته لور هم د یوې کوڅي را بند دی. ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي.

د پلورونکی لپاره سطحه باید نزدي پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسي باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېرل شو.



وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره توټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.

$200\cdot 50=10000$

$206\cdot 50=10300$

$225\cdot 50=11250$

$256\cdot 50=12800$

$300\cdot 50=15000$

$256\cdot 50=12800$

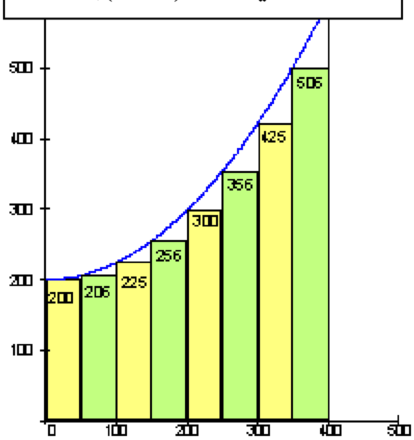
$425\cdot 50=21250$

$506\cdot 50=25300$

$\underline{123700}$

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو توټو(پټیو) توټه کیږي

د اوږدوالي واحد(یوون)په m



(c) ketabton.com: The Digital Library

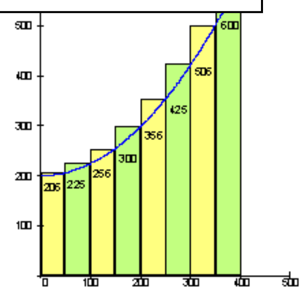
د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو.

$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$356 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$600 \cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$

د اوږدوالي واحد(یوون)په m



د د پلورونکي له پاره د ټولې سطحې مساحت نږدې $143700\ m^2$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قېمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قېمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2}=133700unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شمېرنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمېرنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چېرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

انتیګرالشمیرنه Integralcalculation

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:
دا دانتیګرال هندسي مفهوم هم دی.
په کارتېزي وضعیه قیمت سیستم کي د ګراف په سرچینه کي یوه کرښه رسموو.
غواړو سطحه پیداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې
پرته وي(د x تابع وي).

د ریمن (ټاکلی) انتلګرال

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتېګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو ځوک یوې پردۍ ټولنې ته ورګډېږي یعنې ددې پردۍ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې فنکشن یا تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف:

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کي د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.

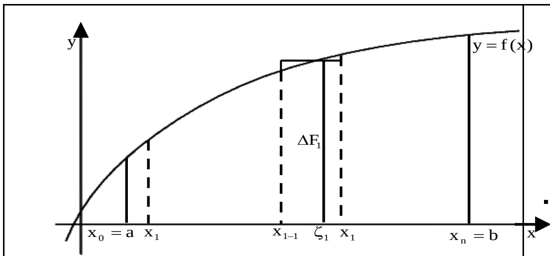
تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څېر یا برعکس کارونه یا عملیه ده.

یو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو $x_0 = a$ او $x_n = b$ ترمنځ هواره (سطحه) وشمېرو داسې چې $(f(x)>0)$ وي.
(څېره ۱ . ۱)



ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اینتروال په n (نه اړیین) برابرو برخو انتروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 <...< x_{i-1}x_i <...< x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینتروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه$\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل سطحه (و لاړکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i , \qquad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعې (زیاتون) له لارې غوښتونکې، نزدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi)\Delta x_i ;..............................(4,2)$$

دا نږدیوالی تر هغې ښه کیږي ځومره چې د اینتروال [a , b] ویش نری شي یعني $\max \Delta x \to 0$ ،هرڅومره چې د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اینتروال [a , b] څنګه ویشل شوی

او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینتروال [a,b] کی اینتیګرالوړ دی. دا د بیلګي په

توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیټ   (پوله)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه

F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کېدونکي لاندې(کښته)پوله یا حد او b د ایتیګرال کېدونکي پورته پوله یا حد بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرال کېدونکي اینتروال او((f (x Integrand) اینتیګرالېدونکی) او dx د اینتیګرال کېدونکي متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخنخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

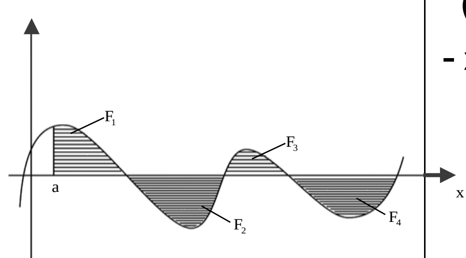
یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) ≥ 0 باوري نه وي .

که $f(x) < 0$ وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري

.

که د $y = f(x)$ کږه - لکه په (ش ٤ . ۲) کی - دانیتیګرآلونې په اینتروال کی د x - محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$$



د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ . ۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چی تابع f (x) اینتیګرالوړ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ دا لاندې تعریف(پېژند) لرو :

پېژند یا تعریف ٤ . ۲ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

د پېژند تعریف ٤ . ۱ له مخې تل باور لري: $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

بنسټیز- یا لومړنی تابع

ددې لپاره چې د مشتقنیولو او اینتیګرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پېژند (تعریف): تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ (x) F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x) بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

په ساده توګه لیدل کیږي چې د یوې f (x) تابع لپاره نه یواځې یو بنسټیز تابع F (x) موجود دی، د بیلګې په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکې په عمومي ډول

$F (x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه f (x) = 2x لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته ښوونو پایله، چې څنګه سرې د یوه متمادي تابع f (x) لومړنۍتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کې متمادي تابع وي، نو د a ∈ I لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ د f (x)، یوه لومړنۍتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

د f (x) هره بله لومړنۍ(بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$F(x) = F_a(x) + C,\ C \in R$

ځواب :

ښایو چې Fa (x) د f (x) بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چې د Fa (x) لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د x ∈ I او x ≠ a لپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^{x} f(t) dt \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t) dt$$

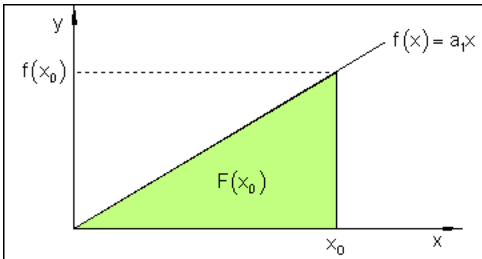
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi),\ \ \xi \in [x, x+h]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(د ليميټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دی
(د متماديت له امله $(f(\xi) \to f(x))$
$= f(x)$

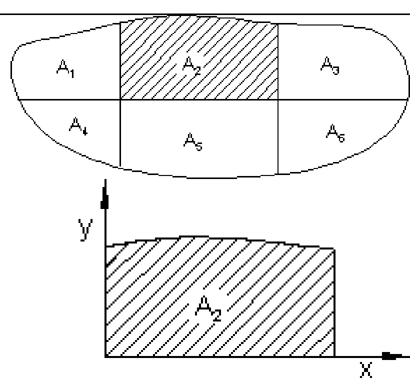
سطحه او لومړنی تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x)=a_1x$ ګراف په کارتيزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته $A=\frac{g\cdot h}{2}$ ساده پيدا کيږي: زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغيروو: $A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0)=a_1x_0$	 $F(x_0)=\frac{x_0\cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندي ډول دی: $F(x_0)=\frac{x_0\cdot a_1x_0}{2}=\frac{a_1}{2}x_0^2$

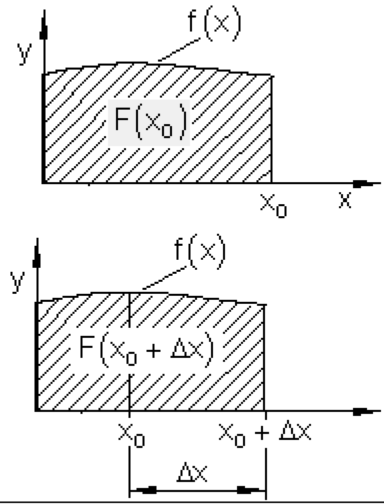
تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعيت) کې تشريح کوي يا ښايي. موږ دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

د سطحې پرابلم:

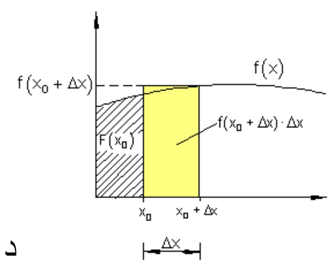
هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط يوه يوه کږه کرښه رامنځ ته کيږي. نورې ټولې رابندونې سيده کرښيزې دي. هره يوه د سطحې برخه(د بېلګې په توګه دلته **A2**) کېدی شي د وضعيه قيمتونو سيستم کې د يوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

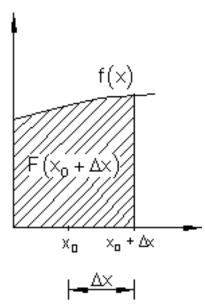
که له کږوکرښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبېلګه کې؟
که داسي يو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندې تنظيم کړای شي.



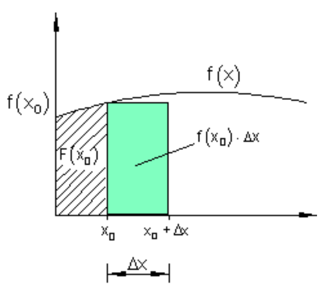
په يوه څلورضلعي(مستطيل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د رښتوني سطحې څخه لويه ده



$F(x_0+\Delta x)$ ريښتونې سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ريښتوني سطحې څه کوچنۍ ده.

که د سطحې پټې (يا کوچنې مستطيلونه يا ولاړکوډيز)هرڅومره کوچنې شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |: \Delta x$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ یې نیسو(پوله یې پیدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $F'(x_0)=f(x_0)$

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کږې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.
موږ لیکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{یا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بریالي شو، داسې یو تابع F(x) پیداکړو چې مشتق یې د رابندې کږې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سږی کړی شي فورمال ووایي:
د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیداکړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انتېګرالول یې شمېږو.
د یوه ساده توان تابع په بیلګه د احساس له مخې یوه لار پیداکیدی شي، چې دا څنګه ایتېګرالوي.

توانتابع :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.
دا همدا اوس ازمايو:

پوتنځتابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

ناټاکلی انتيګرال

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتيګرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که ديوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنۍ تابع، يعنې F(x) وپېژنو، نو د يوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنيو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه يو حقيقي عدد دی).
مورږ د f(x) تابع د F(x) لومړنۍ تابع ټاکنه يا اينتګرلونه هم بولو او ددې له پاره ليکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال ليکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
مورږ لومړنۍ توابع پلټو

بيلګه:
لومړنۍ تابع F(x) دې پيدا شي، چې مشتق يې f(x) = 2x دی.
قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ازمايو:

$F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$

د لومړنيو توابعو سټ(ډېرى)

بيلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د f(x) د لومړنييو توابعو سټ بولو.

بيلګه

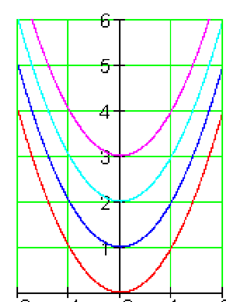
یو لومړنیتابع F(x) دې پیدا شي، چې د هغه مشتق f(x) = 3x² + 2 وي.

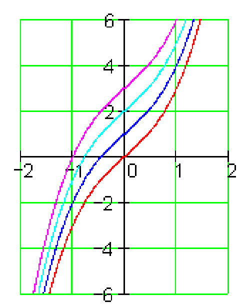
$F(x)=x^3+2x+C$ ، ځکه چې $F'(x)=3x^2+2=f(x)$

د ټولو لومړنيو توابعو ډېرى دې د منحنيو ډلې په ځېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپیر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x)=x^2+C$ $F(x)=x^3+2x+C$





(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توګه په ،، برعکس مشتقولو،، له لارې. موږ د مخه ځنې انتیګرال قاعدې لوستلي.

لکه چې ومو لیدل دواړه تمرینونه د همغه تیپ او اصولو له لارې اجرا کیږي، خو یواځې لیکنه یې توپیر لري

دویم(لاتین) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتیګرال اصلي جملې ته ګوته نیسو.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left|F(b) - F(a)\right|$$

د یوې ساده بیلګې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سې مخ ته ځو

تمرین (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی لیدونکی ګوري یا پیژني، چې د سطحې مساحت په دې بیلګه کې بې له مطلق ارزښت شمیرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بیلګه کې سطحه د x- محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکمیل – یا *پوره کیدنې لپاره بیلګې.

1 . ټول تام کسري تابع د x -محور او د کرښو x = -2 او x = 1 سره یوه سطحه پوره رابندوي یا راتړي. د سطحې مساحت وشمیرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$
$$a = -2 \;,\;\; b = 1$$

2 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځایونه وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وکاږئ. (ب) وښایئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړنی تابع دی. (پ) د *f(x)* اوx - محور څخه پوره رابندې سطحې مساحت وشمیرئ.

:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot \left(2x - x^2 + 1\right)$$
$$F(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}$$

3 . د ٤ – مې درجې تامراشنل تابع د x- محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره يوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښايئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

٤ . د *f(x)* مثلثاتي تابع د -محور د a او b ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د *f(x)* او x -محور تر منځ د x=a تر x=b په انتروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$a = -\frac{\pi}{6}\ , \ \ b = \frac{3}{2}\pi$$

5 . دوه تامراشنل توابع *f(x)* او *g(x)* په ټکو A, B او C کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د *f(x)* او *g(x)* ترمنځ له x=a څخه تر x=b انتروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{1}{2}$$
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$
$$A(a;0)\ ,\ \ B(b;0)$$

6 . د وضعيه قېمتسيستم په لومړئ او دويمه څلورمه(ربع) کې تابع *f(x)* او *g(x)* تابع ټيک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅټکي يې وښاياست او انځور يې وکاږئ. (ب) د دواړو ګرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابنديږي.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$
$$g(x) = 3\tfrac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7 . د دوه توابعو $f(x)$ او $F(x)$ مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرځایونه يې وشمېرئ او د $f(x)$ ګراف وکاږئ. (ب) وښایئ، چې $F(x)$ د $f(x)$ لومړی تابع دی.

(پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د $f(x)$ له ګراف د وضعيه سيستم له محورونو او د کرښې x=4 خخه رابنده وي.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$$
$$F(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

8 . کسري راشنل تابع د -محور ، کرښې او کرښې سره په دريمه څلورمه(ربع) يوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښایئ.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+2x}{4x-2}=\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}$$

حلونه.

$$F(x)=\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{4}{3}x^3+2x+c$$
$$G(x)=\tfrac{1}{20}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{4}{3}x^3+c$$
$$H(x)=\frac{1}{3}a\cdot x^3-\frac{x^2}{6}+x+c$$
$$K(x)=\tfrac{1}{2}x^4-4x^2+c$$
$$L(x)=\frac{x^5}{10}+\frac{2}{9}x^3-4x+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۲ -

$$\int f(x)\,dx = x^2 + \tfrac{1}{4}e^{4x} + c$$

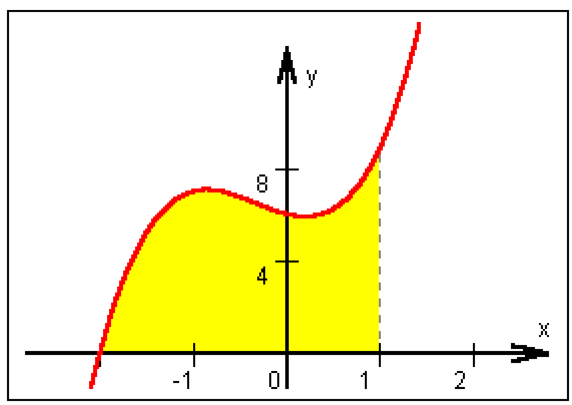
$$\int g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x} - \tfrac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x| + c$$

$$\int k(x)\,dx = -\cos x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int l(x)\,dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

۲ . ۱ –



$$A = \int_{-2}^{1}\left(2x^3 + 2x^2 - x + 6\right)\cdot dx$$

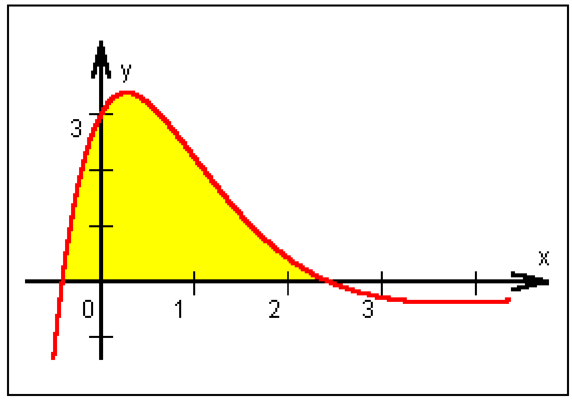
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|6\tfrac{2}{3} - \left(-11\tfrac{1}{3}\right)\right| = \underline{\underline{18FE}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۲ : ۲ –



$$F'(x) = f(x)$$

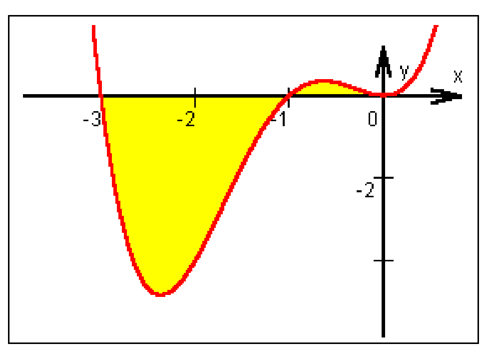
$$F'(x) = 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3(x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= 3e^{-x} \cdot (2x - (x^2 - 1)) = f(x)$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = [F(x)]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = \left[3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx |1{,}30 - (-3{,}76)| = \underline{\underline{5{,}06\, FE}}$$



۲ : ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx + \int_{-1}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx$$

$$A = \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-3}^{-1} + \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$A = \left|-0{,}2 - 5{,}4\right| + \left|0 - (-0{,}2)\right| = \underline{\underline{5{,}8\,FE}}$$

۲ . ٤ ـ

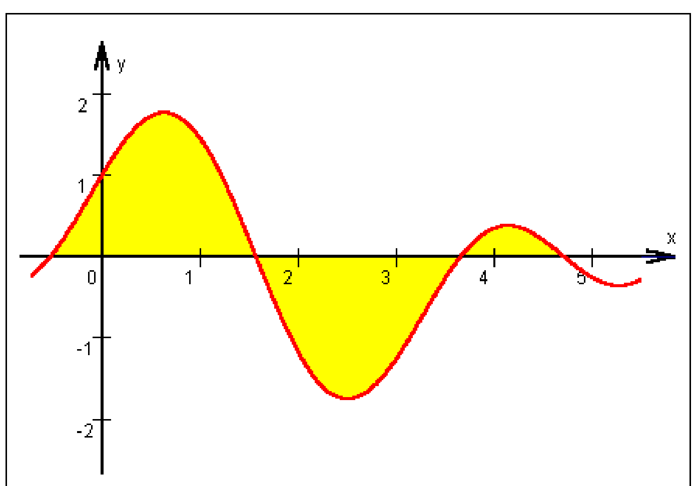
$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$

$$= 2\sin x \cdot \cos x + \cos x$$

$$= \cos x \cdot (2\sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \;\rightarrow\; x_1 = \tfrac{1}{2}\pi\,,\; x_2 = \tfrac{3}{2}\pi$$

$$0 = 2\sin x + 1 \;\rightarrow\; x_3 = -\tfrac{1}{6}\pi\,,\; x_4 = \tfrac{7}{6}\pi$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{x_3}^{x_1} f(x)\cdot dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x)\cdot dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x)\cdot dx$$

$$A = \left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x\right]_{x_3}^{x_1} + [\ ]_{x_1}^{x_4} + [\ ]_{x_4}^{x_2}$$

$$A = 2{,}25\,FE + 2{,}25\,FE + 0{,}25\,FE = \underline{\underline{4{,}75\,FE}}$$

۲ . ۵ –

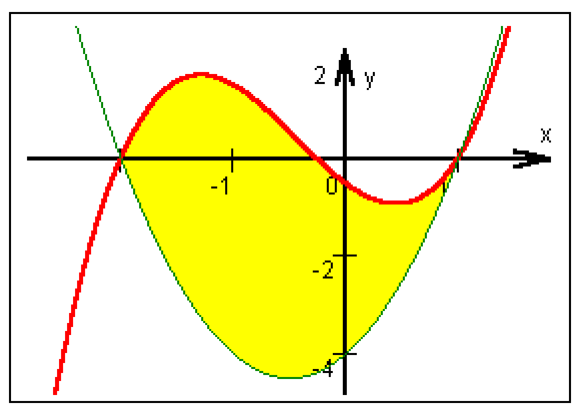
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25}$$

$$\underline{\underline{x_1 = a = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = +1}}$$



$$A = \int_{-2}^{+1} \left(f(x) - g(x)\right)\cdot dx$$

$$= \int_{-2}^{+1} \left(x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - 3\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{1}{2}\right)\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x^3 - 1\tfrac{7}{8}x^2 + 3\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|1\tfrac{5}{8} - \left(-8\tfrac{1}{2}\right)\right| = \underline{\underline{10\tfrac{1}{8}\ FE}}$$

۲ . ٦ –

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

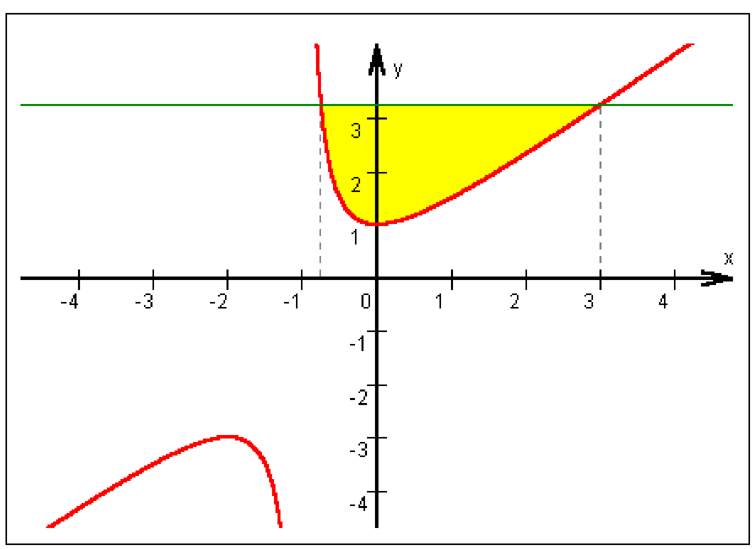
$$x^2 + x + 1 = 3\tfrac{1}{4}x + 3\tfrac{1}{4}$$

$$x^2 - 2\tfrac{1}{4}x - 2\tfrac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \tfrac{9}{8} \pm \sqrt{\tfrac{81}{64} + \tfrac{144}{64}} = \tfrac{9}{8} \pm \tfrac{15}{8}$$

$$x_1 = a = -\tfrac{3}{4}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) \cdot dx$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}}^{3} \left(3\tfrac{1}{4} - x - \frac{1}{x+1}\right) \cdot dx$$

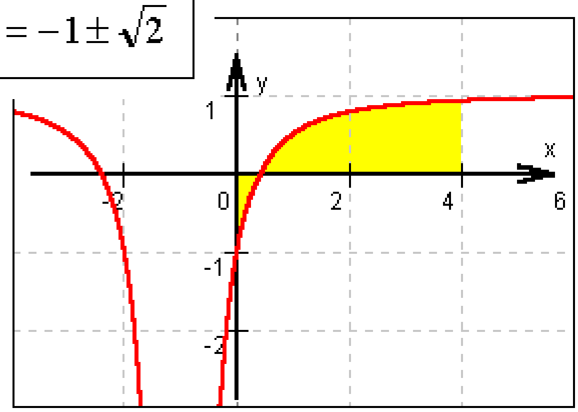
$$= \left[3\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \ln(x+1)\right]_{-0,75}^{+3}$$

$$\approx \left|3,86 - (-1,33)\right| = \underline{\underline{5,19\,FE}}$$

۲ . ۷ –

$$0 = x^2 + 2x - 1$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$



$$F'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

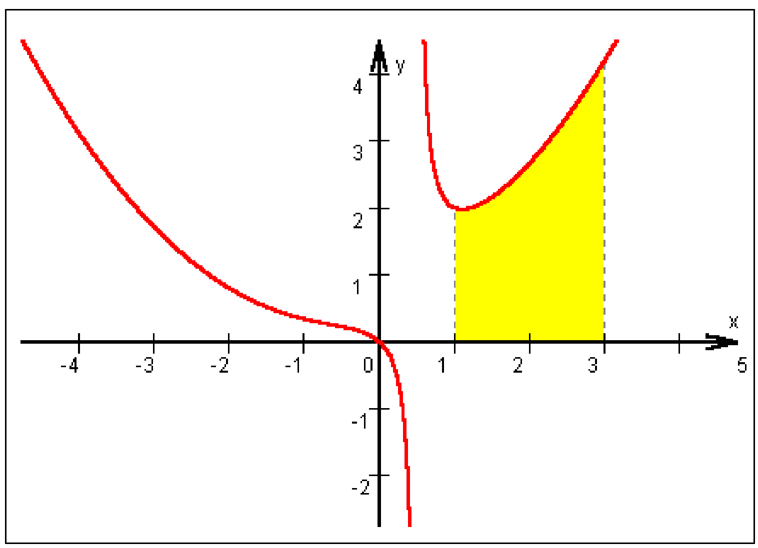
$$A=\int_{0}^{-1+\sqrt{2}} f(x)\cdot dx+\int_{-1+\sqrt{2}}^{4} f(x)\cdot dx$$

$$=\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_0^{-1+\sqrt{2}}+\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_{-1+\sqrt{2}}^{4}$$

$$=0{,}17\,FE+2{,}57\,FE=\underline{\underline{2{,}74\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(يوون) په معنادی

۲ . ۸ _



$$A=\int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}\right)\cdot dx$$

$$=\int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}\right)\cdot dx+\int_{1}^{3}\frac{11}{32x-16}\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1=\left[\tfrac{1}{12}x^3+\tfrac{3}{16}x^2+\tfrac{11}{16}x\right]_1^3=5\,\tfrac{1}{24}\,FE$$

$$z=32x-16$$

$$\frac{dz}{dx}=32\;\Rightarrow\;dx=\tfrac{1}{32}\,dz$$

$$A_2=\int_{16}^{80}\frac{11}{z}\cdot\tfrac{1}{32}\,dz=\tfrac{11}{32}\cdot[\ln z]_{16}^{80}\approx 0{,}55\,FE$$

$$\underline{\underline{A\approx 5{,}59\,FE}}$$

په پورته کې FE د سطحي واحد(یوون) په معنادی

بیلګه:

مشتقوړ مګر نامتمادي (پرېکیدونکی) مشتقوړ تابع:

لرو:

د $x\neq 0$ لپاره د $x=0$ لپاره	$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\\ 0\end{cases}$

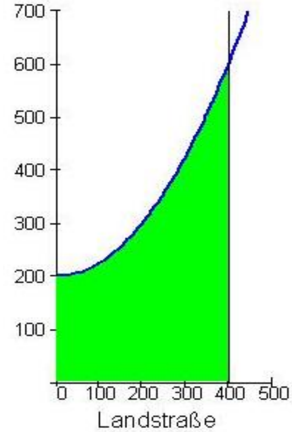
نو $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}=x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\to 0$ د $x\to 0$ لپاره ، له امله مشتق$f'(0)=0$ دی. او د $\forall x\neq 0$ لرو:

$f'(x)=2x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، جبرې چې $\lim_{x\to 0}f'(x)$ ناشته دی. تابع f له دې امله مشتقوړ دی مګر نه ناپرېکېدونکی(متمادي) مشتقوړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتيګرال شميرنه

ټاکلی انتيګرال همغه د ريمن انتيګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شميري(پسې غزېدلی دی، خو تکرار د زده کړې مور ده).



ټاکلی انتيګرال:

که *f* یو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتيګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د *f*(*x*) انتيګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) *b* یا د a او *b* حدونو ترمنځ یا انتيګرال په *f*(*x*) باندې له a تر *b*) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهېږو د *f* ګراف لاندې د a او *b* تر منځ.

G دې په بند انتروال a ≤ x ≤ b کې د g(x) لومړنی انتيګرال وي، د $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ سره، نو باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

دا چې د دوه لومړنيو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپير شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x)=\int_a^a f(t)dt=0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف: f په انتروال a ≤ x ≤ b کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکې رامح ته کې.

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^4 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\, dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې ربښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه:

: د ټاکلي انتیګرال $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ ارزښت و ټاکی.

ښوونه: مونږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

د ناټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

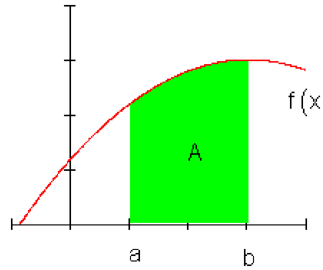
پېژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

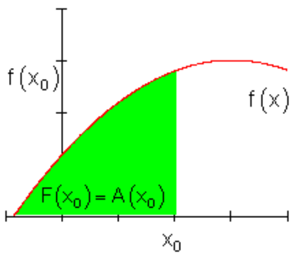
د مشتق- او انتیګرالشمېرني ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرني برعکس انځوروي $$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

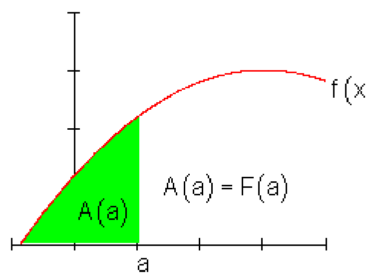
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

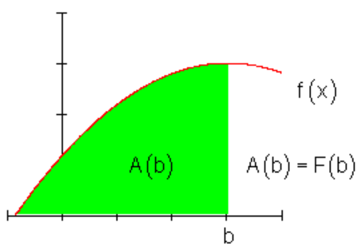
(c) ketabton.com: The Digital Library



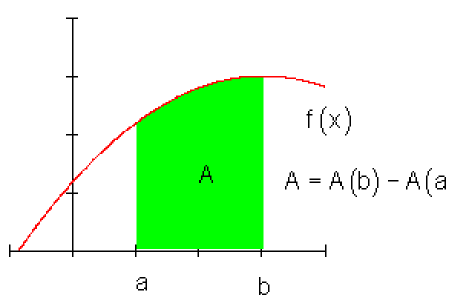


د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وې:
د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې $f(x)$ تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای
پورې او یوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځای د f تابع د تابع ارزښت
سره د x_0 په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړیکې شته دی، یعنې $F'(x)=f(x)$





د انتروال $[a,b]$ حدونو ترمنځ سطحې پیداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په
ځای $(A(b))$ b او سطحې په $(A(a))$ a ځای کې .، یعنې
$A= A(b) – A(a)$په همدې توګه $F= F(b) – F(a)$ لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

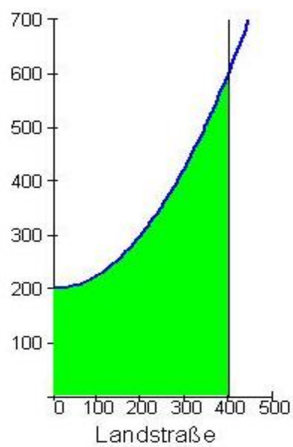
په انټروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنیو توابعو تفریق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتیګرال ټاکلی انتیګرال هم بلل کیږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پیل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفریق سره لرې کیږي. په عمل کې د دې مسألې د حل لپاره یوه بله لار ګتوره راوستلې یا ګټوره ښوولې:



$$A = \int_0^{400} \left(\frac{1}{400} x^2 + 200 \right) dx = \frac{1}{1200} x^3 + 200 \cdot x \,|_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \underline{\left[\frac{1}{1200} 0^3 + 200 \cdot 0 \right]}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = \underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

د انتیګرالوني قاعدی

د ناټاکلي ایتیګرال انتیګرالوني قاعدې: په لاندې اینتیګریشن قاعدوکي د اینتیګریشن ثابته باندې صرف نظر کیږيدلته مساوات تر یوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی په ټاکلي انتیګرال کې ښوولي جملی سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چی د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f\ (x)\,dx = a\int f\ (x)\,dx\ , \qquad a\in R$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنستیزو اینتیګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو: $(a\in IR^+, a\neq 1)\int e^x dx = e^x + C$

د ټولیز اکسپوننشل تابع a^x لپاره لرو: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

بیلګه :

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8}2^x$

د فاکتورونې قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8\cdot\ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x)=\ln x (x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x)=\log_a x, a\in IR^+, a\neq 1)$

لپاره $\int \log_a x dx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a} + c$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

ناټکلی انتیګرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پیدا کړو:

بنه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3dx \div \int \ln xdx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$
$$\int \ln 3xdx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټیز اینتیګرالونه په یوه جدول کې

د اینتیګرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کیدی شي چې د بنسټیزو اینتیګرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټیزو توابعوبرعکس څرګندیږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x)dx$	نیونه یا فرضیه
1	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

6	$\sin x$	$-\cos x + C$	
7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$
9	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بيلګه :

د جدول او تېرو جملو څخه په ګټه لاندې اينيګرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټيز توابعو بدليدلی شي .

$$a)\quad \int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + C \text{ ,..............................1,}$$

$$b)\quad \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \text{ ....3,}$$

$$c)\quad \int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\,dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0), \text{ ....3,}$$

$$d)\quad \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x}dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C \text{ , ...(4,21)} \quad 6,$$

$$e)\quad \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right), \qquad (4,11) \quad 9,$$

$$f)\quad \int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \quad (4,12) \qquad 8,$$

$$g)\quad \int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3}dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\ x \neq 0), \quad Nr.2,$$

$$h)\quad \int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}, \text{ ....5}$$

<u>Substitutionlaw</u> بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه پورې مو فقط انتيګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنيو توابعو په انتيګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنيو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سيده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به وليدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د $f(g(x))$ يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه ايښوول ، لنډ: بدلون) د نيونو يا فرضيو له مخې، چې u = g (x)نه برېکېدونکی يا متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتيګرالېدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی يو فاکتور زنځيري تابع [f [g (x وي او دا بل فاکتور (ضريب) يی د دننه تابع مشتق (g ' (x وي. سرې د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي يا ځاي په ځاي کوي u = g (x) :

مشتق $\frac{du}{dx} = G'(x)$ جوړوي په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بريالي انتيګرالېدو وروسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې انتيګرال وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون یا په ځای کونه: $2x - 1 = u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, مشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

وموليدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملی سره سم د اينتيګرال تر مخ(موخه کيږ لور ده) ليکل کيږي.

بیلګه: لرو $I = \int \sqrt{-3x+5}\, dx$

بدلون: $-3x + 5 = u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$$

$$-2x - 3 = u, \quad \Rightarrow \quad -2 = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{2}du,$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\quad I=\int\frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

د بنسټیزو اینتیګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x یواځې په جګ یا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اینتیګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لاینې ترم (Term (پروت دی، کیدی شي چی د لاینې بدلولو له لارې په بنسټیز اینتیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چی د اینتیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = u, \qquad 2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{2}du$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{6}\text{Arcsin}(2x) + C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنستیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننی تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلګه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1}\,dx$$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x\cdot\cos x\,dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\,dx$$

$$\ln x = u, \qquad :\frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\,dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x \, dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e) \; I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} dx.$$

$$2 - x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3} du,$$

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln|2-x^3|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د ښی وکيڼ(لور هم استعمال شي .
اینتیګرال f (x) dx کیدی شي چی په بل واړول شي چی x په یو مناسب بلواك (
g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا:
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سړی د بدلون وروسته یو ساده
او ممکن یو بنسټیز اینتیګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی
دی چی په یوه بلواك f (x) کی موجود » پیچلی « ترم h (x)د t = h (x) په بدلون
له منځ څخه وړي او بیا) که ممکن وي (د x په لوریی حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف:

$$: a) \; I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\sqrt{x} - 1 = t, \qquad x; x = (t+1)^2, \qquad dx = 2(t+1)dt:$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln|\sqrt{x}-1|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتګرال د دوه ایتګرالو جمعې ته بیایي، دلته

$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه:

عواړو د $f(x)=e^x$ مشتق بیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x)=e^x\ \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x=f(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx \neq e^{2x}+C$$

وي $F(x)=e^{2x}+C$ **دی، که** $F'(x)=2e^{2x}\neq f(x)$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

بیلګه:

د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیگرال ونیسی

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمایینت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :

وښایی چې باور

لري. $f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (x+1)^2dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2 du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته- یا په څټ بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int (x)dx=\int (x+1)^2 dx=\frac{(x+1)^2}{3}+C$

بیلګه :

و بنایي چې باور لري:

$$f(x)=(3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (3x+6)^3 dx$$

بدلون: $u(x)=3x+6=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3 du=\frac{u^4}{12}+C$$

بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$

نو لرو: $\int (x)dx=\int (3x+6)^3 dx=\frac{1}{12}(3x+6)^4+C$

بیلګه :

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

بدلون : $u(x)=x^2=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int\ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u\cdot\ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون:
$$\frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

نو لرو:
$$\int(x)\,dx = \int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه :

وښایاست:

$$f(x) = e^{2x} \quad\Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad\Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

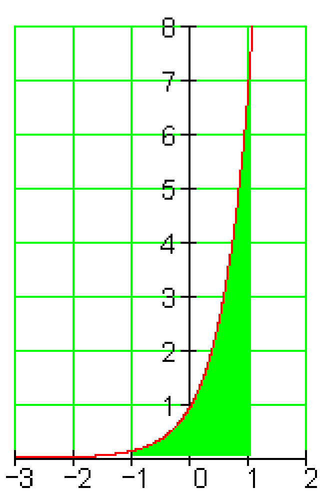
۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1) = -2$
- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$$

$f(x) := e^{2\cdot x}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2)dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

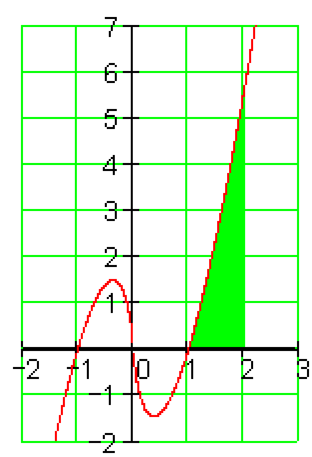
- لاندې پوله $u(1) = 1$
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}du = \int_1^4 \ln(u)du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه :

$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د $x\geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2 (e^x-2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2 (e^x-2)\,dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=(e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

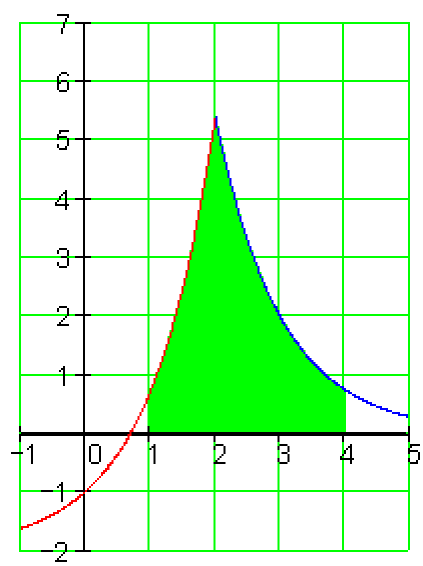
$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du;\ u(2)=0;\ u(4)=-2$$

$$I_2=-(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du=(e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$=(e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7,331}}$$



Partialy Integration ټوټه انتيګرالونه

ټوټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرنې د برعکسکونې په خير وکټل شي.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه انتیګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کیږي، چې د متمادي (نه پرېکېدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون ټیک هلته ګټور دی، که دf مشتقنیولو سره یو ساده تابع منځ ته راځي. پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیوني) څخه لرو:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u'\cdot v = \int (u\cdot v)' - \int u\cdot v'$$

$$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندې انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکي تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مستقکېدونکي تابع $f(x)$ لټوو.
نیسو چې $f(x)=\ln(x)$ او $g'(x)=x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$g(x)=\frac{x^2}{2}. \quad \text{او} \quad f'(x)=\frac{1}{x}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:
اوس دې u اوv په خوبڼه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې u' او v' دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b)\cdot V(b) - u(a)\cdot V(a) - \int_a^b u'(x)\cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x)\cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه : کله کله کېدې شي ګټور وي، چې د مساوات ښې لور ته ټوټه انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بېرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کېږدو $f(x) = \cos(x)$ او $g'(x) = \sin(x)$ ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 وویشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :

د ځنو انتیګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د $g'(x)$ له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدې شي دا بل ترم ،،له منځه یووړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل $g'(x) = ex$ کېږدو او د $f(x)$ له پاره، د انتیګرال لاندې ترم ، نو ترې لاس ته راځي:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \cdot (2-x^2)\,\mathrm{d}x = [e^x \cdot (2-x^2)] - \int e^x \cdot (-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x]$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2+2x-2)]$$
$$= [e^x \cdot (2x-x^2)] + C$$

بېلګه ۳ :

که تر انتيګرال لاندې فقط يو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کېدی شي کله کله د ورزياتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضريب "1" توته انتيګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x) \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - x + C$$

جمله : موږ د دې لاندې انتيګرال نيسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\int x\cos(x)\,dx = \int u\,dv$$
$$= uv - \int v\,du$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتیګرالونـې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالونې د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$$\int x^2 e^x\,dx \text{ او } \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)،
نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول

نیول تر واسه ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرخایونو **x1 = 2-** او **x2 = -4** سره د کرښیزو توابعو په ضربیونو تجزیه کیږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)\ (x-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزیږي او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضریبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه یعني کیڼ لور ته (A+B) افاده باید پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځ**خه لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:**

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون یې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

لیکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx = \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړنی تابع جوړه کړئ: $F(x)=\ln x \rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$. دا چې طبیعي لوګایتم فقط له مثبت اعدادو شمیرل کیږي، نو یواځې ازښتونه نیسو.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = -1 \ln|x-2| + 8 \ln|x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع ‌بدله شي.
دا د ټوټه کسرونو ټوټه کووني له لارې کيږي يا صورت نيسي.
بیلګه :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځايونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښيزو فاکتورونو تحزيه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بيا يي ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضريبونو پرتلي کوني له امله، چې د x ترمخه يعني کيڼ لور ته له (A+B) افادي څخه باید اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او یا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

$$-5x+9 = (A+B)x\ (+3A-2B)$$

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

$$-5= A+ B$$

$$9= 3A-2B$$

د A او B پسي يي حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

B=-4.8

A= (-5+4.8)= -0.2

نو ليکلی شو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=\int[\frac{-0.2}{(x-2)}]dx+\int[\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x)=\ln x\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$$

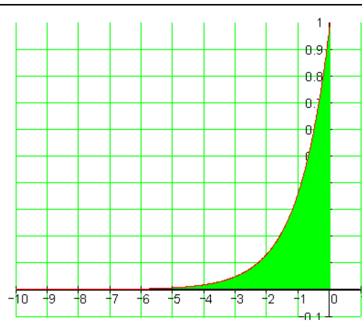
دا چې طبيعي لوګاريتم فقط له طبيعي اعدادو شمېرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=-0.2\ln|x-2|-4.8\ln|x+3|+C$$

ناپاي(مبهوم) انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږيږو. په يوه مناسب ډول ناپا انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څېر تعرفيږي.
په دې توګه په زړه پورې پوهېدنې لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2 \text{ او } \int_1^\infty x^{-2}dx=1$$

	هم او د دې معکوس انتيګارلونه $\int_1^\infty x^{-1}dx$ او $\int_0^1 x^{-1}dx$ ناپاي ته ځي يا له ټولو حدونو اوړي يعنې د ناپای په لور ځي..

د $f(x)=e^x$ ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty;0]$ کې ټوله سطحه و شميرل شي، يعنې

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسي کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتیګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.
فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^{x}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^{x}\right]_{a}^{0}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

د یوه یوځاي اینبول شوې یا یو ځاي شوې تابع بېلګه لرو:

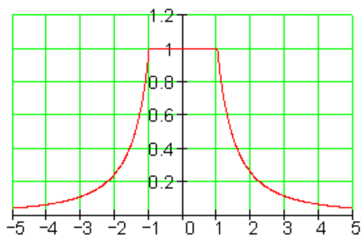
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$	د $x<-1$ لپاراه د $-1\leq x\ 1$ لپاره د $x>1$ لپاره

.
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيګرال په برخو وېشنه يا ټوټه کونه:
لاندې د انتيګرالونو تمعه دې و شميرل شي.

$$A=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$



لومړنی اند يا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلايلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتيګرال بايد فقط يوځل وشمېرل شي.

$$\int_{-1}^{1}dx=[x]_{-1}^{1}=[1]-[-1]=1+1=\underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b}=\underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0}-\underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1}=0-(-1)=\underline{\underline{1}}$$

$$A=\underbrace{\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx}_{1}+\underbrace{\int_{-1}^{1}dx}_{2}+\underbrace{\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx}_{1}=1+2+1=\underline{\underline{4}}$$

تولګه
د انتيګرال هندسي تعريف

لوريزه سطحه-د انتيګرال تعريف:که يوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتيګرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.

تحليلي تعريف: د f يوه تابع ورکړ شوې، چې په يوه انتروال [a,b] باندې تعريف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتيګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پوهيږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند (تعریف) ٤ . ۱ : لیمیټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max\Delta x\to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) تاکلی اینتیګرال بولو، یا

F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته a د اینتیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او b د اینتیګرالونې پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د اینتیګرالونې اینتروال او(f Integrand) x)اینتیګرالېدونکی) او xد اینتیګرالونې (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c\in[a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پېژند یا تعریف ٤ . ۲ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پیژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنستیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیگرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$

د $F(b) - F(a)$ لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توگه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع $f(x)$ په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که $f1(x)$ او $f2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینسوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی $u = g(x)$ متمادي اوو مشتقوړدی او $y = f(u)$ متمادي، نو باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

د ضربونو انتیګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتیګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمېږرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x \cdot \ln(x^2))\,dx = ?$$

بدلون Substitution

د ناټاکلي انتیګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې راکوي. د لومړنی انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې ګوته ورته نیول کیږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چې u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:)(کتاب کتل که لاندی بې د انتیګرال له نخښې)

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل : د (۲۱ . ۱۳) د ښي اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (.۲۱ . ۱۳) قاعده د ضرب اینتګرالیدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواك f [g (x)] وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیګریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a :

لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځیري تابع د لاینې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لاینې تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کیڼ لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه 4.2: لرو $I = \sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

b) $I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$

$$-2x-3=u,\qquad -2=\frac{du}{dx}\qquad dx=-\frac{1}{2}du,$$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

c) $I=\int\frac{2dx}{x+2}.$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

بیلګه:

$f(x)=e^{x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$

ځکه چې $F'(x)=e^{x}=f(x)$

مګر: $f(x)=e^{2x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{2x}\,dx\neq e^{2x}+C$

ځکه چې $F'(x)=2e^{2x}\neq\bar{f}(x)$ **که** $\bar{F}(x)=e^{2x}+C$; **وی.**

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = ?$$

بدلون : $u(x) = 2x = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\int f(x)\,dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

نو: $F(x) = \int (x)\,dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

ازمايښت : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

بیلګه :

وښایی چې $f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$ باور لري .

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = x + 1 = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته ـ یا په ځټ بدلون:

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:

$$\int (x)\,dx = \int (x+1)^2\, dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیلګه :

$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+6)^3\, dx = ?$
بدلون: $u(x) = 3x+6 = u$
جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$
$\int f(x)\,dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3\, du = \frac{u^4}{12} + C$
بیرته بدلون: $\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$
نو لرو: $\int (x)\,dx = \int (3x+6)^3\, dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$:

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کېږي.

بیلګه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

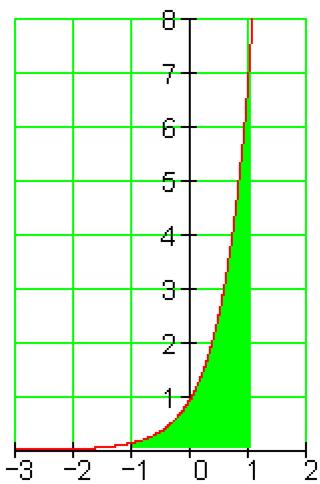
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتيګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3,627}}$$

$f(x) := e^{2\cdot x}$



بيلګه :

$$f(x) = 2x\cdot\ln\left(x^{2}\right) \Rightarrow F(x) = \int_{1}^{2} 2x\cdot\ln\left(x^{2}\right)dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^{2}$

۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x\cdot\ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x\cdot\ln\left(x^2\right)dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

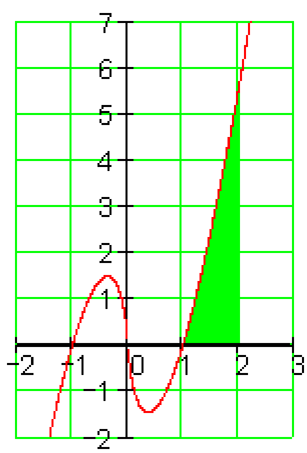
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځایکړی

$$\int_1^4 2x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du = \int_1^4 \ln(u)\,du = \left[u\cdot\ln(u) - u\right]_1^4$$

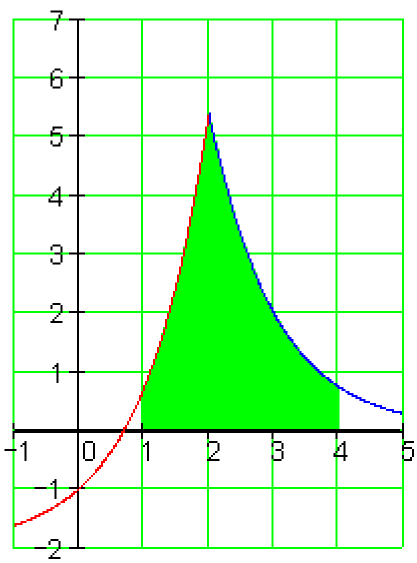
$$= \left[4\cdot\ln(4) - 4\right] - \left[1\cdot\ln(1) - 1\right] \approx \underline{\underline{2,545}}$$

$f(x) := 2x\cdot\ln\left(x^2\right)$



بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د $x \geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2 (e^x-2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2 (e^x-2)\,dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=(e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du;\ u(2)=0;\ u(4)=-2$$

$$I_2=-(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du=(e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$=(e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7,331}}$$

جمله ۲ . ۶:

د ،،بدلون،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینبوول ، لنډ: بدلون)قاعده: د نیونو لاندي چی $u = g(x)$ متمادي (نه پریکیدونکی) او د مشتق قابلیت لري او $y = f(u)$ متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx=\int f(u)du$$

حل : د (۲ . ۱۳) د بني اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کيږ اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (.۲۱ . ۱۳) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواك f [g (x)] وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سرې د دننه تابع لپاره متحولي يا واريابل بدلوي يا ځاي په ځاي کوي u = g (x) : جوړوي du / dx = g ' (x) په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیګرېشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کيږي.

بيلګه ۲۱ . ۳) a : لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بيلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , $2x = u-1$ کشتق $2= du / dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

وموليدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د جملی ۲ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کيږ لور ده) ليکل کيږي.

د بنستیزو اینتیګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولي x يواځي په جګ یا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اینتیګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لايني ترم

(c) ketabton.com: The Digital Library

) Term(پروت دی، کیدی شي چی د لايني بدلولو له لارې په بنسټيز اينتيګرالو ۱۰ او ۱۱ بيرته واړول شي. ډيروخت يو د فورم بدلون ته هم اړتياموجود وي، چی د اينتيګراند فورم ته راشو.

بيلګه 5.2:

$$\text{a)}\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$\text{b)}\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x=u,\qquad 2=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{2}du$$

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}u+C=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}(2x)+C.$$

اينتيګريشن قاعدې، که دننه تابع خطي يا لايني نه وي، نو د اينتيګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنسټيز اينتيګرال ته راشي. دلته هم سړی بيا دننی تابع په نوې متحولې يا واريابلی بدلوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه 6.21: الف: $I = 4x\sqrt{x^2-1}\,dx$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2}+C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3}+C$$

ب) $I = \int \sin^3 x\cdot \cos x\, dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int \frac{1}{x}\cdot \ln^2 x\ dx$$

$$\ln x = u, \qquad : \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\ dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x\ dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e)\ I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2-x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2dx = -\frac{1}{3}du,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln\left|2-x^3\right|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) يعني د ښی وکيڼ(لور هم استعمال شي .
اينتيګرال f (x) dx کيدی شي چی په بل واړول شي چی x په يو مناسب بلواك (
t) gبدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا:
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهيدی شي چی سړی د بدلون وروسته يو ساده
او ممکن يو بنستيز اينتيګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی
دی چی په يوه بلواك f (x) کی موجود » پيچلی « ترم h (x)د x) t = h (په بدلون
له منځ ځخه وړي او بيا) که ممکن وي (د x په لوريی حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بيلګه 7.21: الف: $:a)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اينتګرال د دوه ايتکرالو جمعي ته بيايي، دلته

$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx,$$

$$\tan x = t, \qquad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot \sqrt{\tan x} + C.$$

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو:

$$\int x \cos(x)\, dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\, dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

:

C د انتيګرالوني يوه په خوښه ثابته ده

انتیګرالوونی Integrand د x توان یا e^x سره

د ټوټه انتيګرالوني د استعمال سره د انتيګرالونو لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 e^x \, dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x) \, dx$$

کېده شي په مدې لا حل شي:

يوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) \, dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولي.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) \, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) \, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالوني قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x)$; $du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x$; $dv = e^x\,dx$

نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره يوځاى کړو، نو لاس ته زاځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتيګرال که کيڼ لور ته يوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

د اينتيګرال شميرنى استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم ځپرکي کى وويل شو چى ټاکلى اينتيګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د

سطحي مساحتA ښايي ، چي له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښىx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې ځخه مخ ته تللي يو چي y=f(x) د اينتيګرال اينتروال په دننه کى دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدى شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

- دا هم د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابع کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

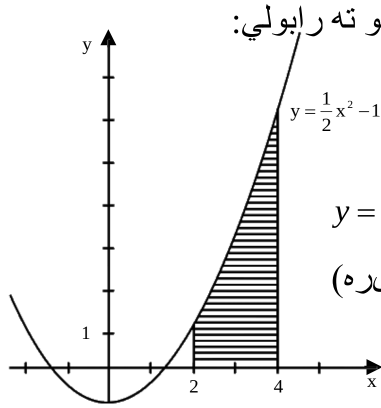


Bild 21,3

بیلګه ۵ . ۱ :

د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېړه)

$$A=\int_2^4(\frac{1}{2}x^2-1)dx=(\frac{1}{6}x^3-x)\Big|_2^4$$

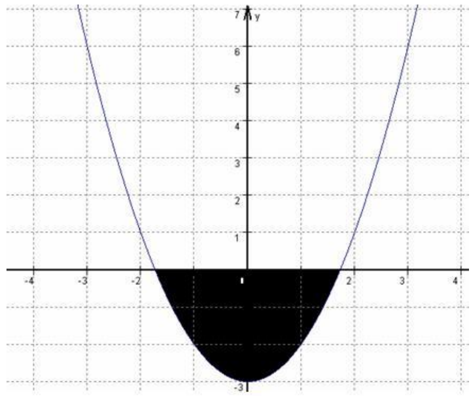
$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بېلګه ۵ . ۲ :

د $f(x)=x^2-3$ ګراف د x محور سره يوه

سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ

د ټولي سطحي مساحت وشمېرئ.

تګلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوې وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتيګرال حدونه لاس ته اروړی شو، بايد صفرځايونه وشمېرو.

$$0=x^2-3$$
$$x=\pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتيګرال ليکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتيګرال شمېرو او نتيجه يې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}}(x^2-3)dx=\int_0^{\sqrt{3}}(x^2)dx-3\cdot\int_0^{\sqrt{3}}1dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}}-3.x\Big|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3}=|-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A=2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}=4\cdot\sqrt{3}$$

بېلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي مساحت د $y=\frac{1}{2}x^3-5\ ,\ y=0\ ,\ x_1=-1\ ,\ x_2=2$ ترمنځ دی: (لاندې ځیره)

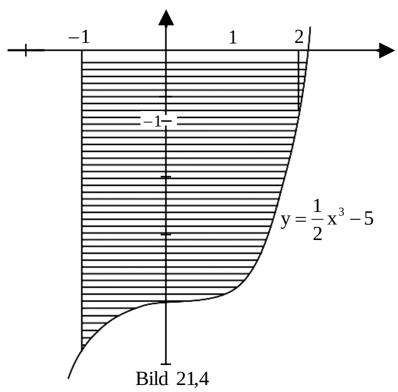
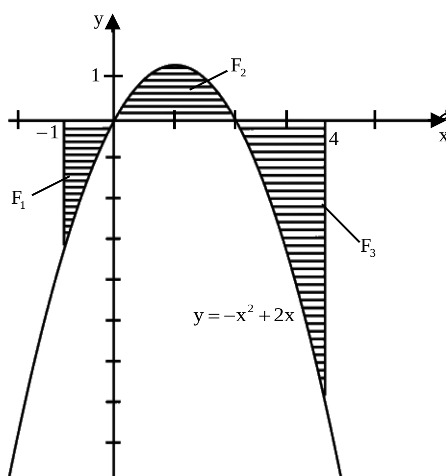


Bild 21,4

$$A=\left|\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx\right|$$
$$=-\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx$$
$$=(-\frac{1}{8}x^4+5x)\Big|_{-1}^{2}$$
$$=(-2+10+1/8+5)=\frac{105}{8}$$

بیلګه:

د لاندې پولو $x_1=-1$ تر $x_2=4$ اودمنحني $y=-x^2+2x$ او $y=0$ ترمنځدx- محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ ځېره کي نښانه شوې ده) دې وشمیرل شي



حل : د تابع $y=-x^2+2x$, د $x1=0$ د صفرځایونو $x_1=0$ او $x_2=2$ تر منځ پرته غوښتونکي سطحه دx-محور پورته، نوره کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کږې $y=-x^2+2x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $y=0$ ترمنځ (د $x-$ محور پورته او کښته)

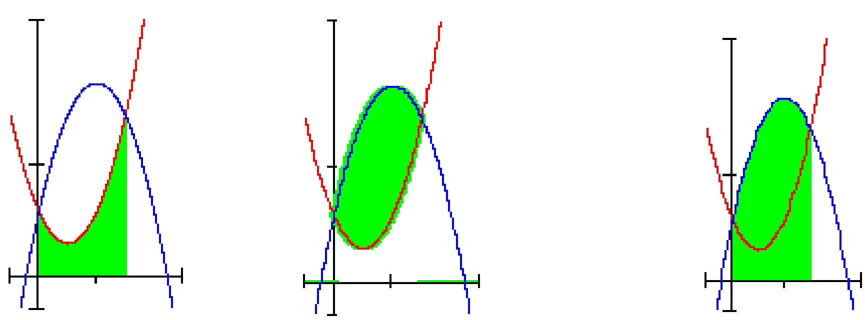
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمرنه:

ننوتنه د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټې ،چې له ګړو پولو را بند وي.

فعالیت:

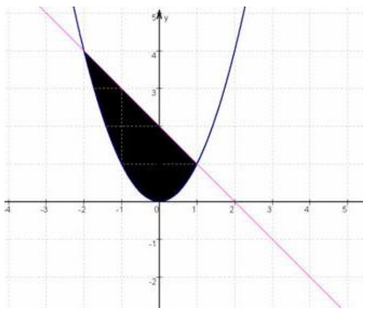
- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمیرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2$$



بیلګه ۵ . ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم یو شکل یا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چې انتیګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توګه لیدل کیږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس باور لري

$$A=\int_{1}^{-2}(-x+2)dx-\int_{1}^{-2}x^{2}dx=$$
$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$
$$=-1,5-6++=-4.5$$
$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A=\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))\,dx$$

بیلګه ۵ . ٦ :

د توابعو $f(x) = x^2 -2x +2$ او $g(x) = -x^2+4x +2$ ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوڅټکي(د تقاطع ټکي) د اینتیګرال حدونه جوړوي.

د غوڅټکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$ او $x_2 = 3$ د اینتېګرال لیمیټونه یا پولې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

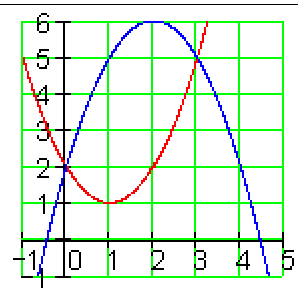
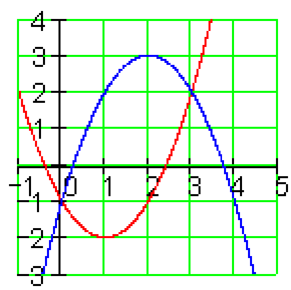
د اینتګرال جوړونه:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

 	لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مختخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ځیږو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په دري واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمیرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیکرال حدونه بې تغیره پاتېږي.

$$f(x)=x^2-2x-1 \quad \text{و} \quad g(x)=-x^2+4x-1$$

ځای په ځای کونه:
$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښايي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

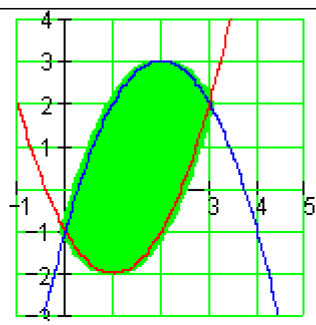
$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}$$

د دې متود تولیزه ونه(عمومیت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:

که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع$f(x)$ او تابع $g(x)$ پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمیرل کیږي.

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيګرالونې حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعيه قېمتونو غوځټكي دي

-- د منحنيو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

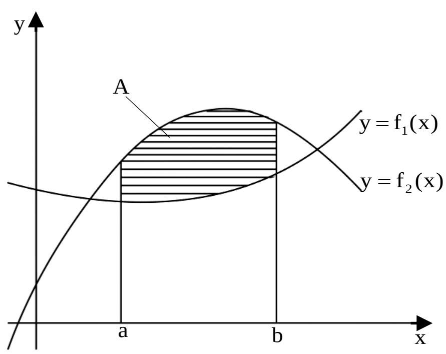


Bild 21,6

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو كې
له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

اينتيګرالوړاو $f_1(x) < f_2(x)$
په $[a,b]$ اينتروال كى (ش ۱ . ۶) داسى لاس
ته راوړل كيږي چې دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې
مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحه
كم كړئ.

$$A=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$$

سړى په ساده ډول خپل باور په دې راوستى شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك
چې $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اينتروال $[a,b]$ كومه يوه مخنخښه ځان ته غوره كوي باوري دى.

بيلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشميرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$)

حل : د ايتيګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوځټكي(د تقاطع ټكي) دي

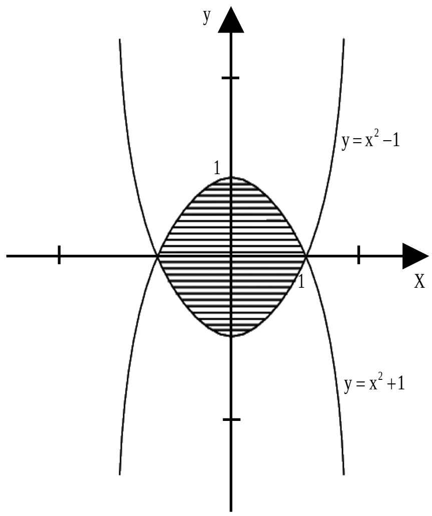
$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$$x^2=1 \qquad x_1-a=1\,,\; x_2=b=-1$$

د اينتيګرلولو په اينتروال [1 , 1 -] كى لرو $-x^2+1>x^2-1$
(كه چيرې په اينتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) كى $f2(x)>f1(x)$ په نظر كي ونه نيول
شي، نو د څرګند اينتيګرال به منفى شي او سړى(لكه د مخه چې ويل شوي) بيا
داينتيګرال مطلقه ارزښت نيسي. له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

 Bild 21.7	$A = \int_{-1}^{1}\left[-x^2 + 1 - (x^2 - 1)\right]dx$ $= \int_{-1}^{1}(-2x^2 + 2)\, dx$ $= (-\frac{2}{3}x^3 + 2x)\Big\|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$

بيلګه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ سطحه شميرل کيږي.

y=(x-1)²,y=-4x+4,y=4

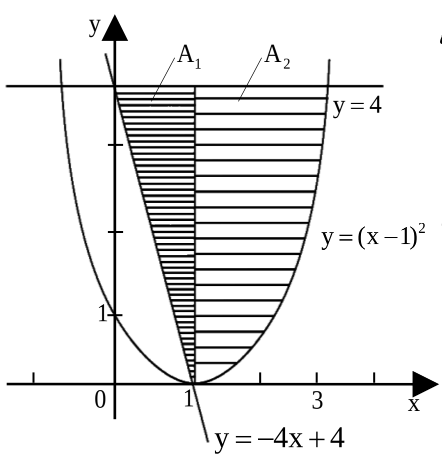


Bild 21.8

حل : دا د شميرلو سطحه، د منحنيو ترمنځ د دوه سطحوA1 او A2 له يوځاي کيدو څخه لاس ته راځي.

A1د منحنيو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ پروت دی. د اينتيګرال پولی(- حدونه) د لومړي

کواور ينات(x –محور) غوڅټکی دی، د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4 = -4x + 4,\ x_1 = 0$ په همدې ډول د

ښي غوڅټکي لومړی وضعيه ارزښت (کواور دينات)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$-4x+4=(x-1)^2,\ x^2+2x-3=0$$

$$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$$

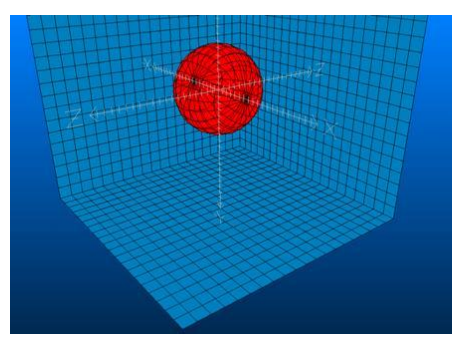
ګورو چې A2د y=-4 او y=(x-1)² تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعیه قیمت د ښي غوښتکي د y=4 او y=(x-1)² .

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1[4-(-4x+4)]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)\,dx=2x^2\Big|_0^1+(1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

د څرخیدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توګه د مستطیل حجم ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دې تل په پام کې ونيول شي: که د انتيګرال شمېرني له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخdدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه څرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به يې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخېدنه(څرخون)

لکه د مخه مو چې وويل، حجم هم يو انتيګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که يوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د يوه څرخېدونکي جسم (بدن يا تن) حجم(ډکی)

د يوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$ ترمنځ جوړيږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخيدنه

د يوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي بايد د $y = f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي يوغږيز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شايد ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلي يوغږيز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بيا ځانله شمېرل کيږي او سره جمعه کيږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

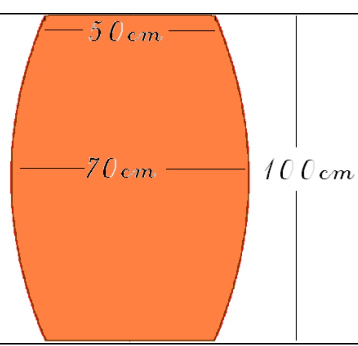
که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)|\, dx$$

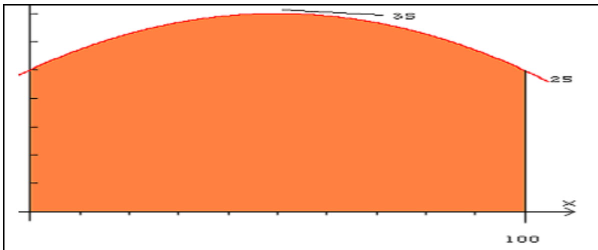
د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټيټ(min/max) توابع يو مثبت انتیګرال تظمينوي.

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2\ dx$$

د يوه مرتبان حجم: د يوه مرتبان حجم غواړو پيدا کړو چې جګوالی يې 1 متر، وړانګه يې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتيمتره په منځ کې ده.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	که مرتبان په 90° درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژئ تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.

حل: د پارابول د تابع لیکښه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

تولیز باور لري:

$f(x)-a\cdot(x-5)^2+3.5$ (dm ارزښت په دیسیمتر)

په څرګند دول 5- د رآس راکښنه د +x په لور ورکوي او 3,5 د +y په لور. د غزونې ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم تکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا تکی (0/2,5) دی.

$$f(x)=-a\cdot(x-5)^2+3.5$$

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې a دی: $\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس تکي فرمول په نورمال یا عمودې فورم بدلوو:

$$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنی تابع

$$f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$$

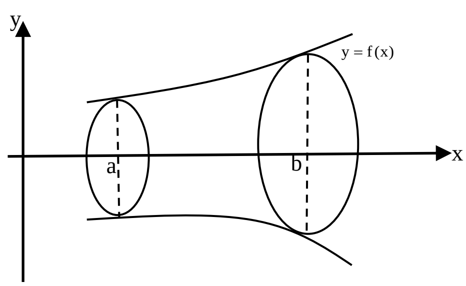
د حجم شمېرلو لپاره ټاکلی انتیګرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\;dx$$
$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot 10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$
$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$
$$=\pi\;\cdot 101.167$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې موږ له پیله په دیځیمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمېرل کیږي.

$=317.824\ liter$



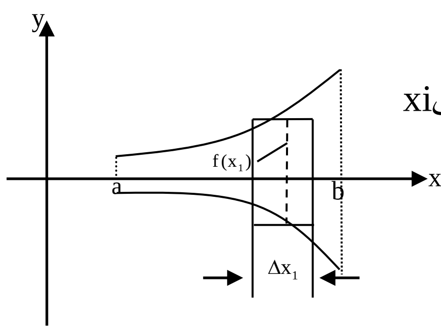
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ سطحه چی دx-محورباندي څرخي(ش ۵ . ۹). دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې یا- راغلي دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په اينتروال[a,b]کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چی د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپيداکيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعي له لارې چی وړانګه يې f(xi)، جګوالی يېxi د i=1,2,3,...n لپاره لری.
(ش: 5. 10) دi-مې توتې (سليندر ډکی(حجم) دی.

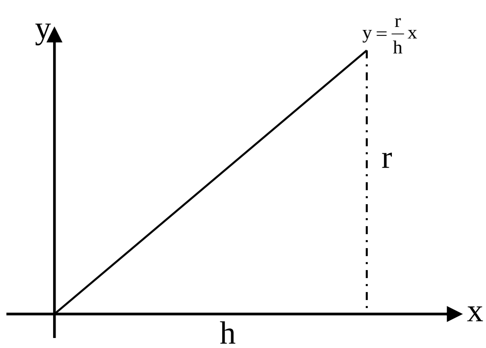
$$\Delta_i V = \pi \cdot \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$ حجم (ډکی) راکوي.



بيلګه ۵ . ۹ :) دمخروط يا کيګل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h} x$ کرښي (د سرچيني

تيره کرښه د $\frac{r}{h}$جګوالي سره) او دx- محور

(y =0) د حدونوx=0 تر x=h

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورې(ش . ۱۱)

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h} x\right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

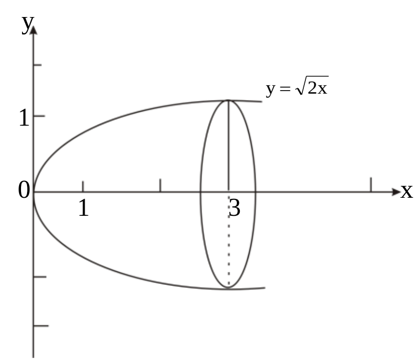
دا له بنسټیزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلګه ۵ . ۱۰:

د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

ترمنځ د x-محور باندې څرخېدلو جوړ(تولید) شوی جسم څرخېدلی پارابولویید دی (څ ۵ ړ ۱۲)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$
$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$
$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^3 = 9\pi.$$



د ارښیمیدس جمله Archimedischer Satz

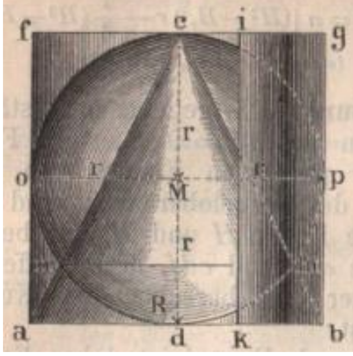
د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{توته(استوتنه)} : V_{غونداری(کره)} : V_{مخروط} = 3 : 2 : 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 1886 زکـ یوه درسي کتاب څخه

Figur 120.



Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: $\text{"} : \text{"} : \text{"} = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

$\text{"} : \text{"} : \text{"} = 6 : 4 : 2$

$\text{"} : \text{"} : \text{"} = 3 : 2 : 1$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

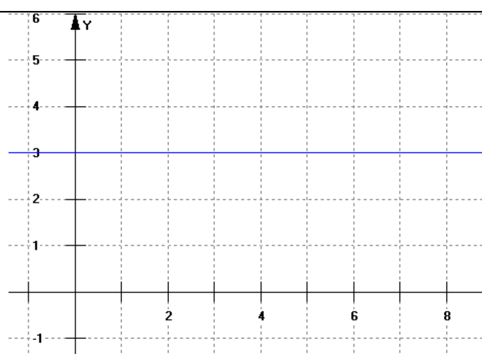
د پورته الماني پښتو:ارښیمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب یې وموندده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښیمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بېلګه ۵ . ۱۱:

استوانه(توته):

استوانه د x په محور د $f(x) = c$ یوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.



د یوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په [0;5] انتروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نيسو او غواړو يوه لار پيدا کړو ، چې د هغې لارې د انتيګرال په مرسته حجم وشمېرلاي شو.
د سطحې مساحت د لاندې انتيګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\,dx$$

که د دې ناپاي ډېرو مستطيلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغښلېدونکې پنډوالي dx سره) انتيګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\,dx$$

دا په دې معنا چې دا انتيګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد يوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

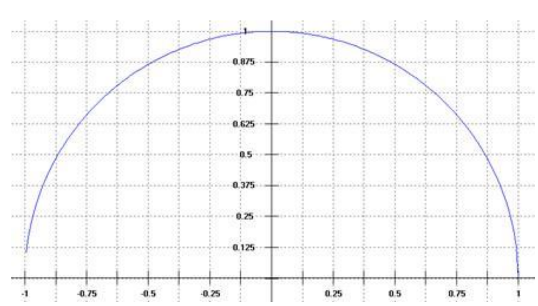
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\,dx$$

د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\,dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45-0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډاری يا غنډوسکه(توپ)):



(c) ketabton.com: The Digital Library

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع څرخېدني څخه غونډاری یا کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يي $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې بیا حجم وشمېرل شي.

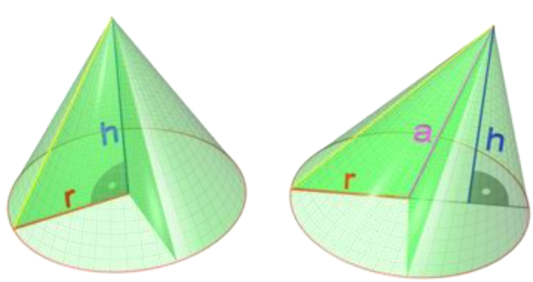
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، یعنې په انتروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې یو مخروط د یوه منظمn زاویو (اړخیزې(کونجیز) څخه رابندې بنستیزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نزدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتیګرال په مرسته د یوه مستقیم مخروط د حجم د شمېرلو یوه بله مرستندویه لار. یو د کارتیزي وضعیه ارزښت (قیمت) سیستم په کار اچول کیږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرچينه $(0|0)$ او منځ ټکی په ټکي $(h|0)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنيو توتو(استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جګوالی(پنډوالی) يې dx دی. داچې د داسې يوې توټې يا استوانې ګردې توټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعيه قيمت سيستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د يوه ناپاي کوچنی توټې(استوانې) وړانګه:

$$r\,z\,(h)=\frac{r}{h}\cdot x$$

د يوې ناپاي کوچنی توټې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h}\cdot x)^2\cdot\pi\cdot dx=\frac{r^2}{h^2}\cdot\pi\cdot x^2\,dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنيو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتيګرال جوړوو، د انتيګرال حدونو 0 او h سره:

$$V=\int_0^h\frac{r^2}{h^2}\cdot\pi\cdot x^2dx=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\int_0^h x^2dx$$

$$V=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\cdot\pi\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{h^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)$$

$$V=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V=\frac{r^2\cdot\pi\cdot h}{3}=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولای چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بیا یې انتیګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونیسئ.

$$\pi\int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دئ د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نژدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ ـ ۱۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انټروال کې د وضعیه قیمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

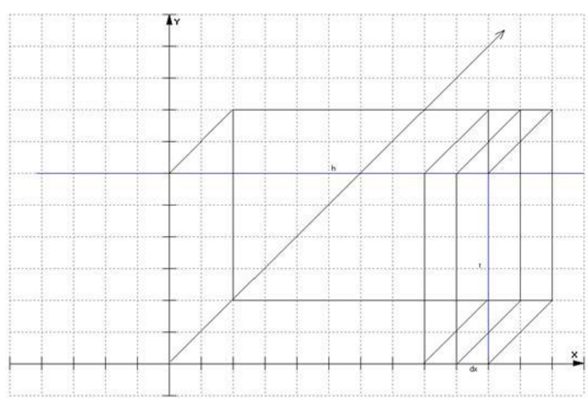
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\, dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استواني څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکي dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوځې (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژۍ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

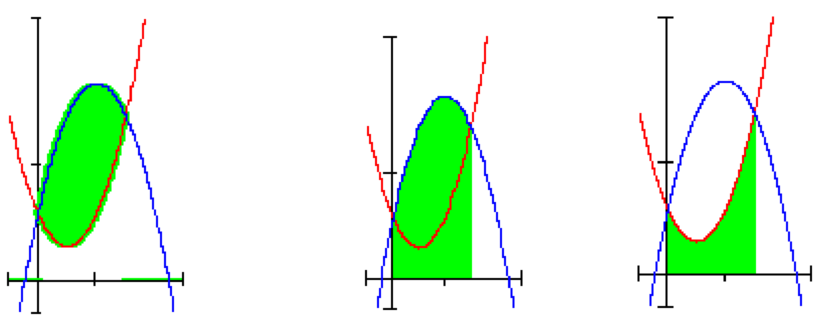
که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو،

نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

ټولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A، A_1 ، A_2

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر منځ پرتي سطحي مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a,b]$ انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یو غږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یو غږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال$[a,b]$کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{توته(استوانه)} : V_{غونداری(کره)} : V_{مخروط} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نژدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

تمرینونه
د بن

ستیز انتیګرال د جدول په کارونه یا استعمال لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int (x^3 - 5x^2 + 7x - 2)dx$, b) $\int (2/x^3)\, dx$, c) $\int (1/3)\sqrt[3]{x}\, dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$, e) $\int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}\, dx$, f) $\int (\sqrt[3]{x^4} + 1)\, dx$,

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

g) $\int \sqrt[3]{x^{-3}}\,dx$, h) $\int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}\,dx$, i) $\int 3\cdot 2^x\,dx$,

j) $\int \frac{1}{2\sin^2 x}\,dx$, k) $\int \frac{1}{3+3x^2}\,dx$, l) $\int \cos\varphi\cdot s\,ds$,

m) $\int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}$, n) $\int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt$, o) $\int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du$.

۱ . ۲ – د بېرته په اکلي انتيګرال وروسته يې انتيګرال ونيسئ

a) $\int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}\,dx$, b) $\int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}\,dx$, c) $\int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$,

d) $\int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\,dx$, e) $\int (-2-2\tan^2 x)\,dx$, f) $\int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}\,dt$.

۳ – لاندې ټاکلي انتيګرالونه وشمېرئ

a) $\int_0^1 \frac{1}{2}e^x\,dx$, b) $\int_\pi^{2\pi} \cos x\,dx$, c) $2\int_2^3 dt$,

d) $\int_0^\pi \cos\pi \sin x\,dx$, e) $\int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}$, f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}\,dx$,

g) $\int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\,dx$, h) $\int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}\right)dx$, i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\,dt$,

j) $\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\,du$, k) $\int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\,dx$, l) $\int_a^b a^x\,dx$.

۴ – د بدلون يا سبستچيشن له لارې يې انتيګرال وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\int \sqrt[3]{2x-7}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{-x+1}$, c) $\int 2^{3x+6}\,dx$,

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx$, e) $\int \frac{dx}{1+(x+1)^2}$, f) $\int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}\,dt$,

g) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx$, h) $\int \frac{3x\,dx}{-x^2+1}$, i) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$,

j) $\int 7\cos^7 x \sin x\,dx$, k) $\int (1-2\sin x)^3 \cos x\,dx$, l) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx$,

m) $\int \cot t\,dt$, n) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,dx$, o) $\int \frac{\operatorname{Arc\,sin} u}{2\cdot\sqrt{1-u^2}}\,du$,

p) $\int \frac{\sqrt{2\ln x+3}}{3x}\,dx$, q) $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$, r) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx$.

۵ . د تر زیرنیونی فورمیدلون وروسته او په بنسټیز اینتیګرال ۱۰ او ۱۱ د بدلون له لاري یی اینتیګرال وشمیری ،

a) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, b) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$, c) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$, e) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}$, f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$,

g) $\int \frac{dx}{x^2-10x+34}$, h) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+30}$, i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

۶ لاندي تاکلي اینتیګرالونه وشمیری

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3}$, b) $\int_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$, c) $\int_{0}^{2} 2^{2x+1}\,dx$,

d) $\int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}\,dx$, e) $\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x}\ln x\,dx$, f) $\int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$, h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}$, i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\,dx$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ . د جملې ۲۱ . ۸ استعمال په بنسټ یې (ټوټه اینتیګرالونه) اینتیګرال کړئ

a) $\int 0{,}2x \cdot \sin x \, dx$, b) $\int 4x^3 \cdot \ln x \, dx$, c) $\int \cos^2 x \, dx$,

d) $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int x \cdot (\cos x + 1) \, dx$,

g) $\int x^3 \cdot e^x \, dx$, h) $\int \text{Arc}\sin x \, dx$, i) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x \, dx$,

j) $\int \text{Arc}\tan x \, dx$.

لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_{-1}^{1} x \cdot e^x \, dx$, b) $\int_{1}^{2} \ln x \, dx$, c) $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$,

d) $\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int_{0}^{\pi} x^3 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int_{0}^{\pi} x^4 \cdot \sin x \, dx$.

د هغې هوارې دننه وشمیرئ، چې د ورکړ شوو مساواتو کړو څخه راښنده شوي وي

a) $y = e^{0{,}5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $y = 9$, $x = -3$, $x = 3$;

d) $y = \cos x$, $y = 0$

e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$;

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$, $y = 3 - 4x$;

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10;$

l) $y = \cos x, \quad y = \sin x$;

m) $y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8;$

n) $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4+x^2};$

o) $y = x^2, \quad x = y^2;$

p) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3;$

q) $y = 2\sin x, \quad y = \sqrt{3} \tan x \quad , x = [0, \pi/2)$

f) $y = \tan x$

کرښه چې په کېږي $y = \tan x$ پرتو ټکو $(0,0)$ او $(\pi/4, 1)$ تیریږي د x –محور باندې د ورکړ شوو مساواتو سره د ګږو ترمنځ هواره څرخي د راپورته شوي څرخیدونکی بدن یا جسم ډکی یا حجم وشمیری. پام دې وي، چې په ورکړشوي حالت کې ورکړشوې هواره د دوه کږو څخه رابنده ده. نو له دې امله د لوي کږې ډکی څخه د کوچنی کږې ډکی کمیږي.

---

a) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = h;$

b) $y = \sqrt[3]{x^2} + 1, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2$

c) $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

d) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

e) $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2x;$

f) $y = 4x - x^2, \quad y = 0;$

g) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x \in [0, \pi].$

تراپیځ (څلورګوډی، چې ټیك دوه اړخونه یې ډېر غبرګ وي) د کونجونو $(1,0),(5,0),(1,3),(5,5)$ د x–محور باندې څرخي، وشمیرئ

الف) د جوړې شوې هوارې دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د څرخيدونکي بدن ډکي

د کږو $y=\sqrt{x}, \quad y=0, \quad y=-x+6$ ترمنځ هواره د x– محور باندې څرخي، وشميرئ.

الف) د کږې غوښتکو د پروت محور سره

ب) د کږو ترمنځ هواره

پ) د څرخيدونکي بدن ډکي

د هغهٔ څرخيدونکي بدن ډکي وشميرئ، کوم چې په اينټروال $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ کي د x–محور پورته خواته د کږو $y=\sin x$ او $y=\cos x$ ترمنځ

پرته هواره، چې د x–محور باندې څرخيږي!

۱۴ نيمګردی $y=\sqrt{9-x}$ د x–محور باندې څرخيږي. د ګوډيبرخی ډکی وشميرئ د پولو $x_1=1, x_2=3$ او ترمنځ!

۱۵ د څرخيدونکي ايليپسوئيد ډکي څومره لوي دی، کوم چې د x–محور پورته خوا ته پرته د ايليپسی نيمی هوارې د رابندوونکي $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کږې سره د x–محور باندې توليدوي؟

د ځيرکي نور تمرينونه:

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۱ - لاندې نااصلي پولينومونه دې د يوه ټول کسري پولينومونو او يوه اصلي پولينوم د جمعې په ځېر وليکل شي.

۲ - لاندې پولينومونه د جمعې په ځېر وليکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \dfrac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6}$ $b)\ \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$

$c)\ \dfrac{4x+10}{x^2+6x+8}$ $d)\ \dfrac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$

$e)\ \dfrac{4x^2+6x-20}{x^3-4x}$ $f)\ \dfrac{14}{x^2+20x+51}$

۳ ــ د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$a)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

٤ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$a)\ \dfrac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \dfrac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \dfrac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

٥ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \dfrac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $b)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \dfrac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $d)\ \dfrac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

٦ ــ و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$a)\ f(x)=2x^2+4x-7\quad,\quad f(x)=4x+4$

$b)\ F(x)=(x^2-x)^3\quad,\quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$

$e)\ F(x)=\dfrac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\dfrac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$

۷ - وښایئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پیداکړئ او ټیکوالی یې و ازمایئ.

$a)\ \int x^3dx \qquad b)\ \int 7dx \qquad c)\ \int xdx \qquad d)\ \int(1-x^2)dx$

$e)\ \int(x+\dfrac{1}{x})dx \qquad f)\ \int(e^x+\cos x)dx \qquad g)\ \int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad h)\ \int\dfrac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \qquad k)\ \int(2+e^x)dx \qquad l)\ \int(1+\ln x)dx \qquad m)\ \int(\sqrt{x}+\sin)dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \dfrac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e(2+\dfrac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx \qquad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \qquad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad i)\ \int_{-2}^2 x^3dx$

$j)\ \int_2^6(1+x)dx \qquad k)\ \int_1^2(x^2-x^5)dx \qquad l)\ 0\int_{-2}^2(\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^2}{3})dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۷ د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه یې سره پرتله کوئ.

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und -\int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \ \wedge\ -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0}\sin x dx \ \wedge\ -\int_{-\pi}^{0}\sin x dx$$

۱۷– هر دوه انتیګرالونه د یوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi}\cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi}\cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3}3x^{2}dx + \int_{5}^{3}3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2}e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5}2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2}x dx$$

۱۹ – د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x}5t^{4}dt\ ,\quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x}e^{t}dt\ ,\quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2}\ ,\ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x}\ ,\ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2}x}\ ,\ a=0 \qquad d)\ f(x)=2\ ,\ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx,\quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx,\quad f)\ \int(\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx,\quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx,\quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx,\quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx,\quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}},\quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt,\quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$ --------

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینتیگرال بدلون وروسته یې اینتیگرال ونیسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx,\quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx,\quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx,\quad e)\ \int(-2-2\tan^2 x)dx,\quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلي اینتیگرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx,\quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx,\quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi \sin x\ dx,\quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2},\quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2}(2x-1)\,dx,\quad h)\ \int_0^8\left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx,\quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du,\quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\,dx,\quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې یې اینتیگرال وشمیرئ:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\ e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\quad f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int\frac{3xdx}{-x^2+1},\qquad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

۲۵- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې یي اینتیګرال وشیمرئ

$$a)\ \int\frac{dx}{1+4x^2},\qquad b)\ \int\frac{dx}{2+4x^2},\qquad c)\ \int\frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\qquad e)\ \int\frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\qquad f)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int\frac{dx}{x^2-10x+34},\qquad h)\ \int\frac{dx}{3x^2-6x+30},\qquad i)\ \int\frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4x-1)^3},\qquad b)\ \int_{-1}^{0}e^{3x}dx,\qquad c)\ \int_{0}^{2}2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1}\frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\qquad e)\ \int_{e}^{e^x}\frac{1}{x}\ln\times dx,\quad f)\ \int_{2}^{4}\frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\cos x\ dx,\qquad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې ټوټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

$$a)\ \int 0,2x\cdot\sin x\ dx,\qquad b)\ \int 4x^3\cdot\ln x\ dx,\qquad c)\ \int\cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int\cos x\cdot\sin x\ dx\qquad e)\ \int x^2\cdot\sin x\ dx\qquad f)\ \int x\cdot(\cos x+1)\,dx$$

$$g)\ \int x^3\cdot e^x\ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x\ dx,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينککن ليکنې چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – کربنیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميرې شينواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي ځانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

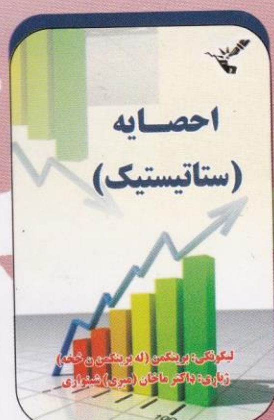
ماخان ميرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

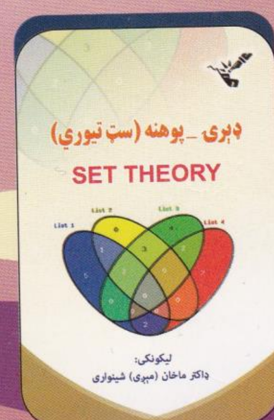
دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې ځانګه او اباسين نوميږي. ځانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې.

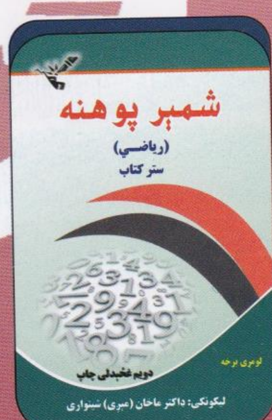
ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

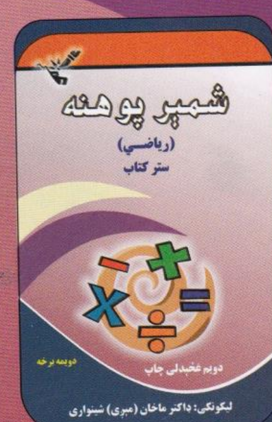
(c) ketabton.com: The Digital Library

ډاکتر ماخان (مېرې) شينواري









د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه ـ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V
د خپرونو لړ (۱۳۰)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library